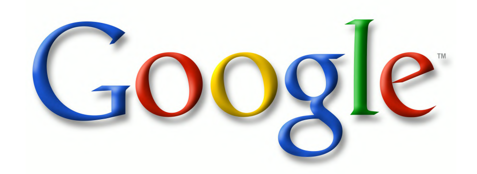



Stanford University Libraries
3 6105 000 992 649

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

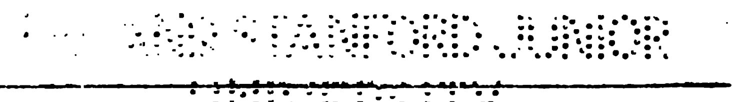
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Neunter Band,

in 4 Heften.

Mit 1 Kupfertafel.

Berlin, 1832.
Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichniſs

des neunten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

II. Angewandte Mathematik.

Aufgaben und Lehrsätze.

Nachrichten von Büchern und Anzeigen.

1.

De resolutione algebraica aequationis $X^{257}=1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata.

(Auct. *Richelot*, Doct. phil. Regiom.)

Introductio.

Cum problematis ad circulum dividendum spectantis theoriam excellentissimi viri pervestigaverint, exemplis novis principia ab illis exposita illustrare, arithmeticae sublimioris disciplinae haud alienum esse mihi videtur.

Quippe quae exempla duplicem secum ferunt utilitatem: unam, quod varia artificia tam peculiaria, ut in theoria universali iuste explicari nequeant, adhibendi occasionem praebeant, alteram, quod exemplis illis persaepe incrementa fecerit tota haec disciplina.

Aequationem $X^{257}=1$ per solas aequationes quadraticas algebraice resolvi posse, ita ut functiones trigonometricae angulorum $\frac{2\pi}{257}$, $\frac{4\pi}{257}$ etc. per radices quadraticas exhiberi possint, nec per constructiones geometricas definiri nequeant, iam ante plus quam triginta annos inventum et demonstratum, neque vero usque ad hunc diem neque accurate expositum fuit theorema. Quod theorema in priori libelli huius parte tractavi.

In altera vero easdem functiones trigonometricas per formulas concinnas, bisectione anguli adhibita, exprimere mihi proposui.

Pars prior.

I.

Antequam ad rem ipsam adgrediar, problema propositum brevi in conspectu ponere, atque notationem usitatam repetere, haud erit superfluum. Aequatio haec:

$$1.\quad X^{257}=1$$

unam radicem suppeditat realem $=1$ ceterasque omnes imaginarias formae $\cos\frac{2\varkappa\pi}{257}\pm i\sin\frac{2\varkappa\pi}{257}$, $\varkappa$ significante quemcunque numerum integrum ipsius 257 non multiplum. — Quarum radicum cum binae tales sint, quarum

summa fiat realis, scilicet:

$$\cos\frac{2\varkappa\pi}{257} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{257}, \text{ et}$$

$$\cos\frac{(257-\varkappa).2\pi}{257} + i\sin\frac{(257-\varkappa).2\pi}{257}, \text{ sive}$$

$$\cos\frac{2\varkappa\pi}{257} - i\sin\frac{2\varkappa\pi}{257},$$

hae summae formae $2\cos\frac{2\varkappa\pi}{257}$, inter se omnes diversae, quarum numerus 128 est, verarum aequationis propositae radicum loco inveniendae nobis sunt; ni mirum:

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{257}\right),\quad 2\cos\left(2.\frac{2\pi}{257}\right),\quad 2\cos\left(3.\frac{2\pi}{257}\right) \text{ etc. } \quad 2\cos\left(128.\frac{2\pi}{257}\right),$$

quibus determinatis tota quaestio absoluta est.

Quem ad finem notum esse adiicio, qualibet radicum adhuc indeterminata aequationis

$$2.\qquad \frac{X^{257}-1}{X-1} = 0 = x^{256} + x^{255} + \text{ etc. } + 1,$$

r nominata, omnes ceteras esse:

$$r,\ r^2,\ r^3 \ldots\ldots \qquad r^{256},$$

sive vetere notatione adhibita

$$(1)\ (2)\ (3)\ \ldots\ldots \qquad (255),\ (256).$$

Significemus

$$(1) + (256) \text{ per } (2, 1) \quad \text{sive } (2, 256),$$
$$(2) + (255) \text{ per } (2, 2) \quad \text{sive } (2, 255),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n) + (257-n) \text{ per } (2, n) \quad \text{sive } (2, 257-n),$$
$$(128) + (129) \quad \text{per } (2, 188) \text{ sive } (2, 129),$$

rursus 128 novi existunt definiendi valores, cum istis vero antea propositis convenientes. Si enim est: $r = \cos\frac{2\varkappa\pi}{257} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{257}$, ubi μ et 257 numeri inter se primi sint, fit:

$$r^n \quad = \cos\frac{2n\varkappa\pi}{257} + i\sin\frac{2n\varkappa\pi}{257} = (n),$$

$$r^{257-n} = \cos\frac{2n\varkappa\pi}{257} - i\sin\frac{2n\varkappa\pi}{257} = (257-n),$$

unde efficitur

$$(2, n) = (n) + (257-n) = 2\cos\frac{2n\varkappa\pi}{257}.$$

Pro n omnes numeros ab 1 usque ad 128 substituentes, efficimus valores

$$2\cos\frac{2\varkappa\pi}{257},\quad 2\cos\left(2.\frac{2\varkappa\pi}{257}\right),\quad 2\cos\left(3.\frac{2\varkappa\pi}{257}\right)\ \text{etc.}\quad 2\cos\left(128.\frac{2\varkappa\pi}{257}\right),$$

sive

$$(2,1)\qquad (2,2)\qquad (2,3)\qquad (2,128),$$

quos, quoniam rursus omnes inter se diversi sint, cum illis, ubi $\varkappa = 1$ erat, congruere clarum est.

Jam convenit tertio modo 128 illos valores exprimere. Congruentia $X^{256} \equiv 1$ (257) 256 radices continet, quae, si radix primitiva numeri primi 257 sit $= g$, fiunt:

$$1\ g\ g^2\ g^3\ g^4 \ldots\ldots\ g^{255}\ g^{256}$$

multiplis numeri 257 ubique desumtis, unde omnes numeri integri ab 1 usque ad 257 oriri constat. Per se igitur clarum est, 256 radices illas aequationis (2.) ita posse repraesentari:

$$(1)\ (g)\ (g^2)\ (g^3) \ldots\ldots\ (g^{255}),$$

in qua notatione iam subintelligitur, antea desumta esse multipla numeri 257 a potestatibus ipsius g.

Hos valores in aggregata congregentur, quae solemni notatione hac exprimuntur:

$$\{(1) + (g^1) + (g^2) + \text{etc.} \ldots\ldots\ (g^{255}) = (256, 1)\ \text{sive}\ (256, g^1)\ \text{sive etc.}\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) + (g^2) + (g^4) + \text{etc.} & + (g^{254}) = (128, 1)\ \text{sive}\ (128, g^2)\ \text{sive etc.} \\ (g) + (g^3) + (g^5) + \text{etc.} & + (g^{255}) = (128, g)\ \text{sive}\ (128, g^3)\ \text{sive etc.} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) + (g^4) + (g^8) + \text{etc.} & + (g^{252}) = (64, 1)\ \text{sive}\ (64, g^4)\ \text{sive etc.} \\ (g) + (g^5) + (g^9) + \text{etc.} & + (g^{253}) = (64, g)\ \text{sive}\ (64, g^5)\ \text{sive etc.} \\ (g^2) + (g^6) + (g^{10}) + \text{etc.} & + (g^{254}) = (64, g^2)\ \text{sive}\ (64, g^6)\ \text{sive etc.} \\ (g^3) + (g^7) + (g^{11}) + \text{etc.} & + (g^{255}) = (64, g^3)\ \text{sive}\ (64, g^7)\ \text{sive etc.} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) + (g^8) + (g^{16}) + \text{etc.} & + (g^{248}) = (32, 1)\ \text{sive}\ (32, g^8)\ \text{sive etc.} \\ (g) + (g^9) + (g^{17}) + \text{etc.} & + (g^{249}) = (32, g)\ \text{sive}\ (32, g^9)\ \text{sive etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ (g^7) + (g^{15}) + (g^{23}) + \text{etc.} & + (g^{255}) = (32, g^7)\ \text{sive}\ (32, g^{15})\ \text{sive etc.} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) + (g^{16}) + (g^{32}) + \text{etc.} & + (g^{240}) = (16, 1)\ \text{sive}\ (16, g^{16})\ \text{sive etc.} \\ (g) + (g^{17}) + (g^{33}) + \text{etc.} & + (g^{241}) = (16, g)\ \text{sive}\ (16, g^{17})\ \text{sive etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ (g^{15}) + (g^{31}) + (g^{47}) + \text{etc.} & + (g^{255}) = (16, g^{15})\ \text{sive}\ (16, g^{31})\ \text{sive etc.} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) + (g^{32}) + \text{etc.} & + (g^{224}) = (8, 1)\ \text{sive}\ (8, g^{32})\ \text{sive etc.} \\ (g) + (g^{33}) + \text{etc.} & + (g^{225}) = (8, g)\ \text{sive}\ (8, g^{33})\ \text{sive etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ (g^{31}) + (g^{63}) + \text{etc.} & + (g^{255}) = (8, g^{31})\ \text{sive}\ (8, g^{63})\ \text{sive etc.} \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} (1) + (g^{64}) + (g^{128}) + (g^{192}) & = (4, 1) \text{ sive } (4, g^{64}) \text{ sive etc.} \\ (g) + (g^{65}) + (g^{129}) + (g^{193}) & = (4, g) \text{ sive } (4, g^{65}) \text{ sive etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ (g^{63}) + (g^{127}) + (g^{191}) + (g^{255}) & = (4, g^{63}) \text{ sive } (4, g^{127}) \text{ sive etc.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) + (g^{128}) & = (2, 1), \text{ sive } (2, g^{128}) \\ (g) + (g^{129}) & = (2, g), \text{ sive } (2, g^{129}) \\ \text{etc.} & \text{etc.} \\ (g^{127}) + (g^{255}) & = (2, g^{127}), \text{ sive } (2, g^{255}). \end{cases}$$

Nec non hic ubique a potestatibus radicis primitivae g, subtrahantur necesse est multipla numeri 257.

Quia g radix primitiva numeri 257 assumta est, habemus congruentiam:

$$g^{128} \equiv -1 \, [257] \equiv 257 - 1 \, [257]$$

unde sequuntur hae:

$$g^{129} \equiv -g \; [257] = (257 - g) \; [257],$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$g^{255} \equiv -g^{127} [257] = (257 - g^{127}) [257],$$

unde derivatur:

$$(2, 1) = (1) + (257 - 1),$$
$$(2, g) = (g) + (257 - g),$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(2, g^{127}) = (g^{127}) + (257 - g^{127}).$$

Quibus collatis cum illis 128 valoribus (2, 1) (2, 2) .... (2, 128), colligimus: non modo valores:

$$(1) \; (g) \; (g^2) \text{ etc.} \ldots \ldots \quad (g^{255}),$$

esse 256 radices aequat. (2.), sed etiam valores:

$$(2, 1) \; (2, g) \; \ldots . \quad (2, g^{127}),$$

quia omnes inter se diversi sint, eosdem esse ac hos:

$$(2, 1) \; (2, 2) \; (2, 3) \; \ldots . \quad (2, 128),$$

sive:

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{257}\right) \quad 2 \cos\left(2 . \frac{2\pi}{257}\right) \ldots . \quad 2 \cos\left(128 . \frac{2\pi}{257}\right),$$

quamquam alio ordine scriptos. Quos quantitates definiendi rationem in sequentibus proponam.

II.

Ante omnia radix primitiva numeri 257 invenienda est, quam hac ratiocinatione assequor.

a) Contendo cuiusque numeri primi n formae 2^{m+1} omnia residua non quadratica radices primitivas omnes esse.

Demonstratio: Radix primitiva numeri primi n est talis numerus z, cuius demum $(n-1)$ta potestas $\equiv 1\ (n)$ sit (disquis. arith. 55), ita ut sit: $z^{n-1} \equiv 1\ (n)$. In hoc igitur casu $z^{2m} \equiv 1\ (2^m + 1)$. Si vero $(n-1)$ continet factores primos $2\varkappa.\lambda.\mu.\nu\ldots.$ numerorum inter 1 et n multi inveniuntur, quorum $\frac{n-1}{2}$ta, $\frac{n-1}{\varkappa}$ta, $\frac{n-1}{\lambda}$ta etc. potestas iam $\equiv 1\ (n)$ fit (disquis. arith. 49); quare conditiones, ut z sit radix primitiva numeri n fiunt, ne esto $z^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1\ (n)$, neque $z^{\frac{n-1}{\varkappa}} \equiv 1\ (n)$ etc. Nostro casu $2 = \varkappa = \lambda = \mu = \nu$ etc., unde sequitur conditio una radicis primitivae z, ne esto $z^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1\ (n)$ sive sit z residuum non quadraticum. (disquis. arith. 96).

b) 3 est residuum non quadraticum cuiusque numeri primi formae $2^m + 1$.

Demonstratio: $2^m + 1$ cum sit numerus primus aut formae $3n + 1$ aut formae $(3n + 2)$ esse potest; illud constare nequit, quia 2^m factorem 3 non involvit, unde sequitur numerum primum $2^m + 1$ formae esse $3n + 2$. Quos numeros primos formae $(3n + 2)$ residua non quadratica $+3$ vel -3 habere constat. (disquis. arith. 120.)

c) Unde sequitur, 3 esse radicem primitivam cuiusque numeri primi formae $2^m + 1$ atque hanc ob rem etiam numeri 257.

Adiiciantur etiam haec:

± 1 est residuum quadraticum cuiusque numeri primi formae $(2n+1)$

± 2 est residuum quadraticum cuiusque numeri primi formae $(8n+1)$ (disquis. arith. 108. et 114.);

unde colligitur, cum $2^m + 1$ utraque hac forma utatur, 3 esse **minimam** radicem primitivam numerorum primae formae $2^m + 1$, nec non igitur numeri 257.

Radice primitiva 3 assumta tabulam primam conficere possumus, ubi quantitates (1) (3) (3^2) $(3^3)\ldots.(3^{255})$ determinantur: singula ibi series superior exponentes radicis primitivae 3 significat; inferior multiplis numeri 257 subtractis evadens residuum.

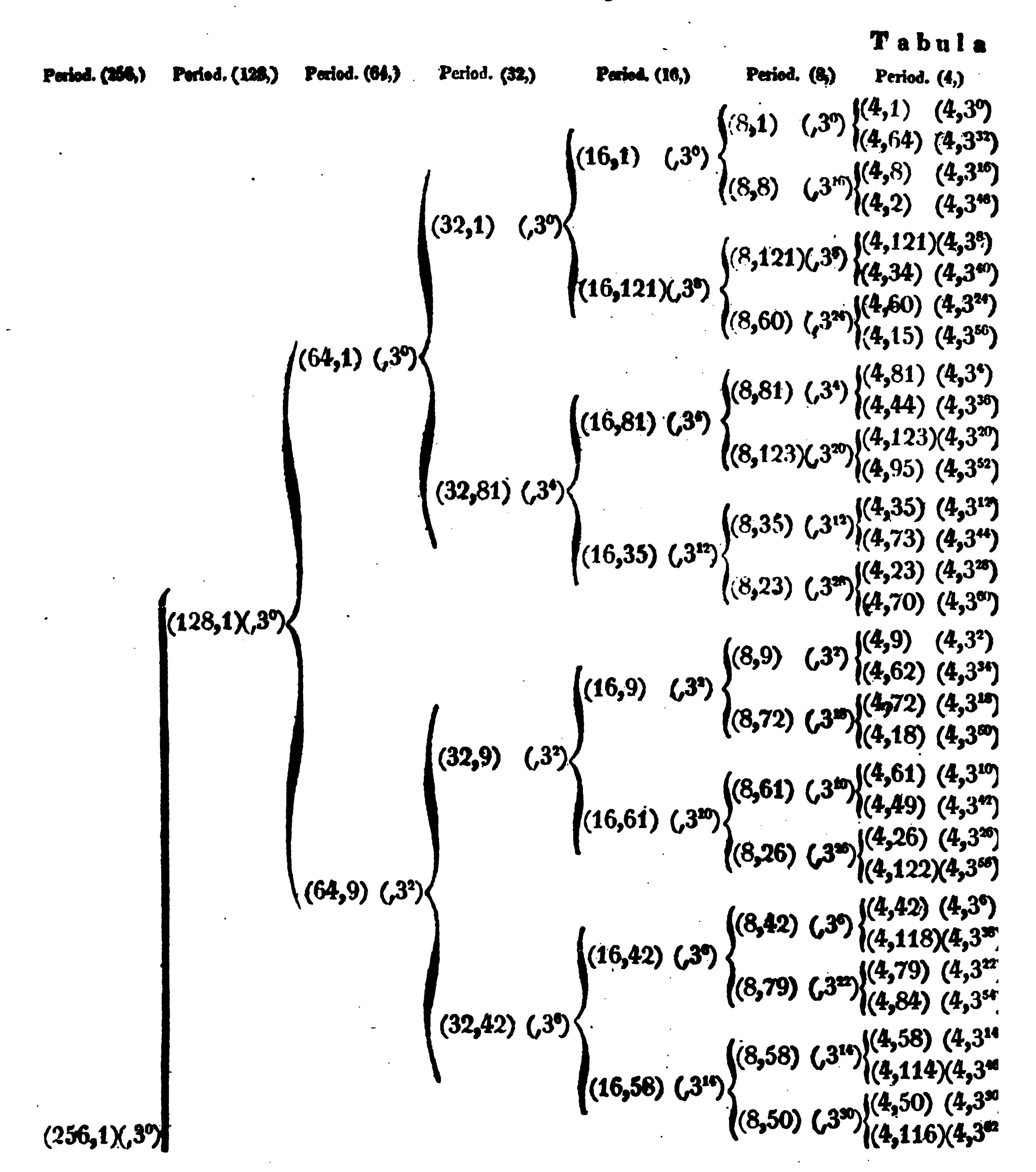
Tabula prima.

pot.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
res.	(3)	(9)	(27)	(81)	(243)	(215)	(131)	(136)	(151)	(196)	(74)	(222)	(152)	(199)	(83)	(249)
pot.	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
res.	(233)	(185)	(41)	(123)	(112)	(79)	(237)	(197)	(77)	(231)	(179)	(23)	(96)	(207)	(107)	(64)
pot.	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
res.	(192)	(62)	(186)	(44)	(132)	(139)	(160)	(223)	(155)	(208)	(110)	(73)	(219)	(143)	(172)	(2)
pot.	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
res.	(6)	(18)	(54)	(162)	(229)	(173)	(5)	(15)	(45)	(135)	(148)	(187)	(47)	(141)	(166)	(241)
pot.	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
res.	(209)	(113)	(82)	(246)	(224)	(158)	(217)	(137)	(154)	(205)	(101)	(46)	(138)	(157)	(214)	(128)
pot.	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
res.	(127)	(124)	(115)	(88)	(7)	(21)	(63)	(189)	(53)	(159)	(220)	(146)	(181)	(29)	(87)	(4)
pot.	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112
res.	(12)	(36)	(108)	(67)	(201)	(89)	(10)	(30)	(90)	(13)	(39)	(117)	(94)	(25)	(75)	(225)
pot.	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
res.	(161)	(226)	(164)	(235)	(191)	(59)	(177)	(17)	(51)	(153)	(202)	(92)	(19)	(57)	(171)	(256).

III.

Hinc (per praescripta articul. 344. et 345. in disquis. arith.) facile tabula emergit sequens; ubi (256, 1) in duas periodos formae (128,), quarum utraque in duas formae (64), quarum singula in duas formae (32,) etc. distribuuntur. — In periodis omnibus numerus residuum exprimens γ, si numero 128 maior est; cum $(257-\gamma)$ est commutatus. — Hoc vero licere clarum est, in qua enim periodo invenitur radix (γ), ibidem $(257-\gamma)$ inveniatur necesse est, quarum summa $=(2, \gamma)$ est; ita ut e notatione proposita $(32, \gamma)$ fiat $(32, 257-\gamma)$ etc. Praeterea ubique adiectas invenis potestates numeri 3 aequivalentes. — Periodi binae duorum terminorum formae igitur (2,) ad singulam pertinentes periodum quatuor terminorum formae (4) non scriptae sunt in serie verticali una sed loci angusti causa in duabus seriebus, octava et decima, in eadem vero serie horizontali. Ibidem invenis duplices cosinus quantitatibus (2,) aequivalentes angulorum, qui multipla anguli $\mu=\frac{2\varkappa\pi}{257}$ fiunt. In ultima vero atque antepenultima serie radices ipsae aequationis (2.) leguntur binae eandem singulam periodum (2,) componentes in serie verticali altera utra recta regione horizontali stantem.

Tabula

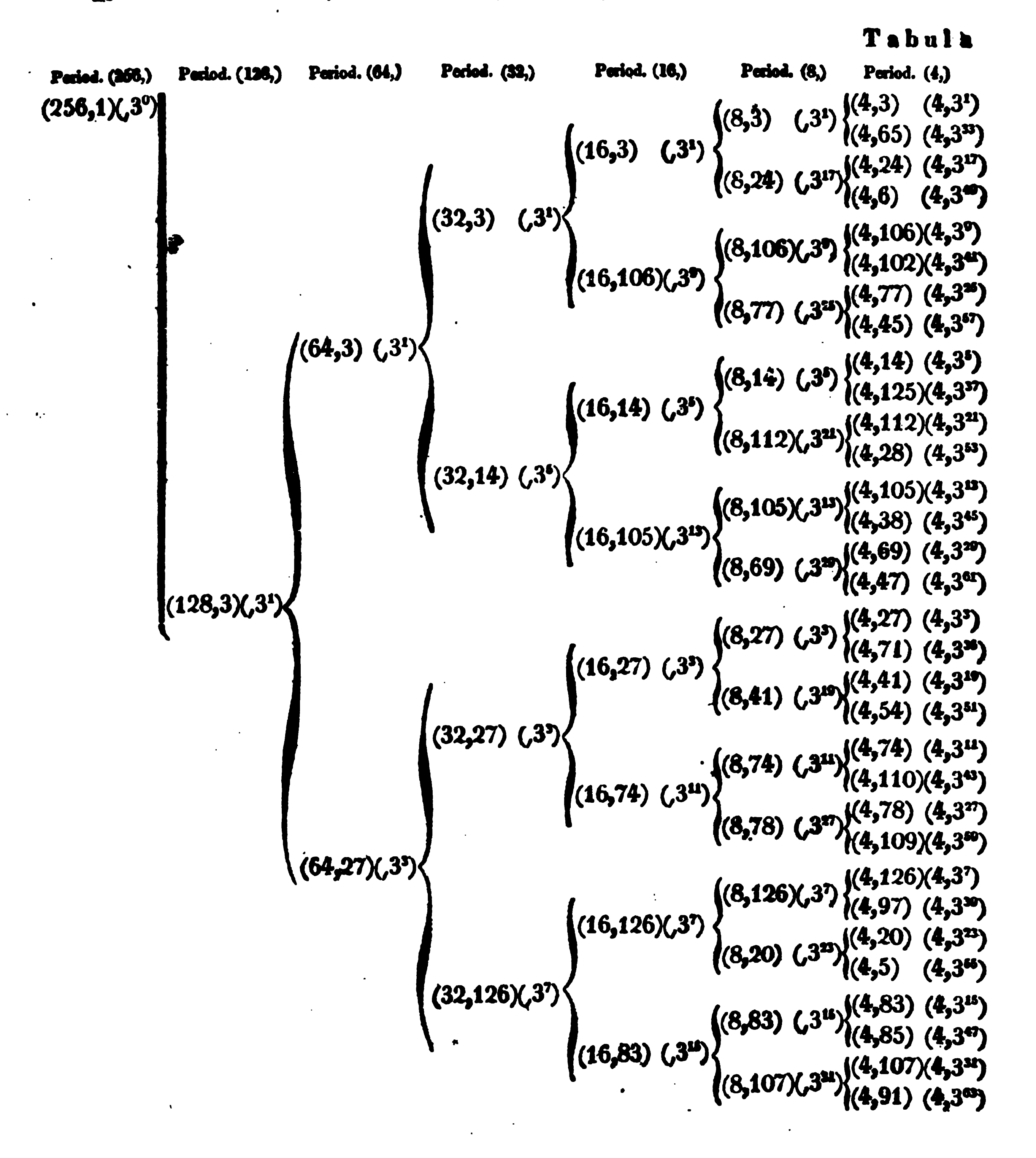


Period. (256,)	Period. (128,)	Period. (64,)	Period. (32,)	Period. (16,)	Period. (8,)	Period. (4,)
$(256,1)(,3^{0})$	$(128,1)(,3^{0})$	$(64,1)(,3^{0})$	$(32,1)(,3^{0})$	$(16,1)(,3^{0})$	$(8,1)(,3^{0})$	$(4,1)(4,3^{0})$
						$(4,64)(4,3^{32})$
					$(8,8)(,3^{16})$	$(4,8)(4,3^{16})$
						$(4,2)(4,3^{48})$
				$(16,121)(,3^{8})$	$(8,121)(,3^{8})$	$(4,121)(4,3^{8})$
						$(4,34)(4,3^{40})$
					$(8,60)(,3^{24})$	$(4,60)(4,3^{24})$
						$(4,15)(4,3^{56})$
			$(32,81)(,3^{4})$	$(16,81)(,3^{4})$	$(8,81)(,3^{4})$	$(4,81)(4,3^{4})$
						$(4,44)(4,3^{36})$
					$(8,123)(,3^{20})$	$(4,123)(4,3^{20})$
						$(4,95)(4,3^{52})$
				$(16,35)(,3^{12})$	$(8,35)(,3^{12})$	$(4,35)(4,3^{12})$
						$(4,73)(4,3^{44})$
					$(8,23)(,3^{28})$	$(4,23)(4,3^{28})$
						$(4,70)(4,3^{60})$
		$(64,9)(,3^{2})$	$(32,9)(,3^{2})$	$(16,9)(,3^{2})$	$(8,9)(,3^{2})$	$(4,9)(4,3^{2})$
						$(4,62)(4,3^{34})$
					$(8,72)(,3^{18})$	$(4,72)(4,3^{18})$
						$(4,18)(4,3^{50})$
				$(16,61)(,3^{10})$	$(8,61)(,3^{10})$	$(4,61)(4,3^{10})$
						$(4,49)(4,3^{42})$
					$(8,26)(,3^{26})$	$(4,26)(4,3^{26})$
						$(4,122)(4,3^{58})$
			$(32,42)(,3^{6})$	$(16,42)(,3^{6})$	$(8,42)(,3^{6})$	$(4,42)(4,3^{6})$
						$(4,118)(4,3^{38}$
					$(8,79)(,3^{22})$	$(4,79)(4,3^{22}$
						$(4,84)(4,3^{54}$
				$(16,58)(,3^{14})$	$(8,58)(,3^{14})$	$(4,58)(4,3^{14}$
						$(4,114)(4,3^{46}$
					$(8,50)(,3^{30})$	$(4,50)(4,3^{30}$
						$(4,116)(4,3^{62}$

secunda.

	Period. (2,)		Radices.			Period. (2,)		Radices.	
(2,1)	$2\cos\mu$	$(2,3^{0})$	(1)	(256)	(2,16)	$2\cos 16\mu$	$(2,3^{64})$	(16)	(241)
(2,64)	$2\cos 64\mu$	$(2,3^{32})$	(64)	(193)	(2,4)	$2\cos 4\mu$	$(2,3^{96})$	(4)	(253)
(2,8)	$2\cos 8\mu$	$(2,3^{16})$	(8)	(249)	(2,128)	$2\cos 128\mu$	$(2,3^{80})$	(128)	(129)
(2,2)	$2\cos 2\mu$	$(2,3^{48})$	(2)	(255)	(2,32)	$2\cos 32\mu$	$(2,3^{112})$	(32)	(225)
(2,121)	$2\cos 121\mu$	$(2,3^{8})$	(121)	(136)	(2,120)	$2\cos 120\mu$	$(2,3^{72})$	(120)	(137)
(2,34)	$2\cos 34\mu$	$(2,3^{40})$	(34)	(223)	(2,30)	$2\cos 30\mu$	$(2,3^{104})$	(30)	(227)
(2,60)	$2\cos 60\mu$	$(2,3^{24})$	(60)	(197)	(2,68)	$2\cos 68\mu$	$(2,3^{88})$	(68)	(189)
(2,15)	$2\cos 15\mu$	$(2,3^{56})$	(15)	(242)	(2,17)	$2\cos 17\mu$	$(2,3^{120})$	(17)	(240)
(2,81)	$2\cos 81\mu$	$(2,3^{4})$	(81)	(176)	(2,11)	$2\cos 11\mu$	$(2,3^{68})$	(11)	(246)
(2,44)	$2\cos 44\mu$	$(2,3^{36})$	(44)	(213)	(2,67)	$2\cos 67\mu$	$(2,3^{100})$	(67)	(190)
(2,123)	$2\cos 123\mu$	$(2,3^{20})$	(123)	(134)	(2,88)	$2\cos 88\mu$	$(2,3^{84})$	(88)	(169)
(2,95)	$2\cos 95\mu$	$(2,3^{52})$	(95)	(162)	(2,22)	$2\cos 22\mu$	$(2,3^{116})$	(22)	(235)
(2,35)	$2\cos 35\mu$	$(2,3^{12})$	(35)	(222)	(2,46)	$2\cos 46\mu$	$(2,3^{76})$	(46)	(211)
(2,73)	$2\cos 73\mu$	$(2,3^{44})$	(73)	(184)	(2,117)	$2\cos 117\mu$	$(2,3^{108})$	(117)	(140)
(2,23)	$2\cos 23\mu$	$(2,3^{28})$	(23)	(234)	(2,111)	$2\cos 111\mu$	$(2,3^{92})$	(111)	(146)
(2,70)	$2\cos 70\mu$	$(2,3^{60})$	(70)	(187)	(2,92)	$2\cos 92\mu$	$(2,3^{124})$	(92)	(165)
(2,9)	$2\cos 9\mu$	$(2,3^{2})$	(9)	(248)	(2,113)	$2\cos 113\mu$	$(2,3^{66})$	(113)	(144)
(2,62)	$2\cos 62\mu$	$(2,3^{34})$	(62)	(195)	(2,36)	$2\cos 36\mu$	$(2,3^{98})$	(36)	(221)
(2,72)	$2\cos 72\mu$	$(2,3^{18})$	(72)	(185)	(2,124)	$2\cos 124\mu$	$(2,3^{82})$	(124)	(133)
(2,18)	$2\cos 18\mu$	$(2,3^{50})$	(18)	(239)	(2,31)	$2\cos 31\mu$	$(2,3^{114})$	(31)	(226)
(2,61)	$2\cos 61\mu$	$(2,3^{10})$	(61)	(196)	(2,52)	$2\cos 52\mu$	$(2,3^{74})$	(52)	(205)
(2,49)	$2\cos 49\mu$	$(2,3^{42})$	(49)	(208)	(2,13)	$2\cos 13\mu$	$(2,3^{106})$	(13)	(244)
(2,26)	$2\cos 26\mu$	$(2,3^{26})$	(26)	(231)	(2,98)	$2\cos 98\mu$	$(2,3^{90})$	(98)	(159)
(2,122)	$2\cos 122\mu$	$(2,3^{58})$	(122)	(135)	(2,104)	$2\cos 104\mu$	$(2,3^{122})$	(104)	(153)
(2,42)	$2\cos 42\mu$	$(2,3^{6})$	(42)	(215)	(2,99)	$2\cos 99\mu$	$(2,3^{70})$	(99)	(158)
(2,118)	$2\cos 118\mu$	$(2,3^{38})$	(118)	(139)	(2,89)	$2\cos 89\mu$	$(2,3^{102})$	(89)	(168)
(2,79)	$2\cos 79\mu$	$(2,3^{22})$	(79)	(178)	(2,21)	$2\cos 21\mu$	$(2,3^{86})$	(21)	(236)
(2,84)	$2\cos 84\mu$	$(2,3^{54})$	(84)	(173)	(2,59)	$2\cos 59\mu$	$(2,3^{118})$	(59)	(198)
(2,58)	$2\cos 58\mu$	$(2,3^{14})$	(58)	(199)	(2,100)	$2\cos 100\mu$	$(2,3^{78})$	(100)	(157)
(2,114)	$2\cos 114\mu$	$(2,3^{46})$	(114)	(143)	(2,25)	$2\cos 25\mu$	$(2,3^{110})$	(25)	(232)
(2,50)	$2\cos 50\mu$	$(2,3^{30})$	(50)	(207)	(2,29)	$2\cos 29\mu$	$(2,3^{94})$	(29)	(228)
(2,116)	$2\cos 116\mu$	$(2,3^{62})$	(116)	(141)	(2,57)	$2\cos 57\mu$	$(2,3^{126})$	(57)	(200)

Tabula



Period. (256,)	Period. (128,)	Period. (64,)	Period. (32,)	Period. (16,)	Period. (8,)	Period. (4,)
(256,1)(,3^0)	(128,3)(,3^1)	(64,3) (,3^1)	(32,3) (,3^1)	(16,3) (,3^1)	(8,3) (,3^1)	(4,3) (4,3^1)
						(4,65) (4,3^{33})
					(8,24) (,3^{17})	(4,24) (4,3^{17})
						(4,6) (4,3^{49})
				(16,106)(,3^9)	(8,106)(,3^9)	(4,106)(4,3^9)
						(4,102)(4,3^{41})
					(8,77) (,3^{25})	(4,77) (4,3^{25})
						(4,45) (4,3^{57})
			(32,14) (,3^5)	(16,14) (,3^5)	(8,14) (,3^5)	(4,14) (4,3^5)
						(4,125)(4,3^{37})
					(8,112)(,3^{21})	(4,112)(4,3^{21})
						(4,28) (4,3^{53})
				(16,105)(,3^{13})	(8,105)(,3^{13})	(4,105)(4,3^{13})
						(4,38) (4,3^{45})
					(8,69) (,3^{29})	(4,69) (4,3^{29})
						(4,47) (4,3^{61})
		(64,27)(,3^3)	(32,27) (,3^3)	(16,27) (,3^3)	(8,27) (,3^3)	(4,27) (4,3^3)
						(4,71) (4,3^{35})
					(8,41) (,3^{19})	(4,41) (4,3^{19})
						(4,54) (4,3^{51})
				(16,74) (,3^{11})	(8,74) (,3^{11})	(4,74) (4,3^{11})
						(4,110)(4,3^{43})
					(8,78) (,3^{27})	(4,78) (4,3^{27})
						(4,109)(4,3^{59})
			(32,126)(,3^7)	(16,126)(,3^7)	(8,126)(,3^7)	(4,126)(4,3^7)
						(4,97) (4,3^{39})
					(8,20) (,3^{23})	(4,20) (4,3^{23})
						(4,5) (4,3^{55})
				(16,83) (,3^{15})	(8,83) (,3^{15})	(4,83) (4,3^{15})
						(4,85) (4,3^{47})
					(8,107)(,3^{31})	(4,107)(4,3^{31})
						(4,91) (4,3^{63})

secunda.

Period. (2,)			Radices.		Period. (2,)			Radices.	
(2,3)	$2\cos 3\mu$	$(2,3^{1})$	(3)	(254)	(2,48)	$2\cos 48\mu$	$(2,3^{65})$	(48)	(209)
(2,65)	$2\cos 65\mu$	$(2,3^{33})$	(65)	(192)	(2,12)	$2\cos 12\mu$	$(2,3^{97})$	(12)	(245)
(2,24)	$2\cos 24\mu$	$(2,3^{17})$	(24)	(233)	(2,127)	$2\cos 127\mu$	$(2,3^{81})$	(127)	(130)
(2,6)	$2\cos 6\mu$	$(2,3^{49})$	(6)	(251)	(2,96)	$2\cos 96\mu$	$(2,3^{113})$	(96)	(161)
(2,106)	$2\cos 106\mu$	$(2,3^{9})$	(106)	(151)	(2,103)	$2\cos 103\mu$	$(2,3^{73})$	(103)	(154)
(2,102)	$2\cos 102\mu$	$(2,3^{41})$	(102)	(155)	(2,90)	$2\cos 90\mu$	$(2,3^{105})$	(90)	(167)
(2,77)	$2\cos 77\mu$	$(2,3^{25})$	(77)	(180)	(2,53)	$2\cos 53\mu$	$(2,3^{89})$	(53)	(204)
(2,45)	$2\cos 45\mu$	$(2,3^{57})$	(45)	(212)	(2,51)	$2\cos 51\mu$	$(2,3^{121})$	(51)	(206)
(2,14)	$2\cos 14\mu$	$(2,3^{5})$	(14)	(243)	(2,33)	$2\cos 33\mu$	$(2,3^{69})$	(33)	(224)
(2,125)	$2\cos 125\mu$	$(2,3^{37})$	(125)	(132)	(2,56)	$2\cos 56\mu$	$(2,3^{101})$	(56)	(201)
(2,112)	$2\cos 112\mu$	$(2,3^{21})$	(112)	(145)	(2,7)	$2\cos 7\mu$	$(2,3^{85})$	(7)	(250)
(2,28)	$2\cos 28\mu$	$(2,3^{53})$	(28)	(229)	(2,66)	$2\cos 66\mu$	$(2,3^{117})$	(66)	(191)
(2,105)	$2\cos 105\mu$	$(2,3^{13})$	(105)	(152)	(2,119)	$2\cos 119\mu$	$(2,3^{77})$	(119)	(138)
(2,38)	$2\cos 38\mu$	$(2,3^{45})$	(38)	(219)	(2,94)	$2\cos 94\mu$	$(2,3^{109})$	(94)	(163)
(2,69)	$2\cos 69\mu$	$(2,3^{29})$	(69)	(188)	(2,76)	$2\cos 76\mu$	$(2,3^{93})$	(76)	(181)
(2,47)	$2\cos 47\mu$	$(2,3^{61})$	(47)	(210)	(2,19)	$2\cos 19\mu$	$(2,3^{125})$	(19)	(238)
(2,27)	$2\cos 27\mu$	$(2,3^{3})$	(27)	(230)	(2,82)	$2\cos 82\mu$	$(2,3^{67})$	(82)	(175)
(2,71)	$2\cos 71\mu$	$(2,3^{35})$	(71)	(186)	(2,108)	$2\cos 108\mu$	$(2,3^{99})$	(108)	(149)
(2,41)	$2\cos 41\mu$	$(2,3^{19})$	(41)	(216)	(2,115)	$2\cos 115\mu$	$(2,3^{83})$	(115)	(142)
(2,54)	$2\cos 54\mu$	$(2,3^{51})$	(54)	(203)	(2,93)	$2\cos 93\mu$	$(2,3^{115})$	(93)	(164)
(2,74)	$2\cos 74\mu$	$(2,3^{11})$	(74)	(183)	(2,101)	$2\cos 101\mu$	$(2,3^{75})$	(101)	(156)
(2,110)	$2\cos 110\mu$	$(2,3^{43})$	(110)	(147)	(2,39)	$2\cos 39\mu$	$(2,3^{107})$	(39)	(218)
(2,78)	$2\cos 78\mu$	$(2,3^{27})$	(78)	(179)	(2,37)	$2\cos 37\mu$	$(2,3^{91})$	(37)	(220)
(2,109)	$2\cos 109\mu$	$(2,3^{59})$	(109)	(148)	(2,55)	$2\cos 55\mu$	$(2,3^{123})$	(55)	(202)
(2,126)	$2\cos 126\mu$	$(2,3^{7})$	(126)	(131)	(2,40)	$2\cos 40\mu$	$(2,3^{71})$	(40)	(217)
(2,97)	$2\cos 97\mu$	$(2,3^{39})$	(97)	(160)	(2,10)	$2\cos 10\mu$	$(2,3^{103})$	(10)	(247)
(2,20)	$2\cos 20\mu$	$(2,3^{23})$	(20)	(237)	(2,63)	$2\cos 63\mu$	$(2,3^{87})$	(63)	(194)
(2,5)	$2\cos 5\mu$	$(2,3^{55})$	(5)	(252)	(2,80)	$2\cos 80\mu$	$(2,3^{119})$	(80)	(177)
(2,83)	$2\cos 83\mu$	$(2,3^{16})$	(83)	(174)	(2,43)	$2\cos 43\mu$	$(2,3^{79})$	(43)	(214)
(2,85)	$2\cos 85\mu$	$(2,3^{47})$	(85)	(172)	(2,75)	$2\cos 75\mu$	$(2,3^{111})$	(75)	(182)
(2,107)	$2\cos 107\mu$	$(2,3^{31})$	(107)	(150)	(2,87)	$2\cos 87\mu$	$(2,3^{95})$	(87)	(170)
(2,91)	$2\cos 91\mu$	$(2,3^{63})$	(91)	(166)	(2,86)	$2\cos 86\mu$	$(2,3^{127})$	(86)	(171)

IV.

Tota problematis solutio eo ducta est, ut ad valores

$$(2,1)\ (2,2)\ \text{etc.}\ \ldots\ (2,128)$$

definiendos, primum aequationem quadraticam, cuius radices sint aggregata $(128,1)$ et $(128,3)$, quarum summa $=(256,1)=-1$ iam nota est, ipsa inveniamus, quibus adjuti aequationes duas, quarum radices sint $(64,1)\,(64,9)$ et $(64,3)\,(64,27)$ proponamus, ceterasque periodos aequationibus eiusdem ordinis exprimamus; in qua via progressi ad valores ipsos $(2,1)\ (2,2)$ etc. perveniamus necesse est.

Quarum aequationum ambae priores *a priori* inveniuntur illa $X^2+X-64=0$ (Legendre *théorie des nombres* (*édition de* 1830) (509)) hae

$$Y^2+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{257})\,Y-16+16\sqrt{257}-C\sqrt{257}=0 \quad \text{et}$$

$$Y^2+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{257})\,Y-16-16\sqrt{257}+C\sqrt{257}=0 \quad \text{(ibidem 521)},$$

ita ut

$$C=\frac{128+1\pm a}{8}$$ sit, ubi $257=a^2+16\,b^2$, cui conditioni una sola ratione satisfieri potest, nimirum $a=1$, $b=16$; fit igitur:

$$C=16,$$

unde eveniunt duae aequationes desideratae:

$$Y^2+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{257})\,Y-16=0,$$

$$Y^2+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{257})\,Y-16=0.$$

Haud ineptum esse credo, si alium utriusque aequationis construendae fontem afferam, ex theoria residuorum biquadraticorum emanantem. In commentationum Goettingensium recentiorum volumine sexto invenis in commentatione: „theoria residuorum biquadraticorum auctore Gaufs" art. 8., quatuor classes residuorum minimorum A, B, C, D nominatas, quae fiunt in nostro exemplo

$$A=(1)\,(3^4)\ldots\ (3^{252})=(64,1),$$

$$B=(3)\,(3^5)\ldots\ (3^{253})=(64,3),$$

$$C=(3^2)(3^6)\ldots\ (3^{254})=(64,9),$$

$$D=(3^3)(3^7)\ldots\ (3^{255})=(64,27).$$

Per f denotato residuo minimo potestatis $3^{\frac{1}{4}(256)}$ secundum modulum 257 e tabula f invenitur $\equiv 3^{64}\,(257)=241$.

Inde sequitur hoc criterium diiudicandi, ad quam quatuor classium numerus datus k per 257 non divisibilis referendus sit: pertinebit scilicet k ad $(64,1)\ (64,3)\ (64,9)\ (64,27)$ prout potestas k^{64} secundum modulum 257

numero 1, 241, —1, vel —241 congrua evadit. Art. 15 ibidem multitudine numerorum e complexu (64,1), quos immediate sequitur numerus e complexu (64, 1) (64, 3) (64, 9) (64, 27) respective designata per (00) (01) (02) (03) similiter in complexu (64,3) illa multitudine designata per (10) (11) (12) (13)
in complexu (64, 9) . . . . (20) (21) (22) (23)
in complexu (64, 27) . . . . (30) (31) (32) (33),
usque ad art. 18 evictae sunt formulae hae: (si pro p substituatur 257)

$$16\,(20) = 257 + 2a - 3,$$
$$16\,(21) = 257 - 2a,$$
$$16\,(22) = 257 + 2a - 3,$$
$$16\,(23) = 257 - 2a + 1,$$

ubi numerus a talis impar est, ut

$$257 = a^2 + b^2,$$

quod unico tantum modo fieri posse constat, nimirum $a = 1$, $b = 16$.

Hinc evenit:

$$(20) = 16,$$
$$(21) = 16,$$
$$(22) = 16,$$
$$(23) = 16.$$

Iam vero aequationes quadraticae duae, quarum radices sunt (64, 1) et (64, 3), (64,3) et (64,27) fiunt:

$$Y^2 - ((64,1) + (64,\ 9))\,Y + (64,1)\,(64,\ 9) = 0,$$
$$Y^2 - ((64,3) + (64,27))\,Y + (64,3)\,(64,27) = 0,$$
$$(64,1) + (64,\ 9) = (128,1),$$
$$(64,3) + (64,27) = (128,3).$$

Per praecepta sectionis septimae disq. constat esse

$$(64,1)(64,9) = (64,3^2+1) + (64,3^6+1) + (64,3^{10}+1) + \text{etc.} + (64,3^{254}+1),$$
$$= (20)(64,1) + (21)(64,3) + (22)(64,9) + (23)(64,27) = +16(256,1)$$
$$= -16, \text{ unde}$$

$$(64,3)(64,27) = 16(256,3) = -16.$$

Inde fluunt aequationes eaedem ac antea,

$$Y^2 - (128,1)\,Y - 16 = 0,$$
$$Y^2 - (128,3)\,Y - 16 = 0.$$

Utraque aequatione coniuncta, efficitur haec quarti ordinis aequatio:

$$Y^4 + Y^3 - 96\,Y^2 - 16\,Y + 256 = 0,$$

cuius aequationis coefficientes respective congruentes esse coefficientibus

expressionis evolutae $\left(Y-\frac{256}{4}\right)^4$, secundum modulum 257, notum est. Haec aequatio quarti ordinis etiam ex generali forma ipsius derivari potest, quae pro numero primo $8\mu+1=n$ valet haec:

$$Y^4+Y^3-3\mu Y^2+(4\mu^2-nC)Y+\tfrac{1}{4}\mu^2-n(\tfrac{1}{2}\mu-C)^2=0$$

ubi C et n haec significant:

$$C=\frac{4\mu+1\pm a}{8},\quad n=a^2+16b^2.$$

Ceteras vero aequationes quadraticas, quibus periodi sequentes determinantur haud *a priori* propositas, adiumento tabulae secundae inveni. Hac ratione aequatio, cuius radices sunt (32, 1) et (32, 81), est

$$X^2-(64,1)X+(32,1)(32,81)=0.$$

Est vero ex notissimo theoremate disquisitionum arithmeticarum:

$(32,1)(32,81)=(32,3^4+1)+(32,3^{12}+1)+(32,3^{16}+1)$ etc. $+(32,3^{252}+1)$

sive potius e tabula secunda:

$$(32,1)(32,81)=\left\{\begin{matrix}(32,\ 81+1) & (32,176+1) & (32,\ 11+1) & (32,246+1)\\ (32,\ 44+1) & (32,213+1) & (32,\ 67+1) & (32,190+1)\\ (32,123+1) & (32,134+1) & (32,\ 88+1) & (32,169+1)\\ (32,\ 95+1) & (32,162+1) & (32,\ 22+1) & (32,235+1)\\ (32,\ 35+1) & (32,222+1) & (32,\ 46+1) & (32,211+1)\\ (32,\ 73+1) & (32,184+1) & (32,117+1) & (32,140+1)\\ (32,\ 23+1) & (32,234+1) & (32,111+1) & (32,146+1)\\ (32,\ 70+1) & (32,187+1) & (32,\ 92+1) & (32,165+1)\end{matrix}\right\}.$$

Quae aggregata, per tabulam secundam, ad quam periodum formae (32,) singula pertineant, facile diiudicari potest; nimirum radices singulae illae ad (32,81) pertinentes, numero 1 auctae, inter omnes radices investigentur, periodus formae (32,) ubi singula inveniatur talis radix, denotetur, ita ut, quot inter omnes periodos

$$(32,3^4+1)\ (32,3^{12}+1)\ \text{etc.}\quad (32,3^{252}+1)$$

ad singulam octo periodorum formae (32,) adnumerentur, definiatur; unde fiat

$$(32,1)(32,81)=A(32,1)+B(32,81)+C(32,9)+D(32,42)+E(32,3)$$
$$+F(32,14)+G(32+27)+H(32,126),$$

ubi A, B, C, D, E, F, G, H integros significant numeros.

Quia vero (32,1) (32,81) functio invariabilis quantitatum (32,1) et (32,81) omnium igitur aggregatorum ad (64,1) pertinentium est, etiam eas periodos (32,) in isto producto quae sub eadem periodo (64,) contentae sunt coefficientes eosdem habituras esse sequitur (disq. arith. 350).

Hanc ob rem fit

$$A=B,\quad C=D,\quad E=F,\quad G=H,$$

adeoque

$$(32,1)(32,81) = A(64,1)+C(64,9)+E(64,3)+G(64,27).$$

Quae cum ita sint, tabulae secundae adiumento productum (32,1) (32,81), nec non igitur uterque coefficiens aequationis quadraticae, cuius radices (32,1) et (32,81) sunt, per periodos formae (64,) quae iam antea determinatae fuerunt expressus est. Simili structura adiumentoque eodem tabulae secundae in productis construendis his,

$$\begin{array}{c}(16,1).(16,121),\\ (8,1).(8,8),\\ (4,1).(4,64),\\ (2,1).(2,16),\\ (1).(256),\end{array}$$

invenitur

$$(16,1).(16,121)=\begin{Bmatrix}(16,121+1)+(16,136+1)+(16,120+1)+(16,137+1)\\ (16,\ 34+1)+(16,223+1)+(16,\ 30+1)+(16,227+1)\\ (16,\ 60+1)+(16,197+1)+(16,\ 68+1)+(16,189+1)\\ (16,\ 15+1)+(16,242+1)+(16,\ 14+1)+(16,240+1)\end{Bmatrix}.$$

$$(8,1).(8,8)=\begin{Bmatrix}(8,8+1)+(8,249+1)+(8,\ 32+1)+(8,129+1)\\ (8,2+1)+(8,255+1)+(8,128+1)+(8,225+1)\end{Bmatrix}.$$

$$(4,1).(4,64) = \{(4,64+1)+(4,193+1)+(4,\ 4+1)+(4,253+1)\}.$$

$$(2,1).(2,16) = \{(2,16+1)+(2,241+1)\}.$$

$$(1).(256) = \{(257)\} = 1.$$

Unde emergunt tabula secunda adhibita, nec non his aequationibus introductis:

$$-1=(256,1)=(128,1)+(128,3),$$

$$(128,1)=(64,1)+(64,9),\quad (128,3)=(64,3)+(64,27),$$

$$(64,1)=(32,1)+(32,81),\quad (64,9)=(32,9)+(32,42),\quad (64,3)=(32,3)+(32,14),$$

$$(64,27)=(32,27)+(32,126),$$

etc.

hae aequationes quadraticae:

$X'^2+X'-64=0$	cuius radices (128,1) et (128,3),
$X''^2-(128,1)X''-16=0$	- - (64,1) et (64,9),
$X'''^2-(64,1)X'''+5+3(64,1)+(64,9)=0$	- - (32,1) et (32,81),
$X^{\text{IV}2}-(32,1)X^{\text{IV}}+((128,1)+(32,1)+(32,9)+2(32,14))=0$	- - (16,1) et (16,121),
$X^{\text{V}2}-(16,1)X^{\text{V}}+(16,1)+(16,9)+(16,3)+(16,14)=0$	- - (8,1) et (8,8),

$X^{\text{VI}2} - (8,1)\, X^{\text{VI}} + (8,3) + (8,20) = 0$ cuius radices (4,1) et (4,64),
$X^{\text{VII}2} - (4,1)\, X^{\text{VII}} + (4,15) = 0$ - - (2,1) et (2,16),
$X^{\text{VIII}2} - (2,1)\, X^{\text{VIII}} + 1 = 0$ - - (1) et (256).

V.

Cum per (128,1), (64,1), (32,1), (16,1), (8,1), (4,1), (2,1), (1) utracunque radix singulae aequationis huc pertinentis designari possit, semper supponere licet, ne ambiguitas oriatur, maiorem positivum valorem loco valorum (64,1) (32,1) (16,1) etc. respective *).

Ceterae quidem periodi omnes aut prorsus simili ratione aequationibus quadraticis determinari, aut rationaliter ex illis prioribus, secundum praescripta art. 346 disquisitionum arithmeticarum, deduci possunt. Illic vero utra earum singularum aequationum radix singulorum valorum loco supponenda sit, cum iam periodis (64,1) (32,1) etc. suppositis, non amplius arbitrio diiudicari possit, in novas labimur disquisitiones hic contortissimo illigamur calculo. Hanc ob rem ad aliud confugiendum est artificium, nunc accuratius declarandum.

Primum aggregatis (64,1) (64,9) determinatis, inde (64,3) (64,27) invenienda sint: hanc ob rem productum hoc evolvatur:

$$\{(64,1)-(64,9)\}\,\{(64,3)-(64,27)\}$$
$$= (64,1)(64,3)-(64,3)(64,9)+(64,9)(64,27)-(64,27)(64,1).$$

Sit vero:

$$(64,1)(64,3) = \alpha(64,1)+\beta(64,9)+\gamma(64,3)+\delta(64,27).$$

Iam inde secundum praescripta art. (335, IV.) disq. arith. derivatur:

$$(64,\lambda)(64,3\lambda) = \alpha(64,\lambda)+\beta(64,9\lambda)+\gamma(64,3\lambda)+\delta(64,27\lambda);$$

hanc ob rem habemus

$$(64,9)\,(64,27) = \alpha(64,9)+\beta(64,1)+\gamma(64,27)+\delta(64,3),$$

inde

$$(64,1)(64,3)+(64,9)(64,27) = (\alpha+\beta)((64,1)+(64,9))+(\gamma+\delta)((64,3)+(64,27))$$
$$= (\alpha+\beta)(128,1)+(\gamma+\delta)(128,3),$$

*) Qua suppositione facta tandem ad $(2,1) = 2\cos\frac{2\pi}{257}$ fore, inveniemus. Huius theorematis demonstratio vero in numero difficillimarum ponenda videtur; atque nihil de hac re hic adiiciatur, nisi quod, si pro $\left(\frac{p-1}{2}, 1\right)$ maiorem positivam radicem ponamus, inter $\frac{p-1}{2}$ valores ad $\left(\frac{p-1}{2}, 1\right)$ pertinentes etiam: $\cos\frac{2\pi}{p} \pm \sin\frac{2\pi}{p}$ semper inveniri, a cl. Gauſs demonstratum esse.

qua re secundum eadem praescripta

$$-(64,3)(64,9)-(64,27)(64,1) = -(\alpha+\beta)(128,3)-(\gamma+\delta)(128,1),$$

unde

$$((64,1)-(64,9))((64,3)-(64,27)) = \{\alpha+\beta-\gamma-\delta\}\{(128,1)-(128,3)\}$$

Hinc emanat formula:

$$(64,3)-(64,27) = ((\alpha+\beta)-(\gamma+\delta))\frac{((128,1)-(128,3))}{(64,1)-(64,9)};$$

iam notum est

$$(64,3)+(64,27) = 128,3,$$

unde determinantur (64,3) et (64,27), per quantitates iam determinatas (128,1), (128,3), (64,1), (64,9).

E tabula secunda invenitur praescripta ratione $\alpha = 20$, $\beta = 16$, $\gamma = 12$, $\delta = 16$, unde

$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta) = 8.$$

Aggregatis (32,1) et (32,81) suppositis ceterarum periodarum valores sequenti via eliciuntur.

Primum vero propositio haec demonstretur:

Productum $((32,1)-(32,81))((32,m)-(32,n))$, si $(32,m)$ et $(32,n)$ ad unam pertineant periodum formae (64,) semper per solas periodos formae (64,) itaque per iam notas quantitates exprimi posse.

Demonstratio: Sit $(32,m) = (32,3^\mu)$, iam e conditione proposita fit $(32,n) = (32,3^\mu.81) = 32.3^{\mu+4}$; unde illud productum evolutum fit

$$(32,1)(32,3^\mu)+(32,3^4)(32,3^{\mu+4})-(32,3^4)(32,3^\mu)-(32,1)(32,3^{\mu+4}).$$

Sit

$$(32,1)(32,3^\mu) =$$
$$\alpha(32,1)+\beta(32,81)+\gamma(32,9)+\delta(32,42)+\varepsilon(32,3)+\zeta(32,14)+\eta(32,27)+\vartheta(32,126),$$

inde

$$(32,3^4)(32,3^{\mu+4}) =$$
$$\alpha(32,81)+\beta(32,1)+\gamma(32,42)+\delta(32,9)+\varepsilon(32,14)+\zeta(32,3)+\eta(32,126)+\vartheta(32,27).$$

Quae si coniungantur, emergit

$$-(32,1)(32,3^\mu)+(32,3^4)(32,3^{\mu+4})$$
$$= (\alpha+\beta)(64,1)+(\gamma+\delta)(64,9)+(\varepsilon+\zeta)(64,3)+(\eta+\vartheta)(64,27).$$

Eadem ratione sit

$$-(32,3^4)(32,3^\mu) = -\alpha'(32,1)-\beta'(32,81)-\gamma'(32,9)-\delta'(32,42)-\varepsilon'(32,3)$$
$$-\zeta'(32,14)-\eta'(32,27)-\vartheta'(32,126),$$

inde emergit

$$-(32,1)(32,3^{\mu+4})-(32,3^4)(32,3^\mu)$$
$$= -(\alpha'+\beta')(64,1)-(\gamma'+\delta')(64,9)-(\varepsilon'+\zeta')(64,3)-(\eta'+\vartheta')(64,27).$$

Ita ut habeatur:

$$((32,1)-(32,81))((32,m)-(32,n)) = (\alpha+\beta-(\alpha'+\beta'))(64,1)$$
$$+(\gamma+\delta-(\gamma'+\delta'))(64,9)$$
$$+(\varepsilon+\zeta-(\varepsilon'+\zeta'))(64,3)$$
$$+(\eta+\vartheta-(\eta'+\vartheta'))\,64,27$$

q. e. d.

Si speciatim est $\mu=2$:

fit:

$$-(32,3^{\mu})(32,3^{\nu})$$
$$=-(32,3^{\nu})(32,3^{\mu}) = -\alpha(32,9)-\beta(32,42)-\gamma(32,1)-\delta(32,81)$$
$$-\varepsilon(32,27)-\zeta(32,126)-\eta(32,3)-\vartheta(32,14),$$

unde:

$\alpha'=\gamma$, $\beta'=\delta$, $\gamma'=\alpha$, $\delta'=\beta$, $\varepsilon'=\eta$, $\zeta'=\vartheta$, $\eta'=\varepsilon$, $\vartheta'=\zeta$ eveniunt, hanc ob rem

$$((32,1)-(32,81))(32,m-32,n)$$
$$=((\alpha+\beta)-(\gamma+\delta))(64,1-64,9)+((\varepsilon+\zeta)-(\eta+\vartheta))((64,3)-(64,27)),$$

in hoc speciali casu per quantitates non minus iam determinatas $(64,1-64,9)$ $(64,3-64,27)$ determinari possunt.

Hac quidem via per opem tabulae secundae invenis:

$$((32,3)-(32,14)) = -\frac{2((64,1)-(64,3))}{(32,1)-(32,81)},$$

$$((33,9)-(32,42)) = \frac{4((64,1)-(64,9)+(64,3)-(64,27))}{(32,1)-(32,81)},$$

unde iam sponte sequitur:

$$((32,27)-(32,126)) = \frac{4((64,3)-(64,27)+(64,9)-(64,1))}{(32,3)-(32,14)}$$

Quantitatibus

$$(32,3)+(32,14) = (64,3),$$
$$(32,9)+(32,42) = (64,9),$$
$$(32,27)+(32,126) = (64,27),$$

iam determinatis, ipsi valores aggregatorum (32,3), (32,14), (32,9), (32,42) (32,27), (32,126) facillime ex ipsorum summa et differentia emergunt. Prorsus simili ratione omnes periodi eliciuntur 16 terminorum, ibidem eadem valente propositione, ut si $16,m$ et $16,n$ ad eandem pertineant periodum 32 terminorum, productum:

$$(16,1-16,35)\ (16,m-16,n),$$

per solas periodos 32 terminorum, itaque iam antea determinatorum, exprimi possit. Quae propositio eodem modo demonstranda ac antea casum

specialem secum fert $m = 3^4 = 81$ sive $\mu = 4$, ubi productum igitur illud, adeo per quantitates

$$((32,1)-(32,81)),\quad ((32,9)-(32,42))\ \text{etc.}$$

exprimi potest.

Hanc ob rem e tabula secunda computandae sunt hae quatuor quantitates:

$$1.\quad ((16,1)-(16,121))((16,9)-(16,61))$$
$$= 2(64,1)+(128,3)-2(32,42)-6(32,3),$$
$$2.\quad ((16,1-16,121))((16,3-16,106))$$
$$= 4(32,1)+(32,81)-(64,9)-2(32,3)+(32,14)-3(32,27)+(32,126),$$
$$3.\quad ((16,1-16,121))((16,27-16,74))$$
$$= (128,1)-(32,1)-(64,3)-2(32,27)+(32,126),$$
$$4.\quad ((16,1-16,121))((16,81-16,35))$$
$$= ((32,3)-(32,14))-3((32,27)-(32,126));$$

ex 4 sponte fluunt, si potestatem radicis primitivae 3 adscriptarum rationem faciamus secundum praescripta articl. 345, IV. disq. arith.

$$5.\ ((16,9)-(16,61))((16,42)-(16,58)) = ((32,27)-(32,126))-3((32,14)-(32,3)),$$
$$6.\ ((16,3)-(16,106))((16,14)-(16,105)) = ((32,9)-(32,42))-3((32,81)-(32,1)),$$
$$7.\ ((16,27)-(16,74))((16,126)-(16,83)) = ((32,81)-(32,1))-3((32,42)-(32,9));$$

cum deinde quantitates

$$(16,9)+(16,61) = (32,9)$$
$$(16,3)+(16,106) = (32,3)$$
$$(16,27)+(16,74) = (32,27)$$
$$(16,81)+(16,35) = (32,81)$$

iam determinatae sunt, inde si aequationibus 1, 2, 3, 4 coniungantur, emergunt valores (16,9), (16,61), (16,3), (16,106), (16,27), (16,74), (16,81), (16,35), ex suppositis prioribus (16,1) et (16,121).

Qui valores rursus substituti in aequationibus 5, 6, 7, adhibitisque tribus aequationibus his

$$(16,42)+(16,58) = (32,42),$$
$$(16,14)+(16,105) = (32,14),$$
$$(16,126)+(16,83) = (32,126),$$

ad determinanda aggregata (16,42), (16,58), (16,14), (16,105), (16,126), (16,83), viam sternunt.

Prorsus simili ratione, duabus periodis (8,1) et (8,8) per aequationem quadraticam antea inventis, atque ne ambiguitas oriatur periodi (8,1) loco

maiore istius aequationis radice positiva supposita, octo similes quantitates ac antea 1, 2, 3, 4 ex tabula secunda computantur, ceteraeque septem inde derivantur.

Hac in via progressi sensim sensimque omnes valores periodorum tringinta duorum, sedecim, octo, quatuor, duorum terminorum invenire possumus, ita ut problema nostrum: omnes valores periodorum formae (2,) invenire, solutum videatur.

VI.

Si omnes periodi formae (2,) determinatae essent, nihil nisi cuinam quantitati formae $2\cos\frac{2\varkappa\pi}{257}$ aequalis sit singula illarum assignare reliquum remaneret, quod nimirum ita absolvi posset, ut, quae omnium periodorum (2,) summum haberet valorem positivum, ei attribuatur quantitas $2\cos\frac{2\pi}{257}$.

Quamquam vero haec directa via sine ulla ambiguitate ad problema solvendum strata esse videtur; attamen cum ibidem in computationibus difficilibus implicaremur, nec non unam tantum omnium periodorum (2,) determinare opus sit, unde ceterae omnes facile derivari possint, iam multo brevior problematis solutio, una cum computationibus huc pertinentibus statim hic proponatur.

Prima aequatio $X''+X'=64$ hos suppeditat valores $\frac{-1+\sqrt{157}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{257}}{2}$ quorum priorum statuemus $=(128,1)$, unde emergunt hi valores numerici:

$$(128,1) = \quad 7,51560979$$
$$(128,3) = -8,51560979.$$

Secunda aequatio cuius radices (64,1) et (649), haec est:

$$X''^2-(128,1).X'' = 16;$$

cuius radices sunt $\frac{(129,1)+\sqrt{((128,1)^2+64)}}{2}$ et $\frac{(128,1)-\sqrt{((128,1)^2+64)}}{2}$; rursus hic maiorem positivum valorem ponimus $=(64,1)$, id quod in omnibus sequentibus aequationibus observabitur.

Unde emergunt hi valores:

$$(64,1) = \quad 9,2460740$$
$$(64,9) = -1,7304642.$$

Porro habemus

$$(64,3)+(64,27) = (128,3),$$
$$(64,3)-(64,27) = 8\left(\frac{(128,1-128,3)}{(64,\ 1-64,\ 9)}\right),$$

unde computantur:

$$(64,3) = 1{,}5841898$$
$$(64,27) = -10{,}09979960.$$

Tertia aequatio est $X'''^2 - (64,1)X''' = 5, +3.(64,1) + (64,9)$, quarum radices fiunt:

$$(32,1) = \frac{(64,1) + \sqrt{((64,1)^2 + 4(5 + 3(64,1) + (64,9)))}}{2},$$

$$(32,81) = \frac{(64,1) - \sqrt{((64,1)^2 + 4(5 + 3(64,1) + (64,9)))}}{2},$$

sive:

$$(32,1) = 11{,}8604556$$
$$(32,81) = -2{,}6143817.$$

Porro habemus:

$$(32,9) + (32,42) = (64,9),$$

$$(32,9) - (32,42) = \frac{4((64,1) - (64,9) + (64,3) - (64,27))}{(32,1) - (32,81)},$$

ex quibus aequationibus derivantur:

$$(32,9) = 2{,}2657914$$
$$(32,42) = -3{,}9962556.$$

Deinde aequationes

$$(32,3) + (32,14) = (64,14),$$

$$(32,3) - (32,14) = \frac{-2((64,1) - (64,3))}{(32,1) - (32,81)}$$

hos suppeditant valores:

$$(32,3) = 0{,}2627706$$
$$(32,14) = -1{,}3214192.$$

Sequentes denique aequationes:

$$(32,27) + (32,126) = (64,27),$$

$$(32,27) - (32,126) = 4\frac{-(64,1) + (64,9) + (64,3) - (64,27)}{(32,3) - (32,14)},$$

dant valores hos:

$$(32,27) = -6{,}3864173$$
$$(32,126) = -3{,}7133823.$$

Quarta aequatio est:

$$X^{IV2} - (32,1)X^{IV} = -((128,1) + (32,1) + (32,9) + 2.(32,14));$$

unde determinantur:

$$(16,1) = \frac{(32,1) + \sqrt{(32,1)^2 - 4(128,1) + (32,1) + (32,9) + 2(32,14)}}{2},$$

$$(16,121) = \frac{(32,1) - \sqrt{(32,1)^2 - 4(128,1) + (32,1) + (32,9) + 2(32,14)}}{2};$$

unde emergunt hi valores numerici:

$$(16,1) = 9,229153$$
$$(16,121) = 2,631303.$$

Porro habemus:

$$(16,81) + (16,35) = (32,81),$$
$$(16,81) - (16,35) = \frac{((32,3)-(32,14)) - 3((32,27)-(32,126))}{(16,1)-(16,121)}$$

atque:

$$(16,81) = -0,779712$$
$$(16,35) = -1,834670.$$

Deinde habemus:

$$(16,9) + (16,81) = (32,9),$$
$$(16,9) - (16,61) = \frac{2.(64,1) + (128,3) - 2(32,42) - 6(32,3)}{(16,1)-(16,121)};$$

inde sequitur:

$$(16,9) = 2,375151$$
$$(16,61) = -0,109359.$$

Ex aequationibus his:

$$(16,42) + (16,58) = (32,42),$$
$$(16,42) - (16,58) = \frac{((32,27)-(32,126)) - 3((32,14)-(32,3))}{(16,9)-(16,61)},$$

computantur valores:

$$(16,42) = -3,175217$$
$$(16,58) = -0,821039.$$

Aequationes:

$$(16,3) + (16,106) = (32,3),$$
$$(16,3) - (16,106) = \frac{4(32,1) + (32,81) - (64,9) - 2(32,3) + (32,14) - 3(32,27) + (32,126)}{(16,1)-(16,136)},$$

suppeditant valores:

$$(16,3) = 4,890486$$
$$(16,106) = -4,627715.$$

Deinde habemus:

$$(16,14) + (16,105) = (32,14),$$
$$(16,14) + (16,105) = \frac{((32,9)-(32,42)) - 3((32,81)-(32,1))}{(16,3)-(16,106)},$$

unde sequuntur valores:

$$(16,14) = 3,270792$$
$$(16,105) = -1,949372.$$

Jam ex aequationibus:

$$(16,27) + (16,74) = (32,27),$$
$$(16,27) - (16,74) = \frac{(128,1) - (32,1) - (64,3) - 2(32,27) + (32,126)}{(16,1)-(16,121)},$$

emanant valores:

$$(16,27) = -2,955979$$
$$(16,74) = -3,430439.$$

Habemus denique:

$$(16,126) + (16,83) = (32,126),$$
$$(16,126) - (16,83) = \frac{((32,81) - (32,1)) - 3(32,42) - (32,9)}{(16,27) - (16,74)},$$

unde fiunt hi valores:

$$(16,126) = 2,686687$$
$$(16,83) = -6,400069.$$

Quinta aequatio quadratica haec est:

$$X^{\nu 2} - (16,1) X^{\nu} = -(16,1) - (16,9) - (16,3) - (16,14),$$

unde computantur valores:

$$(8,1) = 5,950596$$
$$(8,8) = 3,378156.$$

Ceterarum periodorum tantum eae computatae sunt, quae ad sequentes aequationes construendas adhibeantur necesse est.

Est:

$$(8,121) + (8,60) = (16,121),$$
$$(8,121) - (8,60) = \frac{-2((16,1) - (16,121)) - ((16,81) - (16,35)) - ((16,42) - (16,58))}{(8,1) - (8,8)},$$

unde fluit:

$$(8,60) = 3,721079.$$

Habemus:

$$(8,81) + (8,123) = (16,81),$$
$$(8,81) + (8,123) =$$
$$\frac{(16,121) - (16,35) - (32,9) - 2(16,42) + (32,3) + (16,14) - (16,105) + (16,27) + (16,126)}{(8,1) - (8,8)},$$

unde:

$$(8,81) = 1,947629.$$

Deinde habemus:

$$(8,9) + (8,72) = (16,9),$$
$$(8,9) - (8,72) =$$
$$\frac{-2(16,121) - (16,81) + (16,61) + (16,58) - (16,105) - (16,27) + (16,74) + 2(16,126)}{(8,1) - (8,8)},$$

inde fit:

$$(8,9) = 1,477726$$
$$(8,72) = 0,897425.$$

Ex aequationibus:

$$(8,61) + (8,26) = (16,61),$$

$$(8,61) - (8,26) = \frac{2((16,61) - (16,9)) + ((16,58) - (16,42)) + ((16,1) - (16,121))}{(8,9) - (8,72)},$$

computatur:

$$(8,61) = 2,377160.$$

Similiter ex aequationibus

$$(8,42) + (8,79) = (16,42),$$

$$(8,42) - (8,79) =$$

$$\frac{-(16,121) + (16,35) + (16,106) + (16,105) + (16,27) - (16,74) - 2(16,126) - (16,83)}{(8,1) - (8,8)},$$

derivatur:

$$(8,79) = 0,363844.$$

Ex aequationibus:

$$(8,3) + (8,24) = (16,3),$$

$$(8,3) - (8,24) = \frac{(16,1) - (16,35) + (16,61) + (16,58) + (16,105) - 3(16,126)}{(8,1) - (8,8)},$$

emanat:

$$(8,3) = 4,646327.$$

Ex aequatione:

$$(8,14) + (8,112) = (16,14),$$

$$(8,14) - (8,112) = \frac{2(16,121) - (32,81) + (16,61) - 2(16,3) - (16,27) + (16,74) + (16,126)}{(8,1) - (8,8)},$$

computatur:

$$(8,112) = 1,595182$$

$$(8,14) = 1,675610.$$

Similiter ex aequatione:

$$(8,105) + (8,69) = (16,105),$$

$$(8,105) - (8,69) = \frac{(16,3) - (16,106) - 2(16,14) + 2(16,106) + (16,27) - (16,74)}{(8,14) - (8,112)},$$

$$(8,69) = 1,808360.$$

Tandem aequationes:

$$(8,126) + (8,20) = (16,126),$$

$$(8,126) + (8,20) =$$

$$\frac{-2(16,1) - 2(16,43) + (16,61) + (16,3) + (16,14) + (16,27) + (16,74) - (16,105)}{(8,1) - (8,8)},$$

suppeditant:

$$(8,20) = 3,060599.$$

Sexta aequatio quadratica haec est:

$$X^{VI\,2} - (8,1)\,X^{VI} = -(8,3) - (8,20);$$

ex qua computatur:

$$(4,1) = 3,848329$$

$$(4,64) = 2,002668.$$

Ad sequentem aequationem quadraticam construendam adhuc desideratur valor (4,15) quem ex his aequationibus computamus:

$(4,60)+(4,15) = (8,60)$,

$(4,60)-(4,15) = \frac{-2(8,1)-(8,81)-(8,72)+(8,61)+(8,79)-(8,14)+(8,69)}{(4,1)-(4,64)}$,

nimirum

$$(4,15) = 3,696748.$$

Septima aequatio quadratica haec est:

$$X^{\text{VII}2}-(4,1)X^{\text{VII}} = -(4,15),$$

unde computatur:

$$(2,1) = 1,9994024.$$

Octava aequatio quadratica denique haec est:

$$X^{\text{VIII}2}-(2,1)X^{\text{VIII}} = -1,$$

unde invenimus:

$$(1) = 0,999701+i\,0,024446.$$

Cum vero quantitas $(1) = \frac{\cos 2\varkappa\pi}{157}+i\frac{\sin 2\varkappa\pi}{257}$ sit, quia radix imaginaria quaelibet aequationis $X^{257}=1$ ita significata est, iam accepimus has positiones:

$$0,999701 = \frac{\cos 2\varkappa\pi}{257},$$

$$0,024446 = \frac{\sin 2\varkappa\pi}{257};$$

unde tabulis sinuum et cosinuum adhibitis, invenitur $\varkappa=1$, quippe quia

$$\cos\frac{2\pi}{257} = \cos 1^0\,24'\,2'',8 = 0,9997012,$$

$$\sin\frac{2\pi}{257} = \sin 1^0\,24'\,2'',8 = 0,0244457,$$

istic invenitur; itaque clarum est radicem illam aequationis $X^{257}=1$, r, ab initio disquisitionis suppositam $=(1)$ fore $=\cos\frac{2\pi}{257}\pm i\sin\frac{2\pi}{257}$.

Iam inde sequitur esse:

$$(2,1) = 2\cos\frac{2\pi}{257},\quad (2,2) = 2\cos 2\frac{2\pi}{257}\ \text{etc.}\quad (2,m) = 2\cos m\frac{2\pi}{257}.$$

Quae cum ita sint, angulo $\frac{2\pi}{257}$ per α significato, tota in antecedentibus solutio data per coss. multiplorum anguli α perduci potest, quum primum in octo illis aequationibus ubique loco periodorum singularum subintelligantur aggregata cosinuum anguli α talia, quae ex tabula secunda loco anguli μ, angulo α supposito sequuntur. Inde exempli gratia desumitur:

$$(4,\ 1) = 2\cos\alpha \quad + 2\cos 16\alpha,$$
$$(4,64) = 2\cos 64\alpha + 2\cos 4\alpha,$$
etc.

deinde:

$$(8,1) = (4,1) + (4,64),$$
$$= 2\cos\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 16\alpha + 2\cos 64\alpha \ldots.$$
etc.

Iam inde facile intelligitur, notationem illam ex theoria numerorum desumtam nonnisi adhibitam esse, ad vera ista aggregata cosinuum, quorum valores praescripta ratione sensim sensimque ex iam determinatis derivari possint, invenienda atque determinanda, unde radices ipsae aequationis $X^{257} = 1$ sequantur; nec non denique, nisi summo calculo impediremur, e cosinibus ipsis trigonometricis formulis coefficientes omnium aequationum quadraticarum antecedentium elici posse.

(Cont. seq. prox.)

2.

Table des racines primitives etc. pour les nombres premiers depuis 3 jusqu'à 101, precédée d'une note sur le calcul de cette table.

(Par l'éditeur.)

C'est à l'occasion de quelques recherches dans la théorie des nombres, que j'ai calculé une table des racines primitives pour les nombres premiers depuis 3 jusqu'à 101, laquelle ainsi fait suite à celle d'Euler qui contient les racines primitives depuis 3 jusqu'à 37. Comme le calcul, que j'ai fait, donna en même tems, et comme par lui même, les restes des puissances des nombres naturels divisés par les divers nombres premiers, et en sus les nombres dont les puissances moindres que celles des racines primitives, divisées par les nombres premiers, laissent 1 pour restes, et lesquels l'on pourrait nommer *racines secondaires* ou *racines primitives subordonnées:* ces derniers nombres et les restes des puissances dont les exposans sont diviseurs du nombre premier donné diminué d'une unité, ont été introduits également dans la table.

Je vais présenter ici cette table puisque, une fois calculée, elle pourroit être utile à ceux qui s'occupent de la théorie des nombres et de ses applications dans l'analyse.

Quant au calcul que j'ai employé pour construire la table, il ne repose que sur des théorèmes assez connus; mais comme l'application de ces théorèmes a fourni un mécanisme de calcul remarquable par sa simplicité et par la facilité et sûreté avec lesquelles il a donné, comme d'un seul jet, non seulement les racines primitives cherchées, mais encore les autres nombres remarquables, je ferai précéder la table d'une explication de ce mécanisme du calcul.

Note sur le calcul de la table ci-jointe.

Je commencerai par énoncer en peu de mots les principes qui ont servi de base au calcul. Les personnes bien versées dans la théorie des nombres pourront passer cet énoncé.

I. Soit p un nombre premier quelconque donné, on sait qu'en vertu du théorème de Fermat, toutes les valeurs $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots p-1$ de a satisfont à l'équation

$$1. \quad a^{p-1} = Np+1,$$

où N signifie un nombre entier. Quelques unes de ces valeurs de a, élevées successivement à toutes les puissances $2, 3, 4, 5^{\text{mes}}$ etc., et ces puissances divisées ensuite par p, laissent pour restes des nombres différents de 1, et ne présentent pas ce dernier reste avant la puissance $p-1^{\text{me}}$, de sorte que dans l'équation

$$2. \quad a^x = Np+1,$$

la *moindre* valeur de x est $p-1$. Ces valeurs de a sont celles qu'on nomme *racines primitives.*

II. Mais, si τ exprime les divers diviseurs premiers de $p-1$, de sorte que p. ex.

$$3. \quad \tau\lambda = p-1:$$

il y a toujours et pour chaque τ des valeurs de a parmi celles $1, 2, 3, \ldots \ldots p-1$ qui satisfont déjà à l'équation

$$4. \quad a^\tau = Np+1,$$

sous condition que τ est le *moindre* exposant de la puissance de a, laquelle, divisée par p, laisse 1 pour reste. Ces valeurs de a sont celles qu'on pourrait nommer *racines secondaires*, ou *racines primitives subordonnées.*

III. Soit

$$5. \quad a^\lambda = Np+r,$$

où λ est facteur de $p-1$ (3.), il existe toujours λ valeurs différentes de a qui donnent *le même* reste r. Comme $p-1$ est un nombre pair pour tout nombre premier impair, il est toujours divisible par $\lambda=2$. Donc il existe *toujours* des *couples* de valeurs de a pour chaque *reste quadratique r.* Si $p-1$ est divisible par $\lambda=3$, il existe des groupes de 3 valeurs de a pour chaque *reste cubique r* etc.

IV. L'équation (5.) donne

$$a^{\tau\lambda} = a^{p-1}(3) = Np+1\,(1) = (Np+r)^\tau\,(5) = Np+r^\tau,$$

ou bien

$$6. \quad r^\tau = Np+1.$$

Cela fait voir que les *restes quadratiques, cubiques* etc. sont toujours des *racines secondaires* et jamais des *racines primitives,* parceque déjà la puissance $\tau < p-1$, divisée par p, donne 1 pour reste.

V. Toutes les puissances des restes quadratiques, cubiques etc. donnent de nouveau des restes du même genre. Car puisque l'équation (5.) a lieu pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ... $p-1$ de a, et que a^2, a^3, a^4, ..., en en retranchant un multiple convenable de p, rentrent toujours dans ces mêmes valeurs, les puissances successives de r rentreront également dans le cadre de ces restes.

VI. Si, comme dans le cas actuel, on cherche non une racine primitive *isolée*, mais *toutes* ces racines en même tems, on pourrait déjà tirer de la remarque (IV.) une méthode assez expéditive pour le calcul de ces racines. Car il ne s'agirait que de calculer les restes quadratiques, les restes cubiques, s'il y en a d'égaux, c'est-à-dire si $p-1$ est divisible par 3, etc., et généralement les restes des puissances dont l'exposant est diviseur de $p-1$. Comme tous ces restes ne peuvent etre des racines primitives, celles-ci se trouveroient sur le champ, en effaçant dans la série 1, 2, 3, 4, ... $p-1$ les restes calculés. Et d'ailleurs le calcul de ces restes serait assez facile, en profitant de la remarque (V.). Car il n'y auroit qu'à prendre les puissances diverses d'un reste quelconque, dont on connaît toujours l'un ou l'autre, par ex. des nombres 4, 9, 16, ... qui sont restes quadratiques; des nombres 8, 27, 64, ... qui sont restes cubiques etc. Ce seroit même une méthode *directe* de calcul, dans le cas où l'on désire en même tems les restes des puissances, dont il s'agit, parcequ'il n'y auroit pas de tâtonnement.

VII. Mais cette méthode a l'inconvénient que les puissances d'un seul reste quadratique, cubique, bien qu'elles ne donnent autre chose que des restes du même genre, n'en donnent pourtant pas *tous* les restes qu'on cherche, puisque déjà $r^{\tau} = Np + a^{p-1} = Np + 1$, de sorte qu'on ne trouve pas tous les $p-1$ restes, mais seulement τ restes. Pour avoir les autres, il faut calculer de nouveau les puissances de quelques autres restes.

VIII. Par cette raison on a préféré une autre méthode, que l'exemple suivant éclaircira suffisamment. Cet exemple est choisi parmi ceux qui offrent plus de difficultés que les autres, et il suffira de faire voir les règles du calcul.

IX. Soit proposé le nombre premier $p = 41$.

Voilà le tableau du calcul:

1.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2.	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3.	2	4	8	16	32	23	5	10	20	40	39	37	33	25	9	18	36	31	21	1
4.	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	1	4	7	10	13	16	19
5.	3	9	27	40	38	32	14	1												
6.	6	12	18	24	30	36	1	7	13	19	25	31	37	2	8	14	20	26	32	38
7.	6	36	11	25	27	39	29	10	19	32	28	4	24	21	3	18	26	33	34	40
8.		6		36		11		25		27		39		29		10		19		32
		35		5		30		16		14		2		12		31		22		9
9.					6					$\overline{36}$					11					$\overline{25}$
					19					32					28					4
					26					33					34					40
					14					2					12					31
					17					20					38					23

1.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
2.	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
3.																				
4.	22	25	28	31	34	37	40	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38
5.																				
6.	3	9	15	21	27	33	39	4	10	16	22	28	34	40	5	11	17	23	29	35
7.	35	5	30	16	14	2	12	31	22	9	13	37	17	20	38	23	15	8	7	1
8.		28		4		24		21		3		18		26		33		34		40
		13		37		17		20		38		23		15		8		7		1
9.					27					$\overline{39}$					29					$\overline{10}$
					24					21					3					18
					35					5					30					16
					22					9					13					37
					15					8					7					1

Voici aussi les règles.

1. Ecrivez sur une première ligne les nombres naturels 1, 2, 3, ... 40.

2. Ecrivez dessous, sur une seconde ligne, les multiples de 2, en ayant attention d'en retrancher $p = 41$, aussitôt que les multiples de 2 surpassent 41. Cela se fait sans un calcul proprement dit.

3. Maintenant les nombres de la seconde ligne vous donneront déjà *sans* nouveau calcul les diverses *puissances* de 2. Car au dessous du nombre 2 de la première ligne vous trouvez dans la seconde ligne $4 = 2^2$; au dessous de 4 de la première ligne vous trouvez dans la seconde ligne $8 = 2^3$, au dessous de 8 vous trouvez $16 = 2^4$, sous 16 vous trouvez

$32 = 2^5$, sous 32 vous trouvez $23 = 2^6 - Np$ etc. Donc il n'y a qu'à *copier* les nombres de la ligne précédente et à *écrire* la *troisième* ligne, qui présentera les diverses puissances de 2, ou plutôt les restes que laissent ces puissances, si on les divise par p.

4. Si aucun de ces restes, autre que le *dernier*, étoit $= 1$, le nombre 2 seroit nécessairement une racine primitive. Mais dans le cas actuel on trouve que déjà $2^{20} = Np + 1$. Donc 2 n'est pas une racine primitive.

5. Essayez donc le suivant nombre premier 3. Ecrivez sur une quatrième ligne les multiples de 3, précisément de la même manière que vous avez employée pour le nombre 2 (2.) et puis extrayez de ces multiples les diverses puissances de 3 d'après la même règle suivie en (3.) pour le nombre 2. Ecrivez les sur une cinquième ligne.

6. Vous trouverez que dans le cas actuel 3 n'est pas non plus une racine primitive, parcequ'on a déjà $3^8 = Np + 1$.

7. Maintenant, au lieu d'essayer le nombre premier suivant 5, vous pourrez déjà être sûr que $2.3 = 6$ est effectivement une racine primitive. Car si ce nombre ne l'étoit pas, on ne pourroit avoir que 6^2, ou 6^4, ou 6^5, ou 6^8, ou 6^{10}, ou $6^{20} = Np + 1$; 2, 4, 5, 8, 10, 20 étant les seuls facteurs de $p - 1 = 40$. Mais suivant le calcul déjà fait on a

$$7.\quad \begin{cases} 2^2 = Np + 4, & 2^5 = Np + 32 = Np - 9, \\ 3^2 = Np + 9, & 3^5 = Np + 38 = Np - 3, \end{cases}$$

donc

$$8.\quad (2.3)^2 = 6^2 = Np + 36 = Np - 5, \quad (2.3)^5 = 6^5 = Np + 27 = Np - 14$$

et de là

$$9.\quad \begin{cases} 6^4 = Np + 25 = Np - 16, & 6^{10} = Np + 32 = Np - 9, \\ 6^8 = Np + 10, & 6^{20} = Np + 40. \end{cases}$$

8. Cela étant trouvé, écrivez sur une sixième ligne les multiples de 6 suivant la règle de (2. et 5.), et puis extrayez en les puissances diverses de 6 d'après la règle de (3. et 5.).

9. Ici finit déjà tout le *calcul*, si d'ailleurs on veut nommer *calcul* la simple écriture des multiples d'un nombre peu considérable, comme 2, 3, 6 etc. Dès ici vous trouverez tous les résultats par la simple *copie* de nombres déjà calculés, en les mettant à leurs places, et puis en ordre.

10. En effet, le reste 36 (ligne 7.) de la 2me puissance de 6 étant le *reste quadratique* de ce nombre, celui 25 (ligne 7.) de la 4me puissance

de 6 sera également *reste quadratique* de $6^2 = 36$, celui 39 (ligne 7.) de la 6me puissance de 6 sera *reste quadratique* de $6^3 = Np + 11$; 10 sera *reste quadratique* de $6^4 = Np + 25$ etc. Donc il n'y a qu'à *écrire* les nombres de la 7me ligne au dessous *d'eux mêmes*, en laissant toujours alternativement une colonne vide. Etant arrivé de cette manière au dernier reste 1, auquel répond le nombre 40, on continue en commençant derechef. Les nombres 6,35; 36,5, 11,30 ...., placés de cette sorte au-dessous de ceux de la 7me ligne, seront ceux (8.), dont les nombres de la 7me ligne, qui se trouvent au-dessus, sont les *restes quadratiques*.

On voit par les mêmes raisons que si l'on écrit les nombres de la 7me ligne également au-dessous deux mêmes, mais en laissant toujours 4 colonnes vides, comme dans (9.), ces nombres (9.) seront ceux dont les nombres 27, 32, 3 etc. de la 7me ligne qui se trouvent au-dessus, sont *les restes de leurs* 5mes *puissances*. Et ainsi de toutes les autres puissances.

12. Mais $p - 1 = 40$ n'ayant pas d'autres diviseurs premiers que 2 et 5, tous les nombres de la 7me ligne qui ne sont ni restes quadratiques ni restes de puissances cinquièmes, seront nécessairement des *racines primitives*. Donc les nombres 6, 11, 29, 19, 28 etc., au-dessous desquels on ne rencontre ni racines 2mes ni racines 5mes, sont les *racines primitives cherchées*.

13. Vous avez trouvé jusqu'ici les restes des 2mes et 5mes etc. puissances de nombres 1, 2, 3..... $p-1$, avec les racines qui correspondent à un même *reste*, et de plus les racines primitives du nombre premier donné. Pour trouver encore les racines *secondaires*, il faut premièrement *mettre en ordre* les résultats trouvés jusqu'ici. Cela se fait comme suit.

14. Copiez les restes quadratiques 36, 25, 39 etc. dans l'ordre où ils sont, mais en les plaçant en colonnes par dixaines, de la manière suivante:

8.	4	10	25	36	40
	5	18	21	39	
	2	16	20	32	
	9		23	33	
	8			31	
	1			37	

D'après ce petit tableau vous pourrez les ranger dans leur ordre naturel par le seul coup d'oeil, et cela vous donnera la première ligne $r = 1, 2, 4, 5, \ldots$ de la table à construire (voy. $p = 41$ dans cette table plus bas).

Cela fait, mettez les racines 6,35 (ligne 8 tableau de calcul IX.) au-dessous du reste quadratique 36 (table page 44, $p = 41$), les racines 36,5 au-dessous du reste quadratique 25, les racines 11,30 au-dessous du reste quadratique 39 etc. Cela vous donnera les valeurs de a de la table pour $a^2 = Np + r$.

15. Faites précisément les mêmes opérations avec les restes des 5mes puissances du tableau (IX.) et avec leurs racines, et vous aurez les valeurs de r et a dans $a^5 = Np + r$ pour la table à construire etc.

16. Dès ici vous n'avez plus besoin du tableau (IX.), mais vous pourrez tirer de la table commencée elle même, les resultats dont il s'agit encore.

Supposez pour cela x successivement égal à tout les facteurs de $p - 1 = 40$, savoir $x = 40, 20, 10, 8, 5, 4, 2, 1$.

17. Commencez par le plus petit facteur 1. Il est clair que si $a^x = Np + 1$, il n'y a d'autre valeur de a que 1, car la première puissance d'aucun autre nombre que 1, divisée par p, ne laisse 1 pour reste.

18. Maintenant la partie de la table qui se rapporte à l'équation $a^2 = Np + r$ fait voir, que pour $r = 1$ il n'y a d'autre valeur de a que 1 et 40. Donc si l'on veut que dans $a^x = Np + 1$, x soit $= 2$, a ne peut être que 1 ou 40, et 1 ayant été déjà réservé pour $x = 1$, on a $a = 40$ pour $x = 2$.

19. Vient $x = 4$. Cherchez la valeur 40 de a pour $x = 2$ parmi les valeurs de r dans $a^2 = Np + r$: vous trouverez qu'il n'y a que les deux nombres 9 et 32 dont la 2me puissance, divisée par p, laisse 40 pour reste, et 40^2 étant $= Np + 1$, on voit que la 4me puissance de 9 et 32 donne $Np + 1$, et que cela n'a lieu pour aucune puissance moins élevée. Donc si l'on veut que dans $a^x = Np + 1$, x soit $= 4$, il n'y a d'autres valeurs de a que 9 et 32.

20. Pour avoir a dans $a^5 = Np + 1$, il n'y a qu'à chercher la valeur 1 de r dans $a^5 = Np + r$. On trouve que, 1 excepté, il n'y a d'autres valeurs de a pour $a^5 = Np + 1$ que 10, 16, 18, 37.

20. Soit $x = 8$ dans $a^x = Np + 1$. Il n'y a qu'à chercher les valeurs 9 et 32 de a dans $a^4 = Np + 1$ parmi celles de r dans $a^2 = Np + r$. Cela fait voir que $3^2, 38^2 = Np + 9$ et $14^2, 27^2 = Np + 32$. Donc $3^8, 8^8 = (Np + 9)^4 = Np + 1$ et $14^8, 22^8 = (Np + 32)^4 = Np + 1$. Donc les valeurs de a pour $a^8 = Np + 1$ sont 3, 14, 27, 38, et il n'y en a pas d'autres.

21. Pour trouver les valeurs de a pour $a^{10} = Np + 1$, on cherchera la valeur 40 de a pour $a^2 = Np + 1$ parmi les restes r de $a^5 = Np + r$. On trouve que les nombres 4, 23, 25, 31, 40 conviennent à ce reste, et en effaçant celui 40, qui est déjà réservé à $x = 2$, on voit qu'il n'y a pas d'autres valeurs de a pour $a^{10} = Np + 1$ que 4, 23, 25, 31.

22. Pour trouver les valeurs de a pour $a^{20} = Np + 1$, on cherchera les valeurs 9 et 32 de a pour $a^4 = Np + 1$ parmi les restes r de $a^5 = Np + r$. On trouve que les nombres 5, 8, 9, 21, 39, 2, 20, 32, 33 et 36 conviennent à ces restes, et en supprimant les nombres 9 et 32, déjà employés, on a 2, 5, 8, 20, 21, 33, 36, 39 pour les valeurs de a dans $a^{20} = Np + 1$.

23. Enfin on pourroit trouver les valeurs de a pour $a^{40} = Np + 1$, c'est-à-dire les *racines primitives* elles mêmes, par le même procédé, savoir, en cherchant les valeurs de a pour $a^{20} = Np + 1$ parmi celles des r dans $a^2 = Np + r$ ou les valeurs de a pour $a^8 = Np + 1$ parmi celles de r dans $a^5 = Np + r$. Mais les racines primitives ayant été déjà mises en évidence dans le tableau de calcul (IX.), comme il a été remarqué (12.), il n'y a qu'à les copier.

24. Voilà achevée la table pour le nombre premier donné 41. On procèdera de la même manière pour tout autre nombre premier.

Nous dirons encore deux mots sur la certitude et la facilité du calcul employé.

25. La certitude en est favorisée premièrement par la simplicité extrême des procédés, qui pour la plupart se réduisent à *copier* des nombres. Et plus un calcul s'éxécute pour ainsi dire *mécaniquement*, plus il est sûr et à l'abri des erreurs.

En second lieu les résultats du calcul sont garantis continuellement par des *preuves* nombreuses. Par exemple: les sommes des nombres dont les 2me les 5me puissances etc. divisées par p donnent *le même* reste, sont toujours divisible par p.

Les restes des puissances, multipliés par l'un quelconque d'entre eux, doivent toujours se reproduire eux mêmes.

Les racines primitives et les racines secondaires, prises ensemble, doivent toujours parcourir tous les nombres 1, 2, 3..... $p - 1$ sans toucher à aucun plus d'une fois.

Les racines primitives et les racines secondaires doivent toujours se presenter en nombre *pair*, et leur nombre doit être égal à celui des nombres qui n'ont pas de diviseur commun avec l'exposant, et qu'on trouve facilement par une formule connue.

Les racines primitives sont toujours des nombres *correspondants*, c'est-à-dire, que leurs produits, pris par couples, doivent être $= Np+1$; etc.

Toutes ces conditions peuvent servir de preuves du calcul, et leur application s'offre comme d'elle même dans son cours.

26. La *facilité* du calcul vient également de sa simplicité. L'exemple que nous avons choisi pour servir d'éclaircissement, est plus embarrassant que les autres, parceque deux essais, sans effêt, étoient nécessaires pour trouver une première racine primitive. Souvent 2, ou au moins 3, est une racine primitive, donc alors le premier, ou au moins le second essai réussit déjà, et l'opération se simplifie encore considérablement. La facilité du calcul est telle, que pour faire la première partie du calcul décrit ci-dessus (1 jusque 12 inclusivement) pour les 25 nombres premiers 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 et 101, il n'a fallu que 8 heures de tems, et environ autant pour l'extraction des résultats et pour l'arrangement de la table.

Il seroit peut être à désirer que quelqu'un qui aurait le loisir et l'envie de continuer encore plus loin cette table, le fît. C'est surtout par cette raison que j'espère qu'on me pardonnera le detail minutieux dans lequel je me suis permis d'entrer, en faisant le rapport du calcul employé.

Additions.

1. La table décrite ci-dessus, pour être complète, devoit non seulement présenter les restes des puissances dont l'exposant est diviseur de $p-1$, mais encore les restes de *toutes* les autres puissances depuis la première jusqu'à la $p-1^{me}$. Pour donner un exemple d'un telle table *complète*, j'ai calculé encore ces autres restes pour les nombres premiers depuis 3 jusqu'à 29, où je me suis arrêté, pour ne pas trop grossir la table. Le reste de la table, pour les nombres premiers depuis 31 jusqu'à 101, est resté tel qu'il étoit originairement. Je laisse à qui le voudra le soin de continuer le calcul supplémentaire, qui d'ailleurs n'a pas la moindre difficulté, puisqu'il n'y à qu'à écrire les restes des diverses puissances d'une

racine primitive quelconque au-dessous d'eux mêmes, en laissant successivement 1, 2, 3, 4. . . . . colonnes alternativement vides.

II. Pour servir d'exemple au problème: *de trouver les divers nombres premiers dont un nombre donné est racine primitive*, j'ai extrait de la table ci-dessus un tableau des racines primitives des divers nombres premiers depuis 3 jusqu'à 101, qu'on trouve à la suite de la table ci-jointe. Ce tableau fait voir par ex.:

que 2 est racine primitive de 3, 5, 11, 13, 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 83, 101,
que 3 est racine primitive de 5, 7, 17, 19, 29, 31, 43, 53, 79, 89, 101,
etc.

Table

des restes que laissent les puissances des nombres naturels, si on les divise par les nombres premiers depuis 3 jusqu'à 101, et des racines primitives et secondaires pour les mêmes nombres premiers.

$$\boxed{p = 3}$$

$$a^2 = Np + r$$

$$r = 1$$
$$a = 1, 2$$

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 2,\quad a = 2$ (rac. pr.)
$x = 1,\quad a = 1$

$$\boxed{p = 5}$$

$$a^n_n = Np + r$$

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$a_3 = 1\quad 3\quad 2\quad 4$$

$$r = 1,\quad 4$$
$$a_2 = 1, 4\quad 2, 3$$

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 4,\quad a = 2, 3$ (rac. pr.)
$x = 2,\quad a = 4$
$x = 1,\quad a = 1$

$p = 7$

$a_n^n = Np + r$

$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$a_5 = 1 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 6$

$r = 1,\ \ 2,\ \ 4$
$a_2 = 1, 6 \quad 3, 4 \quad 2, 5$
$a_4 = 1, 6 \quad 2, 4 \quad 3, 5$

$r = 1, \quad 6$
$a_3 = 1, 2, 4 \quad 3, 5, 6$

$a^{x\,(\mathrm{min.})} = Np + 1$

$x = 6,\ \ a = 3, 5$ (rac. pr.)
$x = 3,\ \ a = 2, 4$
$x = 2,\ \ a = 6$
$x = 1,\ \ a = 1$

$p = 11$

$a_n^n = Np + r$

$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$
$a_3 = 1 \quad 7 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 8 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad 10$
$a_7 = 1 \quad 8 \quad 5 \quad 9 \quad 4 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 10$
$a_9 = 1 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 9 \quad 2 \quad 8 \quad 7 \quad 5 \quad 10$

$r = 1,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 9$
$a_2 = 1, 10 \quad 5, 6 \quad 2, 9 \quad 4, 7 \quad 3, 8$
$a_4 = 1, 10 \quad 4, 7 \quad 3, 8 \quad 2, 9 \quad 5, 6$
$a_6 = 1, 10 \quad 3, 8 \quad 4, 7 \quad 5, 6 \quad 2, 9$
$a_8 = 1, 10 \quad 2, 9 \quad 5, 6 \quad 3, 8 \quad 4, 7$

$r = 1, \quad 10$
$a_5 = 1, 3, 4, 5, 9 \quad 2, 6, 7, 8, 10$

$a^{x\,(\mathrm{min.})} = Np + 1$

$x = 10,\ \ a = 2, 6, 7, 8$ (rac. pr.)
$x = 5,\ \ a = 3, 4, 5, 9$
$x = 2,\ \ a = 10$
$x = 1,\ \ a = 1$

$$p = 13$$

$$a_n^n = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
$a_5 =$	1	6	9	10	5	2	11	8	3	4	7	12
$a_7 =$	1	11	3	4	8	7	6	5	9	10	2	12
9 $a_{11} =$	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

$r =$	1,	3,	4,	9,	10,	12,
$a_2 =$	1, 12	4, 9	2, 11	3, 10	6, 7	5, 8
$a_{10} =$	1, 12	3, 10	6, 7	4, 9	2, 11	5, 8

$r =$	1,	5,	8,	12,
$a_3 =$	1, 3, 9	7, 8, 11	2, 5, 6	4, 10, 12
$a_9 =$	1, 3, 9	2, 5, 6	7, 8, 11	4, 10, 12

$r =$	1,	3,	9
$a_4 =$	1, 5, 8, 12	2, 3, 10, 11	4, 6, 7, 9
$a_8 =$	1, 5, 8, 12	4, 6, 7, 9	2, 3, 10, 11

$r =$	1,	12
$a_6 =$	1, 3, 4, 9, 10, 12	2, 5, 6, 7. 8, 11

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 12$, $a = 2$, 6, 7, 11 (rac. pr.)
$x = 6$, $a = 4$, 10
$x = 4$, $a = 5$, 8
$x = 3$, $a = 3$, 9
$x = 2$, $a = 12$
$x = 1$, $a = 1$

$p = 17$

$$a_n^n = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16
$a_3 =$	1	8	7	13	11	5	14	2	15	3	12	6	4	10	9	16
$a_5 =$	1	15	12	4	3	10	6	9	8	11	7	14	13	5	2	16
$a_7 =$	1	9	11	13	10	14	12	15	2	5	3	7	4	6	8	16
$a_9 =$	1	2	14	4	12	11	10	8	9	7	6	5	13	3	15	16
$a_{11} =$	1	8	10	13	6	12	3	2	15	14	5	11	4	7	9	16
$a_{13} =$	1	15	5	4	14	7	11	9	8	6	10	3	13	12	2	16
$a_{15} =$	1	9	6	13	7	3	5	15	2	12	14	10	4	11	8	16

$r =$	1,	2,	4,	8,	9,	13,	15,	16
$a_2 =$	1, 16	6, 11	2, 15	5, 12	3, 14	8, 9	7, 10	4, 13
$a_6 =$	1, 16	5, 12	8, 9	6, 11	7, 10	2, 15	3, 14	4, 13
$a_{10} =$	1, 16	7, 10	2, 15	3, 14	5, 12	8, 9	6, 11	4, 13
$a_{14} =$	1, 16	3, 14	8, 9	7, 10	6, 11	2, 15	5, 12	4, 13

$r =$	1,	4,	13,	16
$a_4 =$	1, 4, 13, 16	6, 7, 10, 11	3, 5, 12, 14	2, 8, 9, 15
$a_{12} =$	1, 4, 13, 16	3, 5, 12, 14	6, 7, 10, 11	2, 8, 9, 15

$r =$	1,	16
$a_8 =$	1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 16$, $a = 3, 5, 6, 7, 10\ 11, 12, 14$ (rac. pr.)
$x = 8$, $a = 2, 8, 9, 15$
$x = 4$, $a = 4, 13$
$x = 2$, $a = 16$
$x = 1$, $a = 1$

$$p = 19$$

$$a_n^x = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18
$a_5 =$	1	15	10	16	6	17	11	12	5	14	7	8	2	13	3	9	4	18
$a_7 =$	1	3	14	9	17	4	7	8	6	13	11	12	15	2	10	5	16	18
$a_{11} =$	1	13	15	17	9	5	11	12	16	3	7	8	14	10	2	4	6	18
$a_{13} =$	1	14	2	6	16	9	7	8	4	15	11	12	10	3	13	17	5	18
$a_{17} =$	1	10	13	5	4	16	11	12	17	2	7	8	3	15	14	6	9	18

$r =$	1,	4,	5,	6,	7,	9,	11,	16,	17
$a_2 =$	1, 18	2, 17	9, 10	5, 14	8, 11	3, 16	7, 12	4, 15	6, 13
$a_4 =$	1, 18	6, 13	3, 16	9, 10	7, 12	4, 15	8, 11	2, 17	5, 14
$a_8 =$	1, 18	5, 14	4, 15	3, 16	8, 11	2, 17	7, 12	6, 13	9, 10
$a_{10} =$	1, 18	4, 15	5, 14	6, 13	7, 12	9, 10	8, 11	3, 16	2, 17
$a_{14} =$	1, 18	3, 16	6, 13	2, 17	8, 11	5, 14	7, 12	9, 10	4, 15
$a_{16} =$	1, 18	9, 10	2, 17	4, 15	7, 12	6, 13	8, 11	5, 14	3, 16

$r =$	1,	7,	8,	11,	12,	18
$a_3 =$	1, 7, 11	4, 6, 9	2, 3, 14	5, 16, 17	10, 13, 15	8, 12, 18
$a_{15} =$	1, 7, 11	5, 16, 17	10, 13, 15	4, 6, 9	2, 3, 14	8, 12, 18

$r =$	1,	7,	11
$a_6 =$	1, 7, 8, 11, 12, 18	2, 3, 5, 14, 16, 17	4, 6, 9, 10, 13, 15
$a_{12} =$	1, 7, 8, 11, 12, 18	4, 6, 9, 10, 13, 15	2, 3, 5, 14, 16 17

$r =$	1,	18
$a_9 =$	2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18	1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 18,\quad a = 2, 3, 10, 13, 14, 15$ (rac. pr.)
$x = 9,\quad a = 4, 5, 6, 9, 16, 17$
$x = 6,\quad a = 8, 12$
$x = 3,\quad a = 7, 11$
$x = 2,\quad a = 18$
$x = 1,\quad a = 1$

$$\boxed{p=23}$$

$$a^n_x = Np + r$$

$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$a_3 =$	1	16	12	3	19	8	14	2	6	5	10	13	18	17	21	9	15	4	20	11	7	22
$a_5 =$	1	6	18	13	11	16	15	9	2	20	19	4	13	21	14	8	7	12	10	5	17	22
$a_7 =$	1	3	6	9	7	18	11	4	13	21	15	8	2	10	19	12	5	16	14	17	20	22
$a_9 =$	1	9	13	12	20	2	17	16	8	19	5	18	4	15	7	6	21	3	11	10	14	22
$a_{13} =$	1	18	16	2	15	12	19	13	3	17	14	9	6	20	10	4	11	8	21	7	5	22
$a_{15} =$	1	8	4	18	10	9	21	6	16	11	20	3	12	7	17	2	14	13	5	19	15	22
$a_{17} =$	1	4	9	16	21	13	20	18	12	15	17	6	8	11	5	3	10	2	7	14	19	22
$a_{19} =$	1	13	2	8	17	3	5	12	4	14	7	16	9	19	11	18	20	6	15	21	10	22
$a_{21} =$	1	12	8	6	14	4	10	3	18	7	21	2	16	5	20	13	19	9	17	15	11	22

$r =$	1	2	3	4	6	8	9	12	13	16	18
$a_2 =$	1, 22	5, 18	7, 16	2, 21	11, 12	10, 13	3, 20	9, 14	6, 17	4, 19	8, 15
$a_4 =$	1, 22	8, 15	4, 19	5, 18	9, 14	6, 17	7, 16	3, 20	11, 12	2, 21	10, 13
$a_6 =$	1, 22	4, 19	9, 14	7, 16	10, 13	5, 18	11, 12	6, 17	8, 15	3, 20	2, 21
$a_8 =$	1, 22	10, 13	2, 21	8, 15	3, 20	11, 12	4, 19	7, 16	9, 14	5, 18	6, 17
$a_{10} =$	1, 22	11, 12	8, 15	6, 17	4, 19	3, 20	5, 18	2, 21	7, 16	10, 13	9, 14
$a_{12} =$	1, 22	2, 21	3, 20	4, 19	6, 17	8, 15	9, 14	11, 12	10, 13	7, 16	5, 18
$a_{14} =$	1, 22	4, 19	11, 12	3, 20	8, 15	2, 21	6, 17	10, 13	5, 18	9, 14	4, 19
$a_{16} =$	1, 22	6, 17	5, 18	10, 13	7, 16	9, 14	2, 21	4, 19	3, 20	8, 15	11, 12
$a_{18} =$	1, 22	3, 20	6, 17	9, 14	5, 18	4, 19	10, 13	8, 15	2, 21	11, 12	7, 16
$a_{20} =$	1, 22	9, 14	10, 13	11, 12	2, 21	7, 16	8, 15	5, 18	4, 19	6, 17	3, 20

$r =$	1	22
$a_{11} =$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18	5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 22$, $a =$ 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21 (rac. pr.)
$x = 11$, $a =$ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18
$x = 2$, $a =$ 22
$x = 1$, $a =$ 1

$p = 13$

$$a_x^x = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
$a_5 =$	1	6	9	10	5	2	11	8	3	4	7	12
$a_7 =$	1	11	3	4	8	7	6	5	9	10	2	12
$a_{11} =$	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12

$r =$	1,	3,	4,	9,	10,	12,
$a_2 =$	1, 12	4, 9	2, 11	3, 10	6, 7	5, 8
$a_{10} =$	1, 12	3, 10	6, 7	4, 9	2, 11	5, 8

$r =$	1,	5,	8,	12,
$a_3 =$	1, 3, 9	7, 8, 11	2, 5, 6	4, 10, 12
$a_9 =$	1, 3, 9	2, 5, 6	7, 8, 11	4, 10, 12

$r =$	1,	3,	9
$a_4 =$	1, 5, 8, 12	2, 3, 10, 11	4, 6, 7, 9
$a_8 =$	1, 5, 8, 12	4, 6, 7, 9	2, 3, 10, 11

$r =$	1,	12
$a_6 =$	1, 3, 4, 9, 10, 12	2, 5, 6, 7, 8, 11

$$a^{x(\min.)} = Np + 1$$

$x = 12$, $a = 2, 6, 7, 11$ (rac. pr.)
$x = 6$, $a = 4, 10$
$x = 4$, $a = 5, 8$
$x = 3$, $a = 3, 9$
$x = 2$, $a = 12$
$x = 1$, $a = 1$

$p = 17$

$$a_n^x = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16
$a_3 =$	1	8	7	13	11	5	14	2	15	3	12	6	4	10	9	16
$a_5 =$	1	15	12	4	3	10	6	9	8	11	7	14	13	5	2	16
$a_7 =$	1	9	11	13	10	14	12	15	2	5	3	7	4	6	8	16
$a_9 =$	1	2	14	4	12	11	10	8	9	7	6	5	13	3	15	16
$a_{11} =$	1	8	10	13	6	12	3	2	15	14	5	11	4	7	9	16
$a_{13} =$	1	15	5	4	14	7	11	9	8	6	10	3	13	12	2	16
$a_{15} =$	1	9	6	13	7	3	5	15	2	12	14	10	4	11	8	16

$r =$	1,	2,	4,	8,	9,	13,	15,	16
$a_2 =$	1, 16	6, 11	2, 15	5, 12	3, 14	8, 9	7, 10	4, 13
$a_6 =$	1, 16	5, 12	8, 9	6, 11	7, 10	2, 15	3, 14	4, 13
$a_{10} =$	1, 16	7, 10	2, 15	3, 14	5, 12	8, 9	6, 11	4, 13
$a_{14} =$	1, 16	3, 14	8, 9	7, 10	6, 11	2, 15	5, 12	4, 13

$r =$	1,	4,	13,	16
$a_4 =$	1, 4, 13, 16	6, 7, 10, 11	3, 5, 12, 14	2, 8, 9, 15
$a_{12} =$	1, 4, 13, 16	3, 5, 12, 14	6, 7, 10, 11	2, 8, 9, 15

$r =$	1,	16
$a_8 =$	1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16	3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 16$, $a = 3, 5, 6, 7, 10\ 11, 12, 14$ (rac. pr.)
$x = 8$, $a = 2, 8, 9, 15$
$x = 4$, $a = 4, 13$
$x = 2$, $a = 16$
$x = 1$, $a = 1$

$p = 19$

$$a_n^x = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,
$a_5 =$	1	15	10	16	6	17	11	12	5	14	7	8	2	13	3
$a_7 =$	1	3	14	9	17	4	7	8	6	13	11	12	15	2	10
$a_{11} =$	1	13	15	17	9	5	11	12	16	3	7	8	14	10	2
$a_{13} =$	1	14	2	6	16	9	7	8	4	15	11	12	10	3	13
$a_{17} =$	1	10	13	5	6	16	11	12	17	2	7	8	3	15	14

$r =$	1,	4,	5,	6,	7,	9,	11,	16,	17
$a_2 =$	1, 18	2, 17	9, 10	5, 14	8, 11	3, 16	7, 12	4, 15	6, 13
$a_4 =$	1, 18	6, 13	3, 16	9, 10	7, 12	4, 15	8, 11	2, 17	5, 14
$a_8 =$	1, 18	5, 14	4, 15	3, 16	8, 11	2, 17	7, 12	6, 13	9, 10
$a_{10} =$	1, 18	4, 15	5, 14	6, 13	7, 12	9, 10	8, 11	3, 16	2, 17
$a_{14} =$	1, 18	3, 16	6, 13	2, 17	8, 11	5, 14	7, 12	9, 10	4, 15
$a_{16} =$	1, 18	9, 10	2, 17	4, 15	7, 12	6, 13	8, 11	5, 14	3, 16

$r =$	1,	7,	8,	11,	12,	18
$a_3 =$	1, 7, 11	4, 6, 9	2, 3, 14	5, 16, 17	10, 13, 15	8, 12, 18
$a_{15} =$	1, 7, 11	5, 16, 17	10, 13, 15	4, 6, 9	2, 3, 14	8, 12, 18

$r =$	1,	7,	11
$a_6 =$	1, 7, 8, 11, 12, 18	2, 3, 5, 14, 16, 17	4, 6, 9, 10, 13, 15
$a_{12} =$	1, 7, 8, 11, 12, 18	4, 6, 9, 10, 13, 15	2, 3, 5, 14, 16 17

$r =$	1,	18
$a_9 =$	2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18	1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 18$, $a = 2, 3, 10, 13, 14, 15$ (rac. pr.)
$x = 9$, $a = 4, 5, 6, 9, 16, 17$
$x = 6$, $a = 8, 12$
$x = 3$, $a = 7, 11$
$x = 2$, $a = 18$
$x = 1$, $a = 1$

$$\boxed{p = 23}$$

$$a_x^n = Np + r$$

$r =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,	21,	22
$a_3 =$	1	16	12	3	19	8	14	2	6	5	10	13	18	17	21	9	15	4	20	11	7	22
$a_5 =$	1	6	18	13	11	16	15	9	2	20	19	4	13	21	14	8	7	12	10	5	17	22
$a_7 =$	1	3	6	9	7	18	11	4	13	21	15	8	2	10	19	12	5	16	14	17	20	22
$a_9 =$	1	9	13	12	20	2	17	16	8	19	5	18	4	15	7	6	21	3	11	10	14	22
$a_{13} =$	1	18	16	2	15	12	19	13	3	17	14	9	6	20	10	4	11	8	21	7	5	22
$a_{15} =$	1	8	4	18	10	9	21	6	16	11	20	3	12	7	17	2	14	13	5	19	15	22
$a_{17} =$	1	4	9	16	21	13	20	18	12	15	17	6	8	11	5	3	10	2	7	14	19	22
$a_{19} =$	1	13	2	8	17	3	5	12	4	14	7	16	9	19	11	18	20	6	15	21	10	22
$a_{21} =$	1	12	8	6	14	4	10	3	18	7	21	2	16	5	20	13	19	9	17	15	11	22

$r =$	1,	2,	3,	4,	6,	8,	9,	12,	13,	16,	18
$a_2 =$	1, 22	5, 18	7, 16	2, 21	11, 12	10, 13	3, 20	9, 14	6, 17	4, 19	8, 15
$a_4 =$	1, 22	8, 15	4, 19	5, 18	9, 14	6, 17	7, 16	3, 20	11, 12	2, 21	10, 13
$a_6 =$	1, 22	4, 19	9, 14	7, 16	10, 13	5, 18	11, 12	6, 17	8, 15	3, 20	2, 21
$a_8 =$	1, 22	10, 13	2, 21	8, 15	3, 20	11, 12	4, 19	7, 16	9, 14	5, 18	6, 17
$a_{10} =$	1, 22	11, 12	8, 15	6, 17	4, 19	3, 20	5, 18	2, 21	7, 16	10, 13	9, 14
$a_{12} =$	1, 22	2, 21	3, 20	4, 19	6, 17	8, 15	9, 14	11, 12	10, 13	7, 16	5, 18
$a_{14} =$	1, 22	4, 19	11, 12	3, 20	8, 15	2, 21	6, 17	10, 13	5, 18	9, 14	4, 19
$a_{16} =$	1, 22	6, 17	5, 18	10, 13	7, 16	9, 14	2, 21	4, 19	3, 20	8, 15	11, 12
$a_{18} =$	1, 22	3, 20	6, 17	9, 14	5, 18	4, 19	10, 13	8, 15	2, 21	11, 12	7, 16
$a_{20} =$	1, 22	9, 14	10, 13	11, 12	2, 21	7, 16	8, 15	5, 18	4, 19	6, 17	3, 20

$r =$	1,	22,
$a_{11} =$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18	5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 22$, $a =$ 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21 (rac. pr.)
$x = 11$, $a =$ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18
$x = 2$, $a =$ 22
$x = 1$, $a =$ 1

$p = 29$

$$a_n^n = Np + r$$

$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$a_3 =$	1	26	18	9	22	4	16	2	5	21	15	17	6	10	19	23	12	14	8	24	27	13	25	7	20	11	3	28
$a_5 =$	1	21	2	6	9	13	24	10	4	15	3	12	22	11	18	7	17	26	14	25	19	5	16	20	23	27	8	28
$a_9 =$	1	11	14	5	13	9	23	26	22	27	19	12	4	21	8	25	17	10	2	7	3	6	20	16	24	15	18	28
$a_{11} =$	1	10	8	13	4	22	20	14	6	11	27	17	5	26	3	24	12	2	18	23	15	9	7	25	16	21	19	28
$a_{13} =$	1	14	19	22	6	5	25	18	13	26	21	12	9	2	27	20	17	8	3	16	11	4	24	23	7	10	15	28
$a_{15} =$	1	27	26	4	5	6	7	21	9	19	18	17	13	15	14	16	12	11	10	20	8	22	23	24	25	3	2	28
$a_{17} =$	1	3	11	9	22	4	16	27	5	8	14	12	6	19	10	23	17	15	21	24	2	13	25	7	20	18	26	28
$a_{19} =$	1	8	27	6	9	13	24	19	4	14	26	17	22	18	11	7	12	3	15	25	10	5	16	20	23	2	21	28
$a_{23} =$	1	18	15	5	13	9	23	3	22	2	10	17	4	8	21	25	12	19	27	7	26	6	20	16	24	14	11	28
$a_{25} =$	1	19	21	13	4	22	20	15	6	18	2	12	5	3	26	24	17	27	11	23	14	9	7	25	16	8	10	28
$a_{27} =$	1	15	10	22	6	5	25	11	13	3	8	17	9	27	2	20	12	21	26	16	18	4	24	23	7	19	14	28

$r =$	1,	4,	5,	6,	7,	9,	13,	16,	20,	22,	23,	24,	25,	28
$a_2 =$	1, 28	2, 27	11, 18	8, 21	6, 23	3, 26	10, 19	4, 25	7, 22	14, 56	9, 20	13, 16	5, 24	12, 17
$a_6 =$	1, 28	3, 26	14, 15	2, 27	4, 25	11, 18	8, 21	9, 20	13, 16	10, 19	5, 24	6, 23	7, 22	12, 17
$a_{10} =$	1, 28	8, 21	3, 26	10, 19	13, 16	2, 27	14, 15	6, 23	5, 24	11, 18	4, 25	7, 22	9, 20	12, 17
$a_{18} =$	1, 28	11, 18	10, 19	3, 26	9, 20	14, 15	2, 27	5, 24	6, 23	8, 21	7, 22	4, 25	13, 16	12, 17
$a_{22} =$	1, 28	10, 19	2, 27	14, 15	7, 22	8, 21	11, 18	13, 16	9, 20	3, 26	6, 23	5, 24	4, 25	12, 17
$a_{26} =$	1, 28	14, 15	8, 21	11, 18	5, 24	10, 19	3, 26	7, 22	4, 25	2, 27	13, 16	9, 20	6, 23	12, 17

$r =$	1,	7,	16,	20,	23,	24
$a_4 =$	1, 12, 17, 28	8, 9, 20, 21	2, 5, 24, 27	6, 14, 15, 23	3, 7, 22, 26	4, 10, 19, 25
$a_8 =$	1, 12, 17, 28	3, 7, 22, 26	11, 13, 16, 18	8, 9, 20, 21	6, 14, 15, 23	2, 5, 24, 27
$a_{12} =$	1, 12, 17, 28	2, 5, 24, 27	3, 7, 22, 26	4, 10, 19, 25	11, 13, 16, 18	8, 9, 20, 21
$a_{16} =$	1, 12, 17, 28	6, 14, 15, 23	4, 10, 19, 25	3, 7, 22, 26	8, 9, 20, 21	11, 13, 16, 18
$a_{20} =$	1, 12, 17, 28	4, 10, 19, 25	8, 9, 20, 21	11, 13, 16, 18	2, 5, 24, 27	6, 14, 15, 23
$a_{24} =$	1, 12, 17, 28	11, 13, 16, 18	6, 14, 15, 23	2, 5, 24, 27	4, 10, 19, 25	3, 7, 22, 26

$r =$	1,	12,	17,	28
$a_7 =$	1, 7, 16, 20, 23, 24, 25	2, 3, 11, 14, 17, 19, 21	8, 10, 12, 15, 18, 26, 27	4, 5, 6, 9, 13, 22, 28
$a_{21} =$	1, 7, 16, 20, 23, 24, 25	8, 10, 12, 15, 18, 26, 27	2, 3, 11, 14, 17, 19, 21	4, 5, 6, 9, 13, 22, 28

$r =$	1,	28
$a_{14} =$	1, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 28	2, 3, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 26, 27

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 28$, $a =$ 2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27 (rac. pr.)
$x = 14$, $a =$ 4, 5, 6, 9, 13, 22
$x = 7$, $a =$ 7, 16, 20, 23, 24, 25
$x = 4$, $a =$ 12, 17
$x = 2$, $a =$ 28
$x = 1$, $a =$ 1

$p = 31$

$$a^2 = Np + r$$

$r =$	1,	2,	4,	5,	7,	8,	9,	10,	14,	16,	18,	19	20,	25	28
$a =$	1, 30	8, 23	2, 29	6, 25	10, 21	15, 16	3, 28	14, 17	13, 18	4, 27	7, 24	9, 22	12, 19	5, 26	11, 20

$$a^3 = Np + r$$

$r =$	1,	2,	4,	8,	15,	16,	23,	27,	29,	30
$a =$	1, 5, 25	4, 7, 20	16, 18, 28	2, 10, 19	17, 22, 23	8, 9, 14	12, 21, 29	3, 13, 15	11, 24, 27	6, 26, 30

$$a^5 = Np + r$$

$r =$	1,	5,	6,	25,	26,	30
$a =$	1, 2, 4, 8, 16	7, 14, 19, 25, 28	11, 13, 21, 22, 26	5, 9, 10, 18, 20	3, 6, 12, 17, 24	15, 23, 27, 29, 30

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 30$, $a =$ 3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24 (rac. pr.)
$x = 15$, $a =$ 7, 9, 10, 14, 18, 19, 20, 28
$x = 10$, $a =$ 15, 23, 27, 29
$x = 6$, $a =$ 6, 26
$x = 5$, $a =$ 2, 4, 8, 16
$x = 3$, $a =$ 5, 25
$x = 2$, $a =$ 30
$x = 1$, $a =$ 1

$p = 37$

$$a^2 = Np + r$$

$r =$	1,	3,	4,	7,	9,	10,	11,	12,	16,	21,	25,	26,	27,	28,	30,	33,	34,	36
$a =$	1, 36	15, 22	2, 35	9, 28	3, 34	11, 26	14, 23	7, 30	4, 33	13, 24	5, 32	10, 27	8, 29	18, 19	17, 20	12, 25	16, 21	6, 31

$$a^3 = Np + r$$

$r =$	1,	6,	8,	10,	11,	14,	23,	26,	27,	29,	31,	36
$a =$	1, 10, 26	14, 29, 31	2, 15, 20	7, 33, 34	21, 25, 28	5, 13, 19	18, 24, 32	9, 12, 16	3, 4, 30	17, 22, 35	6, 8, 23	11, 27, 36

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 36$, $a =$ 2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35 (rac. pr.)
$x = 18$, $a =$ 3, 4, 21, 25, 28, 30
$x = 12$, $a =$ 8, 14, 23, 29
$x = 9$, $a =$ 7, 9, 12, 16, 33, 34
$x = 6$, $a =$ 11, 27
$x = 4$, $a =$ 6, 31
$x = 3$, $a =$ 10, 26
$x = 2$, $a =$ 36
$x = 1$, $a =$ 1

$p=41$

$$a^8 = Np + r$$

$r=$	1,	2,	4,	5,	8,	9,	10,	16,	18,	20,	21,	23,	25,	31,	32,	33,	36,	37,	39,	40
$a=$	1 40	17 24	2 39	13 28	7 34	3 38	16 25	4 37	10 31	15 26	12 29	8 33	5 36	20 21	14 27	19 22	6 35	18 23	11 30	9 32

$$a^5 = Np + r$$

$r=$	1,	3,	9,	14,	27,	32,	38,	40
$a=$	1, 10, 16 18, 37	11, 12, 28 34, 38	5, 8, 9 21, 30	15, 22, 24 27, 35	6, 14, 17 19, 26	2, 20, 32 33, 36	3, 7, 13 29, 30	4, 23, 25 31, 40

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=40$, $a=$ 6, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 34, 35 (rac. pr.)
$x=20$, $a=$ 2, 5, 8, 20, 21, 33, 36, 39
$x=10$, $a=$ 4, 23, 25, 31
$x=8$, $a=$ 3, 14, 27, 38
$x=5$, $a=$ 10, 16, 18, 37
$x=4$, $a=$ 9, 32
$x=2$, $a=$ 40
$x=1$, $a=$ 1

$p=43$

$$a^6 = Np + r$$

$r=$	1,	4,	6,	9,	10,	11,	13,	14,	15,	16,	17,	21,	23,	24,	25,	31,	35,	36,	38,	40,	41
$a=$	1 42	2 41	7 36	3 40	15 28	21 22	20 23	10 33	12 31	4 39	19 24	8 35	18 25	14 29	5 38	17 26	11 32	6 37	9 34	13 30	16 27

$$a^3 = Np + r$$

$r=$	1,	2,	4,	8,	11,	16,	21,	22,	27,	32,	35,	39,	41,	42,
$a=$	1, 6 41	20, 32 34	13, 36 38	2, 12 29	10, 16 17	21, 26 40	4, 15 24	19, 28 39	3, 18 22	26, 27 33	14, 31 41	5, 8 30	9, 11 23	7, 37 42

$$a^7 = Np + r$$

$r=$	1	6	7	36	37	42
$a=$	1, 4, 11, 16 21, 35, 41	6, 10, 23, 24 31, 38, 40	7, 18, 26, 28 29, 30, 34	9, 13, 14, 15 17, 25, 36	3, 5, 12, 19 20, 33, 37	2, 8, 22, 27 32, 39, 42

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=42$, $a=$ 3, 5, 12, 18, 19, 20, 26, 28, 29, 30, 33, 34 (rac. pr.)
$x=21$, $a=$ 9, 10, 13, 14, 15, 17, 23, 24, 25, 31, 38, 40
$x=14$, $a=$ 2, 8, 22, 27, 32, 39
$x=7$, $a=$ 4, 11, 16, 21, 35, 41
$x=6$, $a=$ 7, 37
$x=3$, $a=$ 6, 36
$x=2$, $a=$ 42
$x=1$, $a=$ 1

$p = 47$

$$a^2 = Np + r$$

$r =$ 1	2	3	4	6	7	8	9	12	14	16	17	18	21	24	25	27	28	32	34	36	37	42
$a =$ 1	7	12	2	10	17	14	3	23	22	4	8	21	16	20	5	11	13	19	9	6	15	18
46	40	35	45	37	30	33	44	24	25	43	39	26	31	27	42	36	34	28	38	41	32	29

$$a^{23} = Np + r$$

$r =$ 1	46
$a =$ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 42	5, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 46$, $a = 5, 10, 11, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45$ (rac. pr.)

$x = 23$, $a = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 42$

$x = 2$, $a = 46$

$x = 1$, $a = 1$

$p = 53$

$$a^2 = Np + r$$

$r =$ 1	4	6	7	9	10	11	13	15	16	17	24	25	28	29	36	37	38	40	42	43	44	46	47	49	52
$a =$ 1	2	18	22	3	13	8	15	11	4	21	17	5	9	20	6	14	12	26	25	19	16	24	10	7	23
52	51	35	31	50	40	45	38	42	49	32	36	48	44	33	47	39	41	27	28	34	37	29	43	46	30

$$a^{13} = Np + r$$

$r =$ 1,	23,	30,	52
$a =$ 1, 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49	5, 8, 12, 14, 18, 21, 22, 23, 27, 33, 34, 50, 51	2, 3, 19, 20, 26, 30, 31, 32, 35, 39, 41, 45 48	4, 6, 7, 9, 11, 17, 25, 29, 37, 38, 40, 43, 52

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 52$, $a = 2, 3, 5, 8, 12, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 41, 45, 48, 50, 51$ (rac. pr.)

$x = 26$, $a = 4, 6, 7, 9, 11, 17, 25, 29, 37, 38, 40, 43$

$x = 13$, $a = 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49$

$x = 4$, $a = 23, 30$

$x = 2$, $a = 52$

$x = 1$, $a = 1$

$p = 59$

$a^2 = Np + r$

$r =$	1,	3,	4,	5,	7,	9,	12,	15,	16,	17,	19,	20,	21,	22,	25,
$a =$	1, 58	11, 48	2, 57	8, 51	19, 40	3, 66	22, 37	29, 30	4, 55	28, 31	14, 45	16, 43	27, 32	9, 50	5, 54
$r =$	26,	27,	28,	29,	35,	36,	41,	45,	46,	48,	49,	51,	53,	57	
$a =$	12, 47	26, 33	21, 38	18, 41	25, 34	6, 53	10, 49	24, 35	20, 39	15, 44	7, 52	13, 46	17, 42	23, 36	

$a^{29} = Np + r$

$r =$	1	58
$a =$	1, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 41, 45, 46, 48, 49, 51, 53, 57	2, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 18, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 47, 50, 52, 54, 55, 56, 58

$a^{x \text{(min.)}} = Np + 1$

$x = 58$, $a =$ 2, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 18, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 47, 50, 52, 54, 55, 56 (rac. pr.)

$x = 29$, $a =$ 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 41, 45, 46, 48, 49, 51, 53, 57

$x = 2$, $a = 58$

$x = 1$, $a = 1$

$p = 61$

$a^2 = Np + r$

$r =$	1,	3,	4,	5,	9,	12,	13,	14,	15,	16,	19,	20,	22,	25,	27
$a =$	1, 60	8, 53	2, 59	26, 35	3, 58	16, 45	14, 47	21, 40	25, 36	4, 57	18, 43	9, 52	12, 49	5, 56	24, 37
$r =$	34,	36,	39,	41,	42,	45,	46,	47,	48,	49,	52,	56,	57,	58,	60
$a =$	20, 41	6, 55	10, 51	23, 38	15, 46	17, 44	30, 31	13, 48	29, 32	7, 54	28, 33	19, 42	22, 39	27, 34	11, 50

$a^3 = Np + r$

$r =$	1,	3,	8,	9,	11,	20,	23,	24,	27,	28
$a =$	1, 13, 47	4, 5, 52	2, 26, 33	16, 20, 25	32, 40, 50	12, 15, 34	31, 37, 54	8, 10, 43,	3, 19, 39	23, 44, 55
$r =$	33,	34,	37,	38,	41,	50,	52,	53,	58,	60,
$a =$	6, 17, 38	22, 42, 58	18, 51, 53	7, 24, 30	27, 46, 49	11, 21, 29	36, 41, 45	28, 35, 59	9, 56, 57	14, 48, 60

$a^5 = Np + r$

$r =$	1,	11,	13,	14,	21,	29,	32,	40,	47,	48,	50,	60
$a =$	1, 9, 20, 34, 58	8, 11, 28, 37, 38	12, 25, 42, 47, 57	5, 39, 45, 46, 48	10, 17, 29, 31, 35	6, 21, 43, 54, 59	2, 7, 18, 40, 55	24, 26, 30, 32, 51	13, 15, 16, 22, 56	4, 14, 19, 36, 49	23, 24, 33, 50, 53	3, 27, 41, 52, 60

$a^{x \text{(min.)}} = Np + 1$

$x = 60$, $a =$ 2, 6, 7, 10, 17, 18, 26, 30, 31, 35, 43, 44, 51, 54, 55, 59 (rac. pr.)

$x = 30$, $a =$ 4, 5, 19, 36, 39, 45, 46, 49

$x = 20$, $a =$ 8, 23, 24, 28, 33, 37, 38, 53

$x = 15$, $a =$ 12, 15, 16, 22, 25, 42, 56, 57

$x = 12$, $a =$ 21, 29, 32, 40

$x = 10$, $a =$ 3, 27, 41, 52

$x = 6$, $a =$ 14, 48

$x = 5$, $a =$ 9, 20, 34, 58

$x = 4$, $a =$ 11, 50

$x = 3$, $a =$ 13, 47

$x = 2$, $a = 60$

$x = 1$, $a = 1$

$p = 67$

$$a^2 = Np + r$$

r =	1,	4,	6,	9,	10,	14,	15,	16,	17,	19,	21,	22,	23,	24,	25,	26
a =	1, 66	2, 65	26, 41	3, 64	12, 55	9, 58	22, 45	4, 63	33, 34	32, 35	17, 50	25, 42	31, 36	15, 52	5, 62	19, 48

r =	29,	33,	35,	36,	37,	39,	40,	47,	49,	54,	55,	56,	59,	60,	62,	64,	65
a =	30, 37	10, 57	13, 54	6, 61	29, 38	21, 46	24, 43	28, 39	7, 60	11, 56	16, 51	18, 49	27, 40	23, 44	14, 53	8, 59	20, 47

$$a^3 = Np + r$$

r =	1,	3,	5,	8,	9,	14,	15,	22,	24,	25,	27
a =	1, 29, 37	18, 53, 63	32, 45, 57	2, 7, 58	16, 56, 62	25, 54, 55	6, 21, 40	24, 26, 42	36, 39, 59	15, 19, 33	3, 20, 44

r =	40,	42,	43,	45,	52,	53,	58,	59,	62,	64,	66
a =	23, 47, 64	34, 48, 52	8, 28, 31	41, 43, 50	27, 46, 61	12, 13, 42	5, 11, 51	9, 60, 65	10, 22, 35	4, 14, 49	30, 38, 66

$$a^{11} = Np + r$$

r =	1,	29,	30,	37,	38,	66,
a =	1, 9, 14, 15, 22, 24, 25, 40, 59, 62, 64	6, 10, 16, 17, 19, 23, 37, 39, 49, 54, 65	7, 11, 12, 20, 31, 32, 34, 38, 41, 46, 63	4, 21, 26, 29, 33, 35, 36, 47, 55, 56, 60	2, 13, 18, 28, 30, 44, 48, 50, 51, 57, 61	3, 5, 8, 27, 42, 43, 45, 52, 53, 58, 66

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=66$, $a=$ 2, 7,11,12,13,18,20,28,31,32,34,41,44,46,48,50,51,57,61,63 (rac. pr.)
$x=33$, $a=$ 4, 6,10,16,17,19,21,23,26,33,35,36,39,47,49,54,55,56,60,65
$x=22$, $a=$ 3, 5, 8,27,42,43,45,52,53,58
$x=11$, $a=$ 9,14,24,25,40,59,62,64
$x=6$, $a=$15,22,30,38
$x=3$, $a=$29,37
$x=2$, $a=$66
$x=1$, $a=$ 1

$p = 71$

$$a^2 = Np + r$$

r =	1,	2,	3,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	12,	15,	16,	18,	19,	20,	24,	25,	27
a =	1, 70	12, 59	28, 43	2, 69	17, 54	19, 52	24, 47	3, 68	9, 62	15, 56	21, 50	4, 67	35, 36	27, 44	34, 37	33, 38	5, 66	13, 58

r =	29,	30,	32,	36,	37,	38,	40,	43,	45,	48,	49,	50,	54,	57,	58,	60,	64
a =	10, 61	32, 39	23, 48	6, 65	26, 45	31, 40	18, 53	16, 55	20, 51	30, 41	7, 64	11, 60	14, 57	25, 46	22, 49	29, 42	8, 63

$$a^5 = Np + r$$

r =	1,	20,	23,	26,	30,	32,	34,	37,	39,	41,	45,	48,	51,	70
a =	1,5,25, 54,57	27,36,38, 48,64	11,26,55, 59,62	22,39,47, 52,53	3,4,15, 20,29	2,10,37, 43,50	13,31,41, 63,65	6,8,30, 40,58	21,28,34, 61,69	42,51,56, 67,68	18,19,24, 32,49	9,12,16, 45,60	7,23,33, 35,44	14,17,46, 66,70

$$a^7 = Np + r$$

r =	1,	5,	14,	17,	25,	46,	54,	57,	66,	70
a =	1,20,30,32, 37,45,48	10,15,16,24, 36,54,58	7,11,31,46, 52,68,69	14,21,22,33, 62,65,67	5,8,12,18, 27,29,43	28,42,44,53, 59,63,66	4,6,9,38, 49,50,57	2,3,19,25, 40,60,64	13,17,35,47, 55,56,61	23,26,34,39, 41,51,70

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=70$, $a=$ 7,11,13,21,22,28,31,33,35,42,44,47,52,53,55,56,59,61,62,63,65,67,68,69 (rac. pr.)
$x=35$, $a=$ 2, 3, 4, 6, 8, 9,10,12,15,16,18,19,24,27,29,36,38,40,43,49,50,58,60,64
$x=14$, $a=$23,26,34,39,41,51
$x=10$, $a=$14,17,46,66
$x=7$, $a=$20,30,32,37,45,48
$x=5$, $a=$ 5,25,54,57
$x=2$, $a=$70
$x=1$, $a=$ 1

$p = 73$

$$a^2 = Np + r$$

$a =$	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	19	23	24	25	27	32	35	36	37	38	41	46	48	49
$r =$	1, 72	32, 41	21, 52	2, 71	15, 58	9, 64	3, 70	31, 42	4, 69	23, 50	26, 47	13, 60	30, 43	5, 68	10, 63	18, 55	20, 53	6, 67	16, 57	29, 44	25, 48	22, 51	11, 62	7, 66

$r =$	50	54	55	57	61	64	65	67	69	70	71	72
$a =$	14, 59	28, 45	36, 37	35, 38	34, 39	8, 65	24, 49	33, 40	19, 54	17, 56	12, 61	27, 46

$$a^3 = Np + r$$

$r =$	1	3	7	8	9	10	17	21	22	24	27	30
$a =$	1, 8, 64	25, 64, 67	13, 29, 31	2, 16, 55	36, 41, 69	43, 61, 52	11, 15, 47	33, 46, 68	17, 63, 66	35, 50, 61	3, 24, 46	34, 63, 59
$r =$	43	46	49	51	52	56	63	64	65	66	70	72
$a =$	14, 20, 39	27, 49, 70	12, 23, 38	7, 10, 56	5, 28, 40	26, 58, 62	21, 22, 30	4, 32, 37	18, 57, 71	42, 44, 60	6, 19, 48	9, 65, 72

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=72$, $a=$ 5,11,13,14,15,20,26,28,29,31,33,34,39,40,42,44,45,47,53,58,59,60,62,68 (rac. pr.)
$x=36$, $a=$ 6,12,19,23,25,35,38,48,50,54,61,67
$x=24$, $a=$ 7,17,21,30,43,52,56,66
$x=18$, $a=$ 18,36,41,57,69,71
$x=12$, $a=$ 3,24,49,70
$x=9$, $a=$ 2, 4,16,32,37,55
$x=8$, $a=$ 10,22,51,63
$x=6$, $a=$ 9,65
$x=4$, $a=$ 27,46
$x=3$, $a=$ 8,64
$x=2$, $a=$ 72
$x=1$, $a=$ 1

$p = 79$

$$a^2 = Np + r$$

$r =$	1	2	4	5	8	9	10	11	13	16	18	19	20	21	22	23	25	26	31	32	36
$a =$	1, 78	9, 70	2, 77	20, 59	18, 61	3, 76	22, 57	13, 66	31, 48	4, 75	27, 52	16, 63	39, 40	10, 69	38, 41	24, 55	5, 74	37, 42	30, 49	36, 43	6, 73

$r =$	38	40	42	44	45	46	49	50	51	52	55	62	64	65	67	72	73	76
$a =$	14, 6	35, 44	11, 68	26, 53	19, 60	21, 58	7, 72	34, 45	29, 50	17, 62	23, 56	33, 46	8, 71	12, 67	15, 64	25, 54	28, 51	32, 47

$$a^3 = Np + r$$

$r =$	1	8	10	12	14	15	17	18	21	22	27	33	38
$a =$	1, 23, 55	2, 31, 46	40, 51, 67	27, 63, 68	37, 60, 61	17, 66, 75	47, 54, 57	9, 21, 49	20, 65, 73	44, 50, 64	3, 7, 69	41, 43, 74	8, 26, 45
$r =$	41	46	52	57	58	61	62	64	65	67	69	71	78
$a =$	34, 53, 71	5, 36, 38	10, 72, 76	15, 29, 35	6, 14, 59	30, 58, 70	22, 25, 32	4, 13, 62	18, 19, 42	11, 16, 52	12, 28, 39	33, 48, 77	24, 56, 78

$$a^{13} = Np + r$$

$r =$	1	23	24	55	56	78
$a =$	1, 8, 10, 18, 21, 22, 38, 46, 52, 62, 64, 65, 67	4, 5, 9, 11, 19, 23, 26, 31, 32, 40, 50, 72, 73	3, 24, 28, 30, 34, 35, 37, 43, 54, 59, 63, 66, 77	2, 13, 16, 20, 25, 36, 42, 44, 45, 49, 51, 55, 76	6, 7, 29, 39, 47, 48, 53, 56, 60, 68, 70, 74, 75	12, 14, 15, 17, 27, 33, 41, 57, 58, 61, 69, 71, 78

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=78$, $a=$ 3, 6, 7,28,29,30,34,35,37,39,43,47,48,53,54,59,60,63,66,68, 70,74,75,77 (rac. pr.)
$x=39$, $a=$ 2, 4, 5, 9,11,13,16,19,20,25,26,31,32,36,40,42,44,45,49,50, 51,72,73,76
$x=26$, $a=$ 12,14,15,17,27,33,41,57,58,61,69,71
$x=13$, $a=$ 8,10,18,21,22,38,46,52,62,64,65,67
$x=6$, $a=$ 24,56
$x=3$, $a=$ 23,55
$x=2$, $a=$ 78
$x=1$, $a=$ 1

$p = 83$

$$a^2 = Np + r$$

r =	1	3	4	7	9	10	11	12	16	17	21	23	25	26	27	28	29	30	31	33	36
a =	1, 82	13, 70	2, 81	16, 67	3, 80	33, 50	29, 54	26, 57	4, 79	10, 73	41, 42	40, 43	6, 78	21, 62	39, 44	32, 51	19, 64	14, 69	23, 60	38, 45	6, 77

r =	37	38	40	41	44	48	49	51	59	61	63	64	65	68	69	70	75	77	78	81
a =	28, 55	11, 72	17, 66	37, 46	25, 58	31, 52	7, 76	36, 47	15, 68	12, 71	35, 48	8, 75	27, 56	20, 63	22, 61	30, 53	18, 65	34, 49	24, 59	9, 74

$$a^{41} = Np + r$$

r =	1	82
a =	1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 38, 40, 41, 44, 48, 49, 51, 59, 61, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 75, 77, 78, 81	2, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 34, 35, 39, 42, 43, 45, 46, 47, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 66, 67, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 80, 82

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 82$, $a = 2, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 34, 35, 39, 42, 43, 45, 46, 47, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 66, 67, 71, 72, 73, 74, 76, 79, 80$ **(rac. pr.)**
$x = 41$, $a = 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 38, 40, 41, 44, 48, 49, 51, 59, 61, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 75, 77, 78, 81$
$x = 2$, $a = 82$
$x = 1$, $a = 1$

$p = 89$

$$a^2 = Np + r$$

r =	1	2	4	5	8	9	10	11	16	17	18	20	21	22	25	32	34	36	39	40	42	44
a =	1, 88	25, 64	2, 87	19, 70	39, 50	3, 86	30, 59	10, 79	4, 85	27, 62	14, 75	38, 51	33, 56	17, 72	5, 84	11, 78	37, 52	6, 83	22, 67	29, 60	24, 65	20, 69

r =	45	47	49	50	53	55	57	64	67	68	69	71	72	73	78	79	80	81	84	85	87	88
a =	32, 57	15, 74	7, 82	36, 53	26, 63	12, 77	18, 71	8, 81	44, 45	35, 54	43, 46	31, 58	28, 61	42, 47	16, 73	41, 48	13, 76	9, 80	23, 66	21, 68	40, 49	34, 55

$$a^{11} = Np + r$$

r =	1,	12,	34,	37,	52,	55,	77,	88,
a =	1, 2, 4, 8, 16, 32, 39, 45, 64, 67, 78	19, 27, 29, 37, 38, 54, 58, 59, 63, 74, 76	9, 18, 21, 36, 42, 49, 55, 69, 72, 79, 84	3, 6, 7, 12, 14, 23, 24, 28, 46, 48, 56	33, 41, 43, 61, 65, 66, 75, 77, 82, 83, 86	5, 10, 17, 20, 34, 40, 47, 53, 68, 71, 80	13, 15, 26, 30, 31, 35, 51, 52, 60, 62, 70	11, 22, 25, 44, 50, 57, 73, 81, 85, 87, 88

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 88$, $a = 3, 6, 7, 13, 14, 15, 19, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 41, 43, 46, 48, 51, 54, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 70, 74, 75, 76, 82, 83, 86$ (rac. pr.)
$x = 44$, $a = 5, 9, 10, 17, 18, 20, 21, 36, 40, 42, 47, 49, 53, 68, 69, 71, 72, 79, 80, 84$
$x = 22$, $a = 11, 22, 25, 44, 50, 57, 73, 81, 85, 87$
$x = 11$, $a = 2, 4, 8, 16, 32, 39, 45, 64, 67, 78$
$x = 8$, $a = 12, 37, 52, 77$
$x = 4$, $a = 34, 55$
$x = 2$, $a = 88$
$x = 1$, $a = 1$

$p = 97$

$$a^2 = Np + r$$

r=	1	2	3	4	6	8	9	11	12	16	18	22	24	25	27	31	32	33	35	36	43	44	47	48
a=	1, 96	14, 83	10, 87	2, 95	43, 54	28, 69	3, 94	37, 60	20, 77	4, 93	42, 55	33, 64	11, 86	5, 92	30, 67	15, 82	41, 56	18, 79	36, 61	6, 91	25, 72	23, 74	12, 85	40, [illegible]

r=	49	50	53	54	61	62	64	65	66	70	72	73	75	79	81	85	86	88	89	91	93	94	95	96
a=	7, 90	27, 70	21, 76	32, 65	35, 62	16, 81	8, 89	29, 68	39, 58	19, 78	13, 84	48, 49	47, 50	46, 51	9, 88	45, 52	38, 59	31, 66	34, 63	24, 73	44, 53	26, 71	17, 80	22, 75

$$a^3 = Np + r$$

r=	1	8	12	18	19	20	22	27	28	30	33	34	42	45	46	47
a=	1, 35, 61	2, 25, 70	18, 31, 48	44, 65, 85	26, 34, 37	55, 57, 82	6, 16, 75	3, 8, 86	5, 14, 78	10, 28, 59	47, 54, 93	30, 80, 84	23, 29, 45	46, 58, 90	20, 21, 56	33, 73, 88

r=	50	51	52	55	63	64	67	69	70	75	77	78	79	85	89	96
a=	9, 24, 64	41, 76, 77	7, 39, 51	52, 68, 74	13, 17, 67	4, 43, 50	38, 69, 87	19, 83, 92	11, 89, 94	22, 81, 91	15, 40, 42	60, 63, 71	12, 32, 53	49, 66, 79	27, 72, 95	36, 62, 96

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x=96$, $a=$ 5, 7,10,13,14,15,17,21,23,26,29,37,38,39,40,41,56,57,58,59,60,68,71
74,76,80,82,83,84,87,90,92 (rac. pr.)

$x=48$, $a=$ 2, 3,11,25,31,32,44,48,49,53,65,66,72,86,94,95

$x=32$, $a=$19,20,28,30,34,42,45,46,51,52,55,63,67,69,77,78

$x=24$, $a=$ 4, 9,24,43,54,73,88,93

$x=16$, $a=$ 8,12,18,27,70,79,85,89

$x=12$, $a=$ 6,16,81,91

$x=$ 8, $a=$33,47,50,64

$x=$ 6, $a=$36,62

$x=$ 4, $a=$22,75

$x=$ 3, $a=$35,61

$x=$ 2, $a=$96

$x=$ 1, $a=$ 1

$p = 101$

$$a^4 = Np + r$$

$r =$	1,	4,	5,	6,	9,	13,	14,	16,	17,	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	30
$a =$	1, 100	2, 99	45, 66	39, 62	3, 98	35, 66	32, 69	4, 97	44, 57	25, 76	11, 90	18, 83	27, 74	15, 86	23, 78	5, 96	38, 63
$r =$	31,	33,	36,	37,	43,	45,	47,	49,	52,	54,	56,	58,	64,	65,	68,	70,	71
$a =$	43, 58	29, 2	6, 95	21, 80	12, 89	34, 67	42, 59	7, 94	31, 70	16, 85	37, 64	19, 82	8, 93	41, 60	13, 88	26, 75	24, 77
$r =$	76,	77,	78,	79,	80,	81,	82,	84,	85,	87,	88,	92,	95,	96,	97,	100	
$a =$	50, 51	28, 73	49, 52	33, 68	22, 79	9, 92	48, 53	36, 65	40, 61	17, 84	47, 54	30, 71	14, 87	46, 55	20, 81	10, 91	

$$a^5 = Np + r$$

$r =$	1,	6,	10,	14,	17,	32,	36,	39,	41,	44
$a =$	1, 36, 84, 87, 95	22, 30, 70, 85, 96	10, 32, 41, 57, 62	4, 33, 43, 45, 77	13, 20, 23, 64, 82	2, 67, 72, 73, 89	25, 25, 54, 80, 92	26, 27, 40, 46, 63	3, 7, 50, 59, 83	8, 53, 66, 86, 90
$r =$	57,	60,	62,	65,	69,	84,	87,	91,	95,	100
$a =$	11, 15, 35, 48, 93	18, 42, 51, 94, 98	38, 55, 61, 74, 75	9, 21, 47, 49, 76	12, 28, 29, 34, 99	19, 37, 78, 81, 88	24, 56, 58, 68, 97	39, 44, 60, 69, 91	5, 16, 31, 71, 79	6, 14, 17, 65, 100

$$a^{x\,(\text{min.})} = Np + 1$$

$x = 100$, $a =$ 2, 3, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 26, 27, 28, 29, 34, 35, 38, 40, 42, 46, 48, 50, 51, 53, 55, 59, 61, 63, 66, 67, 72, 73, 74, 75, 83, 86, 89, 90, 93, 94, 98, 99 (rac. pr.)

$x = 50$, $a =$ 4, 9, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 33, 43, 45, 47, 49, 64, 70, 76, 77, 82, 85, 96

$x = 25$, $a =$ 5, 16, 19, 24, 25, 31, 37, 52, 54, 56, 58, 68, 71, 78, 79, 80, 81, 88, 92, 97

$x = 20$, $a =$ 32, 39, 41, 44, 57, 60, 62, 69

$x = 10$, $a =$ 6, 14, 17, 65

$x = 5$, $a =$ 36, 84, 87, 95

$x = 4$, $a =$ 10, 91

$x = 2$, $a =$ 100

$x = 1$, $a =$ 1

Tableau des racines primitives

Rac. pr. 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
3	.	.		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Nombres premiers auxquels appartiennent											
.	7	.	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	.	.	.	11	11	11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	.	.	.	13	13	.	.	.	13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	17	.	17	17	17	.	.	17	17	17	.	17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	19	.	.	.	.	.	.	19	.	.	19	19	19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	23	.	23	.	.	23	23	.	.	23	23	.	23	.	23	23	23	.	.	.	.
29	29	.	.	.	.	29	.	29	29	.	.	29	29	.	.	29	29	.	29	.	.	.	.
.	31	.	.	.	.	.	.	.	31	31	31	.	.	.	31	.	.	.	31	31	.	31	.
37	.	.	37	.	.	.	.	.	.	.	37	.	37	.	37	37	37	37	.	37	.	37	.
.	.	.	.	41	41	.	.	.	41	41	41	.	41	.	41	.	41	.	.	41	.	41	.
.	43	.	43	.	.	.	.	.	.	43	.	.	.	.	.	43	43	43	.	.	.	.	.
.	.	.	47	.	.	.	.	47	47	.	47	.	47	.	.	.	47	47	.	47	47	.	.
53	53	.	53	.	.	53	.	.	.	53	.	53	.	.	.	53	53	53	53	53	.	.	.
59	.	.	.	59	.	59	.	59	59	.	59	59	.	.	.	59	.	.	.	.	59	59	.
61	.	.	.	61	61	.	.	61	.	.	.	.	.	.	61	61	.	.	.	.	.	.	.
67	.	.	.	.	67	.	.	.	67	67	67	.	.	.	.	67	.	67	.	.	.	.	.
.	.	.	73	.	.	.	.	.	73	.	73	73	73	.	.	.	.	73	.	.	.	.	.
.	79	.	.	79	79	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
83	.	.	83	83	.	83	.	.	.	.	83	83	83	.	.	83	83	83	.	83	.	83	.
.	89	.	.	89	89	.	.	.	.	.	89	89	89	.	.	.	89	.	.	.	89	89	.
.	.	.	97	.	97	.	.	97	.	.	97	97	97	.	97	.	.	.	97	.	97	.	.
101	101	.	.	.	101	.	.	.	101	101	.	.	101	.	.	101	.	.	.	.	.	.	.

Rac. pr.

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
53	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	59	.	59	59	59	.	.	.	.	.	.	.	Nombres premiers auxquels appartiennent											
61	.	.	61	61	.	61	.	61	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
67	.	.	.	.	.	.	.	.	.	67	.	67	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	73	.	.	.	.	73	73	73	.	73	.	.	.	.	.	73	.	.	.	.	.	.	.
.		79	79	.	.		.	79	79	.	.	79	.	.	79	.	79	.	79	.	.	.	79	79
.	83	83	83	83	83	83	83	.	83	.	83	.	.	89	83	83	.	.	.	83	83	83	83	.
89	.	.	89	.	89	.	89	89	89	89	89	89	.	.	89	.	.	.	89	.	.	.	89	89
.	.	.	.	.	97	97	97	97	97	.	.	.	.	.	.	.	97	.	.	97	.	.	97	.
101	.	101	.	101	.	.	.	101	.	101	.	101	.	.	101	101	.	.	.	.	101	101	101	101

nombres premiers depuis 3 jusqu'à 101.

7	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
racines primitives ci-dessus.								.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	37	.	.	37	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	41	41	41	.	.	.	41	41	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	43	43	43	.	.	43	43	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	47	47	47	.	47	.	47	.	.	47	47	47	47	.	47	47	47	.	.	.	.	.
3	.	.	.	53	53	53	53	53	.	.	.	53	.	53	.	.	.	53	.	.	53	.	53
.	.	.	59	59	59	59	59	.	.	59	59	59	59	.	59	59	59	.	.	59	.	.	59
.	.	.	61	61	.	.	.	61	.	.	.	.	.	.	.	61	61	.	.	.	.	.	.
.	67	.	.	67	67	.	67	.	.	.	.	.	.	67	.	.	67	.	67	.	67	.	67
.	73	73	.	73	.	73	73	.	.	.	.	73	73	.	73	.	73	73	.	73	.	.	.
.	79	79	79	.	.	.	79	79	.	79	.	79	.	.	79	.	.	.	.	79	79	.	.
.	.	.	.	.	83	.	83	83	.	.	.	83	.	.	83	83	.	83	83	83	.	.	83
9	89	89	89	89	.	89	.	89	.	.	89	.	.	89	.	89	.	.	89	.	89	.	.
.	.	97	.	.	.	.	.	.	.	97	97	97	97	97	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	101	101	.	.	.	.	101	101	.		101	.	101	.	101	.	.	.	101	.	101	.	101

7	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
racines primitives ci-dessus.								.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	83	83	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	89	89	.	.	89	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	97	.	97	97	97	.	.	97	.	.	97	.	97	.		.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	101	.	.	101	.	.	101	101	.	.	101	101	.	.	.	101	101	.

3.

Mémoire sur la théorie des nombres.

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Introduction.

Les géomètres qui se sont occupés de l'analyse indéterminée, sont parvenus par leurs recherches plutôt à résoudre des questions spéciales, qu'à faire avancer l'ensemble de la science. Leur méthodes, toujours bornées au problème qu'ils voulaient traiter, cessaient d'être utiles quand on tâchait de les appliquer à des questions plus étendues: bien plus, pour traiter un problème quelconque il fallait que les quantités connues fussent données en nombres; car sans cela, le manque absolu de formules générales empêchait de resoudre une équation indéterminée à coefficiens algébriques, même lorsqu'elle était du premier degré. De sorte que la théorie des nombres presqu'immobile au milieu des progrès des autres parties de l'analyse, qu'elle avait vu naître et s'élever successivement, s'en trouvait séparée et ne partageait pas leur perfectionnement commun. Cet isolement, qui forme la difficulté principales de la théorie des nombres, dépend de la méthode que l'on a suivie jusqu'ici pour mettre en équation les problèmes d'analyse indéterminée; car en exprimant seulement les relations qui doivent exister entre les valeurs des inconnues, on a toujours négligé de représenter par des signes algébriques les conditions auxquelles ces inconnues doivent satisfaire, afin qu'elles soient des nombres entiers ou rationnels. De sorte que ces conditions étant seulement sous-entendues, on ne peut pas les soumettre aux règles ordinaires de l'algèbre, et il en résulte un nouveau genre d'analyse, dont tout le succès dépend de la sagacité particulière de chacun des géomètres qui le cultivent, sans que les travaux des uns soient profitables aux recherches des autres. Il y a quelque tems que nous avons tâché de faire disparaître cette imperfection, et déjà nous avons montré ailleurs qu'en écrivant en analyse toutes les conditions du problème, les questions que l'on appelle indéterminées, deviennent toutes plus que déterminées, puisque l'on obtient toujours un nombre d'équations qui surpasse de l'unité celui des inconnues. Nous réproduisons d'abord ici

les formules que nous avons données dans cette occasion, pour exprimer par des séries convergentes le nombre ou la somme des racines d'une équation indéterminée, et nous y ajoutons de nouvelles expressions. Puis nous reprenons ce problème *à priori* dans toute sa généralité, et nous montrons comment, en partant des principes les plus élémentaires de l'analyse, on trouve pour chaque inconnue une équation algébrique dont le degré est égal à la limite que l'on attribue à l'inconnue, et qui exprime la condition que celle-ci doit être un nombre entier: de sorte qu'ayant de cette manière un nombre d'équations égal à celui des inconnues, en les combinant avec l'équation qui exprime les relations qui doivent exister entre les valeurs des variables, on aura après l'élimination une équation de condition qui ne contiendra que les coefficiens de l'équation proposée, et les limites qu'on aura attribuées aux inconnues. D'où il résulte que toute équation indéterminée, est réellement plus que déterminée. Ce résultat remarquable avait échappé à Euler qui croyait que les équations indéterminées, devenaient plus que déterminées, seulement lorsque le nombre des formes que devaient prendre des fonctions données des variables, surpassait celui des inconnues. On explique par là, la contradiction qui se manifestait entre le nom d'équations indéterminées, et le fait qui montrait que souvent elles n'admettaient pas de solutions: ce qui aurait dû faire soupçonner qu'il existait une équation de condition laquelle n'étant pas satisfaite, le problème ne pouvait pas être résolu. Et d'ailleurs en partant de la forme des racines des équations déterminées, et en observant que le nombre des solutions dans une équation indéterminée n'était pas donné par le degré de l'équation, on aurait pu prévoir que cette équation de condition était une fonction des coefficiens de l'équation proposée, et de la limite que l'on attribuait aux variables.

Les principes que nous exposons dans ce mémoire sont suffisans pour trouver, directement et sans tâtonnement, toutes les solutions d'une équation indéterminée, lorsque la limite que l'on attribue aux variables n'est pas l'infini: mais comme le degré de l'équation de condition augmente avec les limites des inconnues; si l'on cherche toutes les solutions possibles d'une équation indéterminée, on trouvera une série infinie dont il s'agira d'avoir la somme pour résoudre la question proposée. Cette somme pourra s'exprimer par des intégrales définies, mais leur valeur numérique sera en général fort difficile à calculer; pour en faciliter la recherche il

faudrait recourir à des principes que nous n'avons pas cru devoir exposer dans ce mémoire, qui a pour but seulement de montrer en général l'esprit de notre méthode. Cependant pour qu'on ne puisse pas croire que notre théorie n'est pas susceptible d'être appliquée aux problèmes particuliers, et pour montrer de quelle manière nos formules peuvent se simplifier dans le plus grand nombre des cas, nous considérons spécialement dans ce mémoire les équations qui sont du premier degré par rapport à l'une des inconnues, et que M. Gaufs a appellées congruences.

En donnant d'abord la théorie générale des congruences nous trouvons, que les relations existantes entre les coefficiens des équations algébriques et leurs racines, s'étendent aux congruences dont toutes les racines sont entières: nous démontrons de cette manière les théorèmes de Fermat et de Wilson, et beaucoup d'autres propositions nouvelles. Puis en appliquant aux congruences les principes qui renferment la théorie générale des équations indéterminées, on trouve les congruences de condition qui doivent être satisfaites afin que le problème soit résoluble: et ces conditions se simplifient beaucoup, à l'aide du théorème de Fermat lorsque le module est un nombre premier.

En effectuant l'élimination entre les congruences, de la même manière que pour les équations, il devient facile d'obtenir le résultat final; et on trouve ainsi les relations qui doivent exister entre les coefficiens d'une congruence et le module, afin qu'elle soit résoluble. Ces relations, qui sont des congruences de condition, renferment toutes les conditions connues jusqu'à présent. Nous plaçons ici une courte digression sur les congruences à module variable, dans laquelle nous faisons voir qu'à l'aide de ces congruences on peut résoudre une classe assez étendue d'équations indéterminées, dont les plus simples avaient été traitées par Lagrange.

Pour chercher les conditions qui doivent être satisfaites afin qu'une congruence soit résoluble, au lieu de faire l'élimination à l'aide des coefficiens, on peut substituer les racines des congruences réduites à la forme d'équations déterminées: de cette manière on introduit les fonctions circulaires dans la théorie des congruences, et on trouve des formules qui la comprennent toute entière. Mais ces expressions ne sont pas assez simples pour qu'on puisse les appliquer avec facilité aux cas particuliers: par conséquent nous avons dû reprendre ce sujet d'une autre manière; et en partant d'une propriété très-simple de l'équation binome, nous avons

trouvé des formules qui expriment le nombre et la somme des diviseurs d'un nombre quelconque, et nous avons formé deux intégrales aux différences finies qui donnent le nombre et la somme des racines d'une congruence quelconque. Ces formules étant appliquées à la congruence du premier degré, fournissent l'expression générale de ses racines, qui sont une fonction trigonométrique des coefficiens et du module: et comme cette congruence équivaut à l'équation indéterminée du premier degré, on trouve ainsi les racines de cette équation en fonction de ses coefficiens, ce qui n'avait jamais été fait.

Nos formules générales étant appliquées au congruences du second degré, donnent tous les théorèmes connus sur les résidus quadratiques: on en déduit aussi la manière de reconnaitre *à priori* si un nombre quelconque est ou n'est pas résidu quadratique d'un nombre premier donné; et il en resulte une proposition générale qui renferme la théorème fondamental de M. Gauss.

La formule qui sert de base à notre théorie, et qui établit un rapport si singulier entre les solutions des congruences et les fonctions circulaires, fournit le moyen de résoudre directement les équations à deux termes. M. Gauss qui a découvert le premier cette résolution par une méthode particulière, et Lagrange qui l'a ramenée ensuite à sa théorie générale des équations, ont supposé la connaissance des racines primitives. La théorie que nous exposons dans ce mémoire est indépendante de cette recherche, et d'ailleurs elle est beaucoup plus simple que les méthodes trouvées par ces deux grands géomètres, qui exigent de très-longs calculs pour être appliquées. On trouvera dans la suite de ces mémoires une méthode générale et très-simple pour traiter les équations de cette classe, de mêmes que celles d'où dépend la division en parties égales de l'arc de la Lemniscate, et beaucoup d'autres; et l'on verra alors pourquoi la résolution de ces équations déterminées se réduit toujours à un problème d'analyse indéterminée.

En appliquant notre principe général aux congruence du troisième et du quatrième degré, nous avons trouvé des rélations fort remarquables entre le nombre des solutions de certaines congruences, et les racines de quelques équations indéterminées du second degré. Nous avons tiré de la des considérations générales sur les résidus cubiques et bicarrés, sur lesquels on n'avait encore rien publié, en montrant comment l'on devait

modifier les formes des nombres premiers qui servent de module, afin d'avoir des théorèmes généraux. On sait que pour avoir tous les théorèmes connus sur les résidus quadratiques d'un nombre premier, il suffit que la forme linéaire de ce nombre soit donnée. Mais cela est insuffisant pour les résidus cubiques et bicarrés, et il faut que le nombre qui sert de module soit alors d'une forme quadratique donnée. Nous parvenons de cette manière à trouver la forme cubique des nombres premiers qu'on n'avait jamais considérée jusqu'à présent. On pourrait pousser plus loin l'examen des formes des degrés supérieurs, en observant que pour chaque degré le nombre des innconnues doit égaler ou surpasser l'exposant. Le même chose arrive pour les congruences, et il est digne de remarque que quand on a déterminé le nombre des solutions d'une congruence, laquelle a autant d'inconnues qu'il y a d'unités dans l'exposant qui marque son degré, on aura tout de suite le nombre des solutions d'une autre congruence du même degré qui aurait le même module, mais qui contiendrait un plus grand nombre d'inconnues. C'est de cette considération que nous déduisons un théorème général sur les congruences de tous les degrés, qui renferme comme cas particulier un théorème de Lagrange sur les congruences du second degré à deux inconnues.

L'analyse succinte que nous venons de donner de notre mémoire suffit pour montrer la possibilité de déduire d'un seul principe général toute la théorie des nombres. Nous n'avons traité ici qu'une classe d'équations indéterminées: mais nous montrerons dans la suite comment on en peut résoudre un grand nombre d'autres, en appliquant le calcul d'approximation aux équations indéterminées, auxquelles il paraissait absolument inappliquable, mais qui cependant dans ce seul cas fournit des solutions exactes. Et nous fairons voir dans un mémoire particulier, comment l'on peut classer et discuter les trancendantes numériques, telles que les nombres premiers, les diviseurs des nombres, etc. En liant la théorie des nombres aux autres parties de l'analyse, il était certain que comme celles-ci contribueraient à son perfectionnement, elles en recevraient des secours; et c'est ce que nous montrerons dans la suite de ces recherches à l'egard des intégrales définies et fonctions circulaires, dont plusieurs propriétés remarquables et inconnues jusqu'à présent, découlent de l'analyse indéterminée. Enfin nous fairons voir comment la considération des différens ordres d'irrationalité devient très-utile dans la résolution des équations numériques.

Analyse.

Nous avons montré pour la première fois, dans le 28ᵉ Volume des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin*, qu'étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{ etc.}) = 0,$$

(que nous indiquerons pour abréger par $\varphi = 0$) pour exprimer que x, y, z, ... etc., doivent être des nombres entiers, on a les équations

$$\sin x\pi = 0; \quad \sin y\pi = 0; \quad \sin z\pi = 0; \ldots \text{ etc.};$$

dont le nombre est égal à celui des inconnues, et qui doivent exister en même tems que l'équation proposée. Nous avons trouvé encore que le nombre des solutions entières et positives, plus grandes que zéro, de l'équation $\varphi = 0$, est exprimé, à très-peu près par la formule

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \sum_{y=1}^{y=\infty} \sum_{z=1}^{z=\infty} \ldots\ldots e^{-10(x+y+z\ldots+\text{etc.})\varphi^2}.$$

S'il s'agissait d'exprimer le nombre des solutions entières de l'équation $\varphi = 0$, en donnant à $x, y, z, \ldots$ etc., toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots n-1$, on aurait la formule

$$13. \quad \sum_{x=1}^{x=n} \sum_{y=1}^{y=n} \sum_{z=1}^{z=n} \ldots\ldots\ldots\ldots e^{-10(x+y+z\ldots+\text{etc.})\varphi^2} =$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \sum_{y=1}^{y=n} \sum_{y=1}^{z=n} \ldots \left\{ \begin{array}{l} 1-10(x+y+z\ldots+\text{etc.})\varphi + \frac{100}{1.2}(x+y+z\ldots+\text{etc.})^2\varphi^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{10^a}{1.2.3\ldots a}(x+y+z\ldots+\text{etc.})^a\varphi^a \pm \text{etc.} \end{array} \right\}$$

On pourrait encore faire usage de la formule

$$\sum_{x=1}^{x=n} \sum_{y=1}^{y=n} \sum_{z=1}^{z=n} \ldots\ldots \frac{1}{1+(10x)^2(10y)^2(10z)^2\ldots\ldots\varphi^2};$$

et il serait facile de trouver plusieurs autres expressions semblables, propres à représenter le nombre ou la somme des solutions de l'équation proposée.

Le second membre de l'équation (13.) est une série qui finira toujours par devenir convergente, et dont chaque terme pourra être calculé à l'aide des formules de la page 9. Mais pour avoir une valeur approchée du premier membre de l'équation (13.) il faut calculer, dans le second membre, un nombre de termes qui augmente avec la limite n, de l'intégration; de manière que l'on obtient toujours une expression de degré indéfini, qui est fonction des coefficiens de l'équation $\varphi = 0$, et de la

limite n. Il faut remarquer surtout que les coefficiens des variables x, y, z, ... etc., dans le développement en série de l'intégrale qui forme le premier membre de l'équation (13.), sont tels qu'en calculant un certain nombre de termes, il ne reste à peu près que ce qu'il faut pour donner le nombre des solutions de l'équation proposée. C'est de cette considération et de l'examen attentif de la nature de ces coefficiens (qui s'expriment aussi par des intégrales définies) que l'on pourrait déduire des considérations qui jetteraient beaucoup de lumière sur la marche de la fonction représentée par la formule (13.): mais ces recherches ne sauraient trouver place ici, et nous les exposerons dans un travail particulier.

Cet aperçu suffirait déjà pour montrer de quelle manière on pourrait réduire la théorie des nombres à l'analyse ordinaire: mais nous allons reprendre maintenant cette question dans toute sa généralité.

Étant proposée une équation à plusieurs inconnues à résoudres en nombres rationnels, fractionnaires ou entiers, on pourra toujours la préparer de manière que tous les nombres cherchés doivent être entiers et positifs: puisqu'en général, si l'équation proposée est de la forme

$$\varphi(x, y, z, \dots \text{etc.}) = 0,$$

et que l'on cherche pour x, y, z, ... etc., des valeurs fractionnaires, en faisant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{y_1}{y_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}, \dots \text{etc.},$$

on aura l'équation

$$\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}, \dots \text{etc.}\right) = 0,$$

dans laquelle il ne faudra chercher pour

$$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \dots \text{etc.},$$

que des valeurs entières: et d'ailleurs s'il y avait des solutions négatives on les obtiendrait en changeant les signes des variables. Nous supposerons par conséquent que ces réductions soient toujours effectuées dans les équations dont nous chercherons la résolution.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$\varphi(x, y, z, \dots \text{etc.}) = 0$$

que nous représenterons comme auparavant par $\varphi = 0$. Avec les méthodes connues on s'arrête là, et on tâche de résoudre cette équation en s'aidant de la forme particulière de ses coefficiens. Mais l'équation $\varphi = 0$, exprime seulement les relations qui doivent exister entre les inconnues,

et n'indique pas que ces inconnues ne doivent recevoir que des valeurs entières et positives: pour exprimer cette dernière condition l'on supposera d'abord que l'on veuille trouver toutes les solutions qui s'obtiennent en donnant à x des valeurs moindres qu'une limite donnée a; à y des valeurs plus petites que b; à z des valeurs moindres que c; et ainsi de suite: $a, b, c, \ldots$ etc., étant des nombres entiers et positifs. Il est clair qu'à cet effet l'on devra donner à $x, y, z, \ldots$ etc., toutes les valeurs comprises dans les séries

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots a-1;$$
$$y = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots b-1;$$
$$z = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots c-1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.};$$

et faire toutes les combinaisons possibles dans l'équation $\varphi = 0$. On observera que toutes ces valeurs de x se trouveront parmi les racines de l'équation

$$X = x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(a-1)) = 0;$$

et que de mêmes les valeurs de y et de z seront comprises parmi les racines des équations

$$Y = y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-(b-1)) = 0;$$
$$Z = z(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-(c-1)) = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.}$$

Les équations précédentes expriment les conditions que x soit un nombre entier positif moindre que a; que y soit un nombre entier positif moindre que b; et ainsi de suite. Ces équations dont le nombre est égal à celui des inconnues, étant combinées avec l'équation $\varphi = 0$, fournissent toutes les conditions du problème; de manière qu'ayant un nombre total d'équations qui surpasse de l'unité le nombre des inconnues, le problème sera plus que déterminé; en éliminant successivement toutes les inconnues entre ces équations, on aura une autre équation de condition $F = 0$, qui comprendra les limites $a, b, c, \ldots$ etc., assignées aux variables, et les coefficiens de l'équation proposée; et qui exprimera la relation qui doit exister entre ces quantités afin que le problème soit résoluble. Lorsque l'équation de condition sera satisfaite, et que l'on sera assuré que l'équation proposé peut être résolue, on reprendra l'une des équations à une seule inconnue que l'on a obtenues par l'élimination avant de parvenir à l'équation $F = 0$. Soit $X_1 = 0$, cette équation en x seul;

en cherchant le plus grand diviseur commun entre $X=0$, et $X_1=0$, on aura une équation de la forme $X_2=0$, qui ne contiendra que l'inconnue x, et dont le degré sera égal au nombre des valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée; et en résolvant l'équation $X_2=0$, on aura toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation $\varphi=0$. On pourrait trouver de même les valeurs des autres inconnues, qui résolvent l'équation proposée; et l'on voit que ce principe s'applique encore à la recherche directe des racines rationnelles d'une équation à une seule inconnue; car ce problème aussi dépend de la théorie des nombres.

Avec la méthode que nous venons d'indiquer, on a seulement les racines inégales; mais s'il y a des racines égales, elles peuvent se trouver avec facilité de la manière suivante. Nous supposerons d'abord, pour simplifier la question, qu'il s'agisse d'une équation à deux inconnues seulement; puisque la méthode est absolument la même lorsque le nombre des variables est plus grand.

Maintenant soit proposé de résoudre en nombres rationnels l'équation

$$\varphi(x,y)=0;$$

et supposons que n valeurs rationnelles de $x=a$, correspondent à une seule valeur rationnelles de $y=b$; (n étant un nombre plus grand que l'unité) en différentiant l'équation proposée par rapport à x, et cherchant le plus grand commun diviseur $\triangle$, entre

$$\frac{d.\varphi(x,y)}{dx} \quad \text{et} \quad \varphi(x,y),$$

on aura $\triangle=F(x,y)$, et il y aura un reste $R=f(y)$ qui ne contiendra plus x, et qui par supposition devra se réduire à zéro. Si l'on fait par conséquent $f(y)=0$, on cherchera les racines rationnelles $y=b$, $y=b_1$, $y=b_2$, ... etc., de cette équation, lorsqu'il en existe, et en substituant successivement b, b_1, b_2, ... etc., pour y dans l'expression de $\triangle$ on aura les équations

$$F(x,b)=0;\quad F(x,b_1)=0;\quad F(x,b_2)=0;\ \ldots\ \text{etc.}$$

que l'on tâchera de réduire à la forme $(x-a)^{n-1}=0$; et on trouvera de cette manière les valeurs multiples de x que l'on cherche.

Si l'on avait identiquement $R=0$, on trouverait l'équation

$$\triangle=F(x,y)=(x-\psi(y))^{n-1}=0,$$

qui devrait exister en même tems que l'équation $\varphi(x,y)=0$, et qui en rait un facteur: l'on ne pourrait donc pas déterminer de cette manière

la valeur de $y=b$; mais en divisant le polynome $\varphi(x,y)=0$ par Δ, le quotient Q contiendrait une seule des n racines égales; et en cherchant le plus grand commun diviseur entre Δ et Q, on aurait l'équation $x-\psi(y)=0$. Nous avons supposé qu'il y avait seulement n valeurs de $x=a$, correspondantes à une valeur de $y=b$: mais si outre celles-là il y avait m valeurs de x égales à c, et r valeurs égales à e, etc., il serait facile d'appliquer encore à ce cas la méthode que nous venons d'exposer.

Soit proposée par exemple l'équation

$$x^2-2xy+2y^3-1=0,$$

dans laquelle on veuille savoir si parmi les valeurs rationnelles de y qui la résolvent il y en a une égale à b, et telle qu'il lui corresponde n valeurs de $x=a$; n étant un nombre plus grand que l'unité. A cet effet on différentiera l'équation proposée par rapport à x, et l'on aura $x-y=0$; puis en cherchant le plus grand commun diviseur, entre ces deux équations, l'on trouvera $x-y$ pour ce diviseur et $2y^3-y^2-1=0$ pour reste, et comme cette dernière équation est satisfaite en faisant $y=1$, si l'on substitue cette valeur dans l'équation proposée, on aura

$$x^2-2x+1=(x-1)^2=1;$$

et par conséquent l'équation

$$x^2-2xy+2y^3-1=0,$$

est telle que deux valeurs de $x=1$, correspondent à la racine $y=1$.

On voit, par ce qui précède, quelles opérations il faudrait faire dans tous les cas; car si l'équation proposée contenait n inconnues, on la réduirait toujours à une autre qui en aurait $n-1$ seulement.

Maintenant il et clair que toute la théorie des nombres se ramène au problème de l'élimination; puisqu'il suffirait d'éliminer toutes les inconnues entre les équations

$$\varphi(x,y,z,\ldots \text{ etc.})=0,\quad X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,\ldots \text{ etc.},$$

que nous avons établies précédemment, pour trouver l'équation de condition $F=0$, qui renferme la resolution de l'équation proposée. L'élimination générale entre ces équations ne saurait s'effectuer avec les méthodes connues; il est vrai que l'on pourrait substituer directement les valeurs des inconnues, mais il serait très-difficile de résoudre la question par cette voie. Pour la traiter avec quelque succès il faut recourir aux intégrales définies, et specialement aux integrales dont la valeur est indépendante des constantes qu'elles renferment. Mais nous nous réservons de

donner cette théorie générale dans une autre occasion, et nous nous bornerons pour le moment à considérer les équations dans lesquelles l'une des inconnues est élevée seulement aux premier degré, et que M. Gauss a nommées congruences; et nous déduirons d'une seule formule tout ce que l'on savait sur ce genre d'équations, et beaucoup d'autres résultats nouveaux. Cela nous fournira l'occasion de montrer un exemple des simplifications remarquables dont notre méthode est susceptible, lorsqu'on l'applique aux cas particuliers, et des artifices d'analyse dont il faut faire usage pour résoudre ce genre de questions.

Soit proposé de resoudre l'équation

$$14. \quad \varphi(x, y, z, \ldots . \text{etc.}) - pu = 0;$$

dans laquelle φ exprime une fonction rationnelle et entière quelconque des nombres entiers x, y, z, ... etc., et u doit être un nombre entier. Il est clair que s'il existe des valeurs de $x, y, z, \ldots$. etc. plus grandes que p, qui résolvent l'équation proposée, il y en aura aussi d'autres qui seront comprises entre zéro et p; et ce seront ces dernières que nous considérerons toujours dans ce qui suit, à moins que nous n'indiquions spécialement le contraire. A présent l'on sait que l'équation (14.) équivaut, d'après la notation de M. Gauss, à la congruence

$$\varphi(x, y, z, \ldots . \text{etc.}) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p).$$

En supposant, pour simplifier le problème, que cette congruence se réduise à la forme

$$X = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} \ldots . + A_{m-1} x + A_m \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p),$$

(les coefficiens A_1, A_2, ... A_m étant toujours des nombres entiers et p étant un nombre entier) si elle a une racine entière $x = a_1$, on pourra toujours la mettre sous la forme $(x - a_1) X_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p)$, X_1 étant un polynome entier en x du degré $m-1$; il résulte de là que la congruence $X \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p)$ ne peut avoir, tout au plus, qu'un nombre m de racines entières moindres que p, m étant le nombre qui exprime le degré du polynome X; et que si elle a les m racines entières

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots . \ a_m,$$

on pourra faire

$$X \equiv (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots . (x - a_m) \equiv 0 \ (\text{mod.}\, p),$$

et on aura les congruences

$$15 \ldots \left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots\ldots + a_m \equiv -A_1 \pmod{p}, \\ \left.\begin{array}{l} a_1 a_2 + a_1 a_3 \ldots\ldots + a_1 a_m \\ + a_2 a_3 + a_2 a_4 \ldots\ldots + a_2 a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \end{array}\right\} \equiv + A_2 \pmod{p}, \\ \left.\begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 \ldots\ldots + a_1 a_2 a_m \\ + a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_5 \ldots\ldots + a_2 a_3 a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \end{array}\right\} \equiv - A_3 \pmod{p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_m \equiv \pm A_m \pmod{p}. \end{array}\right.$$

Dans cette dernière congruence il faudra prendra le signe $+$ si m est un nombre pair, et le signe $-$ si m est un nombre impair.

Pour trouver la somme des puissances r^{mes} des racines de la congruence $X \equiv 0 \pmod{p}$, on aura des formules semblables à celles que l'on obtient pour les équations algébriques; car en appellant P_r, P_{r-1}, P_{r-2}, etc., la somme des puissances r^{mes}, $(r-1)^{mes}$, $(r-2)^{mes}$, etc., de ces racines on aura

$$P_r + A_1 P_{r-1} + A_2 P_{r-2} \ldots\ldots + r A_r \equiv 0 \pmod{p}.$$

On peut de la même manière transformer les congruences et obtenir leurs fonctions symétriques. En général étant proposé de trouver une fonction symétrique donnée φ, des racines de la congruence $X \equiv 0 \pmod{p}$, qui à toutes ses racines entières, on cherchera la même fonction symétrique dans l'équation $X = 0$, et en exprimant dans l'équation la valeur de cette fonction par $\varphi = S$, on sera assuré que pour la congruence on aura

$$\varphi \equiv S \pmod{p}.$$

Soit maintenant proposé de résoudre la congruence

$$x^p - x \equiv 0 \pmod{p},$$

dans laquelle p est un nombre premier. Si l'on cherche une transformée en y dont les racines surpassent de l'unité celles de la proposée, on aura $y = x + 1$, et partant $x = y - 1$; d'où l'on déduira

$$(y-1)^p - (y-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

et par suite, en négligeant les multiples de p,

$$y^p - y \equiv 0 \pmod{p}.$$

Mais comme cette dernière congruence est identique avec la proposée, il en résulte que celle-ci ayant la racine $x = a$, aura de même la racine $x = a + 1$, et par conséquent l'autre $x = a + 2$: et qu'en général elle

sera résolue par toutes les valeurs de x de la forme $a+z$; z étant un nombre entier positif quelconque: et puisque en faisant $x=0$, on satisfait à la congruence proposée, elle aura pour racines tous les nombres naturels. Par conséquent la congruence

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p},$$

aura pour racines tous les nombres 1, 2, 3, ... $p-1$; ce qui forme le théorème de Fermat.

La congruence

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p},$$

dans laquelle p est un nombre premier, étant comparé à l'autre

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m\equiv 0 \pmod{p},$$

que nous avons déjà considérée, donne

$$A_1=0,\quad A_2=0,\ \ldots\ldots\ A_{m-1}=0,\quad A_m=-1;$$
$$m=p-1;\quad a_1=1,\quad a_2=2,\ \ldots\ldots\ a_m=p-1;.$$

et par conséquent, en substituant les valeurs des racines a_1, a_2, a_3, ... a_m, dans les congruences (15.), on aura

$$1+2+3\ldots\ldots\ldots+\quad p-1\quad\equiv 0 \pmod{p},$$
$$\left.\begin{matrix}1.2+1.3\ldots\ldots+1.(p-1)\\+2.3+2.4\ldots\ldots+2.(p-1)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{etc.}\end{matrix}\right\}\equiv 0 \pmod{p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{etc.}$$

et enfin

$$1.2.3\ldots\ldots(p-1)+1\equiv 0 \pmod{p},$$

puisque $p-1$ est un nombre pair *). Cette dernière congruence équivaut au théorème de Wilson.

Si l'on voulait trouver un nombre z tel qu'en faisant le produit de tous les nombres inférieurs à p (p étant un nombre premier) moins le facteur g, on eût

$$1.2.3\ldots.(g-1)(g+1)\ldots.(p-1)+z\equiv 0 \pmod{p},$$

on devrait chercher à déterminer les coefficiens de la congruence

$$x^{p-2}+\alpha x^{p-3}+\beta x^{p-4}\ldots.+z\equiv 0 \pmod{p},$$

qui a pour racines tous les nombres entiers inférieurs à p, excepté le nombre g: à cet effet on divisera la congruence

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$$

par $x-g$, et le dernier terme du quotient sera le nombre z.

---

*) Si le nombre premier p était égal à 2, $p-1$ ne serait plus un nombre pair; mais alors on aurait identiquement

$$1+1\equiv 0 \pmod{2}$$

En effectuant la divison l'on trouvera

$$\frac{x^{p-1}-1}{x-g}=x^{p-2}+g\,x^{p-3}+g^2x^{p-4}\ldots.+g^{p-3}x+g^{p-2}+\frac{g^{p-1}-1}{x-g}\equiv 0 \pmod{p},$$

et puisque $g^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$, on obtiendra

$$\frac{x^{p-1}-1}{x-g}\equiv x^{p-2}+g\,x^{p-3}\ldots\ldots+g^{p-3}x+g^{p-2}\equiv 0 \pmod{p},$$

en partant

$$1.2.3\ldots.(g-1)\,(g+1)\ldots.(p-2)\,(p-1)+g^{p-2}\equiv 0 \pmod{p}.$$

En faisant dans cette congruence $g=1$, on retrouve le théorème de Wilson qui est un cas particulier de celui-ci.

On pourrait déduire de là tous les théorèmes que M. Gauss a insérés dans la troisième section de ses Recherches arithmétiques, et beaucoup d'autres propositions nouvelles. Si l'on prend, par exemple, la somme des puissances n^{mes} des racines de la congruence

$$x^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p},$$

on trouve que, p étant un nombre premier, on aura toujours

$$1+2^n+3^n\ldots..+(p-1)^n\equiv 0 \pmod{p},$$

lorsque n n'est pas divisible par $p-1$; tandis que si n est un multiple de $p-1$, on obtiendra

$$1+2^n+3^n\ldots..+(p-1)^n\equiv -1 \pmod{p}.$$

M. Poinsot a démontré que les racines de la congruence

$$x^n-1\equiv 0 \pmod{np+1},$$

dans laquelle $np+1$ est un nombre premier, se déduisent des racines de l'équation $x^n-1=0$, en ajoutant des multiples de $np+1$ sous les radicaux compris dans l'expression de ces racines: mais cette proposition n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général que nous allons démontrer. En effet la congruence

$$x^n+A_1x^{n-1}\ldots..+A_{n-1}x+A_n\equiv 0 \pmod{p},$$

dans laquelle p est un nombre quelconque, équivaut à l'équation à deux inconnues

$$x^n+A_1x^{n-1}\ldots..+A_{n-1}x+(A_n-py)=0,$$

dont les racines sont exprimées par une formule de la forme

$$x=\varphi(A_1, A_2, \ldots.. A_{n-1}, A_n-py),$$

qui se réduit à l'expression des racines de l'équation

$$x^n+A_1x^{n-1}\ldots..+A_{n-1}x+A_n=0,$$

lorsqu'on y fait $y=0$. Si donc *vice-versá* l'on ajoute des multiples de p sous les radicaux compris dans l'expression des racines de cette équa-

tion (en écrivant partout $A_n - py$, au lieu d'A_n), on aura les racines de la congruence proposée.

En appliquant aux congruences ce que nous avons dit en général des équations à plusieurs inconnues en nombres entiers, on trouve que toutes les solutions inégales et moindres que p de la congruence

$$\varphi(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) = \Phi \equiv 0 \pmod{p},$$

sont comprises parmi les racines des congruences

$$X = x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(p-1)) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$Y = y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-(p-1)) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$Z = z(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-(p-1)) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.};$$

et qu'en éliminant toutes les variables entre les congruences

$\Phi \equiv 0 \pmod{p}$, $X \equiv 0 \pmod{p}$, $Y \equiv 0 \pmod{p}$, $Z \equiv 0 \pmod{p}$, ... etc., on obtiendra une congruence de condition qui devra être satisfaite afin que la congruence proposée soit résoluble: de manière qu'au lieu d'avoir l'équation de condition $C = 0$, comme pour les équations, on aura la congruence de condition $C \equiv 0 \pmod{p}$, et l'expression qui aurait dû se réduire à zéro dans le premier cas, devra être divisible par p dans le second. Lorsque p est un nombre premier, la question se simplifie beaucoup, car par le théorème de Fermat on aura

$$x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(p-1)) \equiv x^p - x \equiv 0 \pmod{p},$$
$$y(y-1)(y-2)\ldots\ldots(y-(p-1)) \equiv y^p - y \equiv 0 \pmod{p},$$
$$z(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-(p-1)) \equiv z^p - z \equiv 0 \pmod{p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.},$$

et l'on devra éliminer les inconnues entre les congruences

$$\Phi \equiv 0 \pmod{p}, \quad x^p - x \equiv 0 \pmod{p}, \quad y^p - y \equiv 0 \pmod{p},$$
$$z^p - z \equiv 0 \pmod{p}, \ldots\ldots \text{etc.},$$

pour avoir la congruence de condition.

Si dans la congruence

$$\Phi \equiv 0 \pmod{p}$$

on cherchait seulement les racines différentes de zéro, on devrait éliminer les inconnues entre cette congruence et les suivantes

$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, $y^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p.}$, $z^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, ... etc., et comme les racines congrues à zéro peuvent se trouver séparément avec facilité, nous supposerons, dans ce qui suit, que l'on cherche les racines différentes de zéro; ce qui simplifiera beaucoup nos recherches.

Il est clair, d'après ce que nous avons démontré sur les fonctions symétriques des congruences, qu'étant proposé d'éliminer les inconnues entre les congruences

$$\Phi = \varphi(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$\Phi_1 = \varphi_1(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$\Phi_2 = \varphi_2(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.},$$

on pourra effectuer l'élimination entre les équations

$$\Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \ldots\ldots \text{etc.},$$

pourvu qu'au lieu de l'équation $F = 0$, qui résultera de cette élimination, on écrive

$$F \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour faire quelques applications de ce principe, soit proposé de résoudre la congruence

$$Ax + B \equiv 0 \pmod{p};$$

il est évident que si A et p ont un facteur commun, qui ne divise point B, cette congruence ne pourra pas se résoudre; et comme lorsque ce facteur commun existe et divise B, on peut toujours l'ôter, on pourra supposer que A et p sont premiers entre eux; et en faisant $x = Bz$, on aura

$$B(Az + 1) \equiv 0 \pmod{p};$$

et il faudra resoudre la congruence

$$Az + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Maintenant si l'on décompose p dans tous ses facteurs premiers, égaux ou inégaux, de manière que l'on ait

$$p = a.b.c\ldots\ldots n,$$

on devra résoudre la congruence

$$Az + 1 \equiv 0 \pmod{a.b.c\ldots\ldots n},$$

qui se change dans la suivante

$$Ay - 1 \equiv 0 \pmod{a.b.c\ldots\ldots n},$$

en faisant $z = -y$.

En considérant la congruence

$$Ay - 1 \equiv 0 \pmod{a},$$

il faudra éliminer entre celle-ci et la suivante $y^{a-1} - 1 \equiv 0 \pmod{a}$, qui équivaut à l'autre

$$A^{a-1}y^{a-1} - 1 \equiv 0 \pmod{a};$$

puisque par supposition a est un nombre premier qui ne divise point A: alors en divisant $A^{a-1}y^{a-2} - 1$, par $Ay - 1$, on obtiendra un quotient

exact; d'où l'on déduira que la congruence

$$Ay-1\equiv 0 \pmod{p},$$

est résolue en faisant

$$y = A^{a-2}s^{a-1} = Y_1;$$

en indiquant par s un nombre entier quelconque: on trouvera de même que toutes les congruences

$$Ay-1\equiv 0 \pmod{b},\quad Ay-1\equiv 0 \pmod{c},\ \ldots\ \text{etc.},$$

seront résolues en faisant successivement

$$y = A^{b-2}t^{b-1} = Y_2;\quad y = A^{c-1}u^{c-1} = Y_3;\ \ldots\ldots\ \text{etc.}$$

Il résulte de là que la congruence

$$(AY_1-1)(AY_2-1)(AY_3-1)\ldots\ldots \equiv 0 \pmod{a.b.c\ldots\ldots n},$$

et par suite l'autre

$$Y = (AY_1-1)^2(AY_2-1)^2(AY_3-1)^2\ldots\ldots \equiv 0 \pmod{p},$$

seront toujours satisfaites: mais la valeur de Y étant composée d'un nombre pair de facteurs, pourra se réduire à la forme

$$Az+1\equiv 0 \pmod{p};$$

et puisque cette congruence est résoluble, l'autre

$$Ax+B\equiv 0 \pmod{p},$$

le sera de même, et on aura

$$x = \frac{B}{A}\left((A^{a-1}s^{a-1}-1)^2(A^{b-1}t^{b-1}-1)^2\ldots\ldots(A^{n-1}v^{n-1}-1)^2-1\right),$$

pour une de ses racines; en observant que l'on peut prendre pour $s, t, \ldots \ldots v$, des nombres entiers quelconques. En général toutes les solutions possibles de la congruence proposée seront données par la formule

$$x = \frac{B}{A}\left((A^{a-1}-1)(A^{b-1}-1)\ldots\ldots(A^{n-1}-1)\right)^2 - \frac{B}{A} + pu,$$

dans laquelle u est un nombre entier quelconque.

Soit proposé maintenant de résoudre la congruence du second degré

$$x^2+qx+r\equiv 0 \pmod{2p+1},$$

$2p+1$ étant un nombre premier; il est clair que si elle a une racine $x=A$, il y en aura une autre $x=B\equiv -q-A$, et partant si elle est résoluble il faudra qu'en divisant $x^{2p}-1$, par x^2+qx+r, le reste soit divisible par $2p+1$. A présent on doit remarquer que si α et β sont les deux racines de l'équation

$$x^2+qx+r=0,$$

on aura

$$x^2+qx+r = (x-\alpha)(x-\beta).$$

et par conséquent

$$\frac{x^{2p}-1}{x^2+qx+r}=\frac{x^{2p}-1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{x^{2p}-1}{(\beta-\alpha)(x-\beta)}+\frac{x^{2p}-1}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)};$$

En effectuant la division, on trouvera généralement

$$\frac{x^{2p}-1}{x^2+qx+r}=\frac{x^{2p}-1}{(\beta-\alpha)(x-\beta)}+\frac{x^{2p}-1}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}$$

$$=x^{2p-2}+A_1x^{2p-3}+A_2x^{2p-4}\ldots\ldots+A_{2p-2}+\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta^{2p}-1}{x-\beta}\right)+\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^{2p}-1}{x-\alpha}\right),$$

les coefficiens A_1, A_2, ... etc. étant toujours des nombres entiers. Il faudra, par conséquent, qu'en réduisant les deux derniers termes au même dénominateur, la quantité

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\left((x-\alpha)(\beta^{2p}-1)-(x-\beta)(\alpha^{2p}-1)\right)$$

qui sera le reste de la division, soit divisible par $2p-1$, et partant

$$\left(\frac{\beta^{2p}-\alpha^{2p}}{\beta-\alpha}\right)x-\alpha\beta\left(\frac{\beta^{2p-1}-\alpha^{2p-1}}{\beta-\alpha}\right)+\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\equiv 0 \pmod{2p+1};$$

d'où l'on déduira les deux congruences de condition

16. $$\frac{\beta^{2p}-\alpha^{2p}}{\beta-\alpha}\equiv 0 \pmod{2p+1};\quad \alpha\beta\left(\frac{\beta^{2p-1}-\alpha^{2p-1}}{\beta-\alpha}\right)+1\equiv 0 \pmod{2p+1}.$$

On voit ici qu'après avoir effectué la division par $\beta-\alpha$, les premiers membres de ces deux congruences pourront toujours s'exprimer à l'aide des quantités q et r, puisqu'ils ne renferment que des fonctions symétriques des racines α et β: et d'ailleurs il est clair que l'on pourra toujours substituer au lieu de α et β, les quantités

$$\frac{-q+\sqrt{(q^2-4r)}}{2};\quad \frac{-q-\sqrt{(q^2-4r)}}{2}$$

Si dans la congruence

$$x^2+qx+r\equiv 0 \pmod{2p+1},$$

on fait $q=0$, $r=-s$; on devra dans les congruences (16.) faire $\alpha+\beta=0$, et partant $\alpha=-\beta$; mais l'on a aussi $\beta=\sqrt{s}$, $\alpha=-\sqrt{s}$, $\beta-\alpha=2\sqrt{s}$, $\beta\alpha=-s$; par conséquent les deux congruences (16.) se reduiront aux suivantes

$$\frac{\beta^{2p}-\beta^{2p}}{2\sqrt{s}}\equiv 0 \pmod{2p+1};\quad -s\sqrt{s}\left(\frac{s^{p-1}-s^{p-1}}{2\sqrt{s}}\right)+1\equiv 0 \pmod{2p+1};$$

dont la première est toujours satisfaite, et la seconde se réduit à l'autre

17. $$s^p-1\equiv 0 \pmod{2p+1};$$

qui est la condition déjà connue pour la résolution de la congruence

$$x^2-s\equiv 0 \pmod{2p+1}.$$

Soit proposé, par exemple, de trouver la condition qui doit être satisfaite afin que la congruence $x^2+1\equiv 0$ (mod. $2p+1$), dans laquelle $2p+1$ est un nombre premier, soit résoluble; on devra faire $\epsilon=-1$, dans la congruence de condition (17.), et on aura

$$(-1)^p-1\equiv 0 \quad (\text{mod. } 2p+1);$$

ce qui montre que p doit être un nombre pair.

En appliquant aux congruences du second degré les mêmes principes dont nous avons fait usage pour résoudre celles du premier degré, on pourrait trouver la résolution générale de la congruence

$$x^2+qx+r\equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

dans laquelle p est un nombre quelconque, pourvu que l'on connût tous les facteurs premiers de p.

En général étant proposée une congruence d'un degré quelconque

$$X=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n\equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

dans laquelle p est un nombre premier, on divisera $x^{p-1}-1$ par X (en faisant usage de la même méthode dont nous nous sommes servis pour les congruences du second degré) et on obtiendra un reste de la forme

$$X_1=b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}\ldots\ldots+b_{n-1}x+b_n.$$

Maintenant si la congruence proposée a n racines entières, on devra avoir les n congruence de condition

$$b_1\equiv 0 \ (\text{mod. } p),\ b_2\equiv 0 \ (\text{mod. } p).\ \ldots\ldots\ b_n\equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

et on sera assuré que si elles sont satisfaites, la congruence $X\equiv 0$ (mod. p), aura toutes ses racines entières; mais si cette congruence n'avait qu'un nombre $n-m$ de racines entières, alors on devrait chercher de nouveau le plus grand commun diviseur etre X et X_1, et on trouverait enfin pour reste une congruence de la forme

$$X_2=c_1x^{n-m-1}+c_2x^{n-m-2}\ldots\ldots+c_{n-m}\equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

qui donnerait les congruences de condition

$$c_1\equiv 0 \ (\text{mod. } p),\quad c_2\equiv 0 \ (\text{mod. } p),\ \ldots\ldots\ c_{n-m}\equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

dont le nombre sera toujours égal au nombre des racines entières de la congruence proposée. On voit par là que la résolution d'une congruence du degré n, qui n'a que $n-m$ racines entières, se réduira à la résolution d'une congruence du degré $n-m$, en cherchant le plus grand commun diviseur entre X et $x^{p-1}-1$.

Soit proposé, par exemple, de résoudre la congruence

$$x^\epsilon-b\equiv 0 \quad (\text{mod. } \epsilon p+1),$$

dans laquelle $ap+1$ est un nombre premier, on divisera $x^{ap}-1$ par x^a-b, et on trouvera un quotient N et le reste b^p-1; d'où il résulte que si la congruence

$$18.\quad b^p-1\equiv 0 \pmod{ap+1}$$

est résoluble, la congruence proposée aura toutes ses racines entières.

Les deux congruences de condition (17.) et (18.) avaient été trouvées par Fermat, mais avec sa méthode on ne pouvait pas trouver les conditions qui devaient être satisfaites, lorsque les congruences proposées n'étaient pas binomes: ce qu'on peut toujours effectuer par les principes que nous venons d'exposer.

La congruence de condition (18.) montre que la congruence

$$x^3-1\equiv 0 \pmod{6p+1},$$

a toujours trois racines entières lorsque $6p+1$ est un nombre premier; mais comme il est évident qu'une de ces racines est $x=1$, on pourra diviser par $x-1$, et on obtiendra la congruence du second degré

$$x^2+x+1\equiv 0 \pmod{6p+1},$$

qui aura ses deux racines entières; il faudra par conséquent que les deux congruences (16.) soient satisfaites quand on substitue pour α et β les deux racines de l'équation $x^2+x+1=0$, et que l'on change $2p+1$ en $6p+1$. Maintenant on a

$$\beta=-\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{(-3)});\quad \alpha=-\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{(-3)});$$

et partant, la congruence $\frac{\beta^{6p}-\alpha^{6p}}{\beta-\alpha}\equiv 0 \pmod{6p+1}$ deviendra la suivante:

$$\frac{1}{2^{6p}\sqrt{(-3)}}\left((1+\sqrt{(-3)})^{6p}-(1-\sqrt{(-3)})^{6p}\right)\equiv 0 \pmod{6p+1},$$

qui donnera en développant

$$\frac{1}{2^{6p}\sqrt{(-3)}}\left\{\begin{array}{l} 1+6p\sqrt{(-3)}-\frac{6p(6p-1)}{2}.3-\frac{6p(6p-1)(6p-2)}{2\,.\,3}.3\sqrt{(-3)}+\frac{6p(6p-1)(6p-2)(6p-3)}{2\,.\,3\,.\,4}.3^2+\text{etc.} \\ -1+6p\sqrt{(-3)}+\frac{6p(6p-1)}{2}.3-\frac{6p(6p-1)(6p-2)}{2\,.\,3}.3\sqrt{(-3)}-\frac{6p(6p-1)(6p-2)(6p-3)}{2\,.\,3\,.\,4}.3^2+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{6p-1}}\left(6p-\frac{6p(6p-1)(6p-2)}{2\,.\,3}.3+\frac{6p(6p-1)(6p-2)(6p-3)(6p-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.3^2-\text{etc.}\right)\equiv 0 \pmod{6p+1};$$

et par conséquent

$$19.\quad 6p-\frac{6p(6p-1)(6p-2)}{2\,.\,3}.3+\frac{6p(6p-1)(6p-2)(6p-3)(6p-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.3^2-\text{etc.}\equiv 0 \pmod{6p+1}.$$

Si l'on substitue les valeurs de α et β dans la congruence

$$\alpha\beta\left(\frac{\beta^{6p-1}-\alpha^{6p-1}}{\beta-\alpha}\right)+1\equiv 0 \pmod{6p+1},$$

on aura, après avoir développé, la congruence

20. $$(6p-1)-\frac{(6p-1)(6p-2)(6p-3)}{2\,.\,3}.3+\frac{(6p-1)(6p-2)(6p-3)(6p-4)(6p-5)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.3^2-\text{etc.}\ldots-2^{6p-2}\equiv 0\ (\text{mod. } 6p+1).$$

Les deux congruences (19.) et (20.), que nous venons de trouver, et qui doivent toujours être satisfaites en même tems, lorsque $6p+1$ est un nombre premier, renferment un théorème exclusif et assez curieux, sur les nombres premiers de la forme $6p+1$.

A présent si l'on effectue l'élimination de $6p$, entre la congruence

$$6p-\frac{6p(6p-1)(6p-2)}{2\,.\,3}.3+\frac{6p(6p-1)(6p-2)(6p-3)(6p-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.3^2-\text{etc.}\equiv 0\ (\text{mod } 6p+1),$$

et l'autre, qui est toujours résoluble:

$$6p+1\equiv 0\quad (\text{mod. } 6p+1)$$

on trouvera, après les réductions,

$$-1+\frac{1.2.3}{1.2.3}.3-\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3.4.5}.3^2+\ldots\mp 3^{3p-1}$$

$$\equiv -1+3-3^2\ldots\mp 3^{3p-1}\equiv\frac{(-3)^{3p}-1}{4}\equiv(-3)^{3p}-1\equiv 0\ (\text{mod. } 6p+1).$$

Lorsque $p=2n$, cette dernière congruence deviendra

$$3^{6n}-1\equiv 0\quad (\text{mod. } 12n+1),$$

et celle-ci sera toujours résoluble d'après ce qui précède: d'où il résulte, par la congruence de condition (17.), que la congruence $x^2-3\equiv 0$ (mod. $12n+1$) est toujours résoluble lorsque $12n+1$ est un nombre premier. On pourrait appliquer les mêmes principes à des congruences de degrés plus élevés, et on obtiendrait un grand nombre de théorèmes nouveaux, du même genre que ceux que nous venons d'énoncer; mais ces recherches nous écarteraient trop de notre but, et nous allons exposer de préférence quelques applications de la théorie des congruences à la résolution d'une classe d'équations indéterminées dont Lagrange a considéré les plus simples.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation

$$y=\frac{a+a_1x+a_2x^2\ldots\ldots+a_nx^n}{e+e_1x+e_2x^2\ldots\ldots+e_mx^m}=\frac{X}{X_1};$$

on voit facilement que ce problème se réduit à la résolution de la congruence $X\equiv 0$ (mod. X_1); mais comme on a aussi identiquement $X_1\equiv 0$ (mod. X_1), on pourra éliminer x entre ces deux congruences et on trouvera, après l'élimination, une congruence de condition $D\equiv 0$ (mod. X_1), dans laquelle D sera une fonction donnée des coefficiens

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_n;\quad e,\ e_1,\ e_2,\ \ldots\ldots\ e_m;$$

et il faudra que X_1 divise le nombre D. Maintenant supposons que tous les diviseurs, positifs ou négatifs, de D soient représentés par la série des nombres

$$1, d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots d_s, D;$$

l'on devra faire successivement

$$X_1 = 1; \quad X_1 = d_1; \quad X_1 = d_2; \quad \ldots\ldots \quad X_1 = d_s; \quad X_1 = D;$$

et en cherchant les racines entières de ces équations, on aura toutes les valeurs de x qui résolvent la congruence $X \equiv 0$ (mod. X_1), et par suite l'équation

$$y = \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_n x^n}{e + e_1 x + e_2 x^2 \ldots\ldots + e_m x^m} = \frac{X}{X_1}.$$

Etant donnée la même fraction $\frac{X}{X_1}$, on peut trouver aussi tous les nombres entiers qui, pour une même valeur de x, divisent à la fois le numérateur et le dénominateur. En effet si l'on représente en général par δ l'un de ces facteurs communs, on aura $X \equiv 0$ (mod. δ); $X_1 \equiv 0$ (mod. δ); et en éliminant x entre ces deux congruences (ou ce qui revient au même entre les deux équations $X = 0$, $X_1 = 0$), on aura la congruence de condition $D \equiv 0$ (mod. δ), et le nombre δ devra se trouver parmi les diviseurs de D. Il est clair que si X et X_1 avaient une racine commune α, il faudrait commencer par diviser ces deux polynomes par $x - \alpha$, autrement on aurait toujours $D = 0$.

Etant données les deux fonctions à deux inconnues $\varphi(x, y)$; $F(x, y)$; si elles ont un facteur commun δ, on aura toujours

$$\varphi(x, y) \equiv 0 \text{ (mod. } \delta); \quad F(x, y) \equiv 0 \text{ (mod. } \delta);$$

et en éliminant x ou y entre ces deux congruences, on aura deux autres congruences de la forme

$$\Psi(x) \equiv 0 \text{ (mod. } \delta); \quad \Psi_1(y) \equiv 0 \text{ (mod. } \delta).$$

Soit proposé maintenant de résoudre en nombres entiers les deux équations simultanées

$$\varphi(x, y) = F(x, y) \cdot \psi(x, y, z); \quad \Phi(x, y) = 0;$$

que nous exprimerons pour abréger par $\varphi = F \cdot \psi$; $\Phi = 0$; on pourra les réduire aux congruences

$$\varphi \equiv 0 \text{ (mod. } F); \quad \Phi \equiv 0 \text{ (mod. } F); \quad F \equiv 0 \text{ (mod. } F);$$

et en éliminant x et y entre ces trois congruences, on aura la congruence de condition

$$D \equiv 0 \quad \text{(mod. } F),$$

d'où l'on déduira toutes les valeurs possibles de F: l'on aura ainsi trois équations et trois inconnues, et les deux équations proposées seront résolues complètement.

Etant proposées les deux équations simultanées

$$\Phi(x,z)=\varphi(x,z).F(x,y,z);\quad \Phi_1(x,z)=\varphi(x,z).F_1(x,y,z);$$

que nous indiquerons, pour abréger, par

$$\Phi=\varphi.F;\quad \Phi_1=\varphi.F_1;$$

elles se transformeront dans les congruences

$$\Phi\equiv 0\ (\text{mod.}\ \varphi);\quad \Phi_1\equiv 0\ (\text{mod.}\ \varphi);\quad \varphi\equiv 0\ (\text{mod.}\ \varphi);$$

d'où l'on déduira, par l'élimination, la congruence de condition $D\equiv 0\ (\text{mod.}\ \varphi)$, qui fournira toutes les valeurs possibles de φ; et l'on aura résolu complètement les deux équations proposées. On pourrait appliquer ces principes à des équations contenant un plus grand nombre d'inconnues; mais nous traiterons séparément cette matière dans un mémoire particulier sur les congruences à module variable.

En reprenant les congruences de condition, que nous avons données précédemment, il est clair que l'on pourra éliminer les inconnues entre la congruence à plusieurs inconnues

$$\varphi(x,y,z,\ldots\ \text{etc.})\equiv 0\quad (\text{mod.}\ p),$$

(dans laquelle p est un nombre premier) que nous indiquerons pour abréger par $\varphi\equiv 0$ (mod. p), et les suivantes

$$x^{p-1}-1\equiv 0\ (\text{mod.}\ p);\ y^{p-1}-1\equiv 0\ (\text{mod.}\ p);\ z^{p-1}-1\equiv 0\ (\text{mod.}\ p);\ \ldots\ \text{etc.};$$

de la même manière que s'il s'agissait d'éliminer entre les équations

$$\varphi=0;\quad x^{p-1}-1=0;\quad y^{p-1}-1=0;\quad z^{p-1}-1=0;\ \ldots\ \text{etc.};$$

et que le résultat sera de la même forme: à présent pour éliminer les inconnues entre ces équations, on peut substituer dans la première toutes les valeurs de $x, y, z, \ldots$ etc., déduites des autres équations, et comme l'on a

$$x=1;\quad x=\cos\frac{2\pi}{p-1}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{p-1};\quad x=\cos\frac{4\pi}{p-1}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{4\pi}{p-1};$$
$$\ldots\ldots\ x=\cos\frac{2(p-2)\pi}{p-1}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2(p-2)\pi}{p-1}:$$
$$y=1;\quad y=\cos\frac{2\pi}{p-1}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{p-1};\quad y=\cos\frac{4\pi}{p-1}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{4\pi}{p-1};$$
$$\ldots\ldots\ y=\cos\frac{2(p-2)\pi}{p-1}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2(p-2)\pi}{p-1}:$$

. . . . etc.:

en substituant l'une après l'autre toutes ces valeurs dans l'équation $\varphi = 0$, et faisant le produit de toutes les fonctions semblables que l'on obtiendra de cette manière, on trouvera la congruence de condition

$$\sum_{x=0}^{x=p-1} \sum_{y=0}^{y=p-1} \sum_{z=0}^{z=p-1} \ldots \log \varphi \left(\cos\frac{2x\pi}{p-1} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2x\pi}{p-1},\ \cos\frac{2y\pi}{p-1} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2y\pi}{p-1},\ \cos\frac{2z\pi}{p-1} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2z\pi}{p-1},\ \ldots \text{etc.}\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

Cette congruence parait assez singulière à cause des fonctions circulaires qu'elle renferme; cependant en observant le rapport qui existe entre la congruence $a \equiv a + px \pmod{p}$, et l'équation $\cos\frac{a\pi}{p} = \cos\frac{(a+px)\pi}{p}$, lorsque a, p et x, sont des nombres entiers, on pourrait se rendre compte aisément de la forme de cette expression. On pourrait déduire de là plusieurs théorèmes connus sur les congruences; mais cette route serait longue et pénible, et nous préférons de partir d'une autre équation fondamentale qui servira à retrouver directement tout ce que l'on savait sur la théorie des congruences, et à découvrir beaucoup de propositions nouvelles. En observant que quoique par notre théorie on ne trouve que les racines inégales de la congruence $\varphi = 0$, on obtiendra cependant les racines égales par la méthode dont nous avons fait usage pour les équations indéterminées; et même on les trouvera directement en éliminant entre les congruences

$$\varphi \equiv 0 \pmod{p};\quad \frac{d\varphi}{dx} \equiv 0 \pmod{p};\quad \frac{d\varphi}{dy} \equiv 0 \pmod{p};\ \ldots \text{ etc.}$$

Etant donnée l'équation à une seule inconnue

$$x^m - 1 = 0,$$

si l'on représente par P_n, P_{n-m}, P_{n-2m}, ... etc., les sommes des puissances n^{mes}, $(n-m)^{\text{mes}}$, $(n-2m)^{\text{mes}}$, ... etc. de ses racines, on aura

$$P_n = P_{n-m} = P_{n-2m} \ldots = P_{n-rm} = \text{etc.};$$

de sorte que si n est un multiple de m, on obtient $P_n = m$; et dans le cas contraire on trouve $P_n = 0$. En exprimant les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, en fonctions circulaires, on aura

$$P_n = \left\{ \begin{array}{l} \left(\cos\frac{0\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{0\pi}{m}\right)^n + \left(\cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^n \ldots\ldots \\ + \left(\cos\frac{2u\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2u\pi}{m}\right)^n \ldots\ldots + \left(\cos\frac{2(m-1)\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)^n. \end{array} \right.$$

Si l'on transforme le second membre au moyen de la relation connue

$$(\cos z + \sqrt{(-1)}\sin z)^n = \cos nz + \sqrt{(-1)}\sin nz,$$

et qu'on néglige les imaginaires qui, dans le cas actuel, doivent nécessai-

rement se détruire, on obtiendra

21. $$P_n = \cos\frac{0n\pi}{m} + \cos\frac{2n\pi}{m} + \cos\frac{4n\pi}{m} \dots + \cos\frac{2un\pi}{m} \dots + \cos\frac{2(m-1)n\pi}{m}$$

$$= \sum_{u=0}^{u=m} \cos\frac{2un\pi}{m} = \frac{\sin 2\left(n-\frac{n}{2m}\right)\pi + \sin\frac{n\pi}{m}}{2\sin\frac{n\pi}{m}};$$

et la valeur de cette expression sera m ou zéro, suivant que le nombre $\frac{n}{m}$ sera entier ou fractionnaire.

Il résulte de là que si l'on prend successivement la somme des puissances n^{mes} des équations

$$x-1=0,\quad x^2-1=0,\quad x^3-1=0,\quad \dots\dots\quad x^m-1=0,$$

on aura la somme des diviseurs de n, compris dans les nombres 1, 2, 3, ... m; et cette somme pourra être représentée par la formule

$$\sum_{x=1}^{x=m+1}\sum_{y=0}^{y=x} \cos\frac{2ny\pi}{x} = \sum_{x=1}^{x=m+1} \frac{\sin 2\left(n-\frac{n}{2x}\right)\pi + \sin\frac{n\pi}{x}}{2\sin\frac{n\pi}{x}}.$$

On trouverait de même que le nombre des diviseurs de n, compris dans la série 1, 2, 3, ... m, est donné par l'expression

$$\sum_{x=1}^{x=m+1}\sum_{y=0}^{y=x} \frac{1}{x}\cos\frac{2ny\pi}{x} = \sum_{x=1}^{x=m+1} \frac{\sin 2\left(n-\frac{n}{2x}\right)\pi + \sin\frac{n\pi}{x}}{2x\sin\frac{n\pi}{x}}.$$

Si l'on voulait exprimer la somme et le nombre de tous les diviseurs de n, en représentant par $\int(n)$ la première de ces fonctions, et par $\partial(n)$ la seconde, on aurait

$$\int(n) = \sum_{x=1}^{x=n+1}\sum_{y=0}^{y=x} \cos\frac{2ny\pi}{x},$$

$$\partial(n) = \sum_{x=1}^{x=n+1}\sum_{y=0}^{y=x} \frac{1}{x}\cos\frac{2ny\pi}{x}.$$

On sait que lorsque n est un nombre premier, on a

$$\int(n) = n+1;\quad \partial(n) = 2;$$

nous aurons donc, en changeant les limites des variables, les deux équations

$$\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{y=0}^{y=x} \cos\frac{2ny\pi}{x} = 1;\quad \sum_{x=1}^{x=n}\sum_{y=0}^{y=x} \frac{1}{x}\cos\frac{2ny\pi}{x} = 1;$$

qui renferment deux propriétés spéciales des nombres premiers.

On a vu que, n et m étant deux nombres entiers, la formule

$$\frac{\sin 2\left(n-\frac{n}{2m}\right)\pi+\sin\frac{n\pi}{m}}{2\sin\frac{n\pi}{m}}$$

a pour valeur m, si n est divisible par m, et qu'elle se réduit à zéro lorsque cette condition n'est pas satisfaite. Nous avons démontré de plus, que p étant un nombre premier, l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(p-1)+1}{p}$$

ne peut devenir un nombre entier que lorsque p est un nombre premier; en faisant donc

$$m=p,\quad \text{et}\quad n=1.2.3\ldots\ldots(p-1)+1,$$

dans la formule (21.), elle se transformera en celle-ci:

$$\frac{\sin 2\left(1.2.3\ldots(p-1)+1-\frac{1.2.3\ldots(p-1)+1}{2p}\right)\pi+\sin\left(\frac{1.2.3\ldots(p-1)+1}{2p}\right)\pi}{2\sin\left(\frac{1.2.3\ldots(p-1)+1}{2p}\right)\pi},$$

qui devient p lorsque p est un nombre premier, et qui se réduit à zéro dans le cas contraire. Ainsi cette formule représente exclusivement tous les nombres premiers. Si l'on voulait exprimer analytiquement la somme des nombres premiers compris dans la série

$$a,\quad a+1,\quad a+2,\quad \ldots\ldots\quad a+b-1,$$

on aurait la formule

$$\sum_{x=a}^{x=a+b}\frac{\sin 2\left(1.2.3\ldots(x-1)+1-\frac{1.2.3\ldots(x-1)+1}{2x}\right)\pi+\sin\left(\frac{1.2.3\ldots(x-1)+1}{2x}\right)\pi}{2\sin\left(\frac{1.2.3\ldots(x-1)+1}{2x}\right)\pi}.$$

On peut généraliser beaucoup ces expressions, et les appliquer aux séries périodiques, aux fonctions discontinues et à d'autres recherches: mais ce que nous en venons de dire suffit pour le moment.

Puisque la formule

$$\frac{1}{m}\left\{\begin{matrix}\left(\cos\frac{0\pi}{m}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{0\pi}{m}\right)^n+\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^n\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots+\left(\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)^n\end{matrix}\right\},$$

a pour valeur l'unité ou zéro, suivant que $\frac{n}{m}$ est un nombre entier ou fractionnaire, il s'en suit que le nombre N des racines inégales de la congruence à plusieurs inconnues

$$\varphi(x, y, z, \ldots\ldots \text{etc.}) \equiv 0 \pmod{m},$$

(que nous exprimerons pour abréger par $\varphi \equiv 0 \pmod{m}$) dans laquelle on considère pour $x, y, z, \ldots\ldots$ etc., les valeurs entières

$$x = a,\quad a+1,\quad a+2,\ \ldots\ldots\ b;$$
$$y = c,\quad c+1,\quad c+2,\ \ldots\ldots\ d;$$
$$z = e,\quad e+1,\quad e+2,\ \ldots\ldots\ f;$$

sera donné par l'équation

$$22.\ nN = \sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=c}^{y=d} \sum_{z=e}^{z=f} \ldots \left\{ \begin{array}{l} \left(\cos\frac{0\varphi\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{0\varphi\pi}{m}\right) + \left(\cos\frac{2\varphi\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2\varphi\pi}{m}\right)\ldots\ldots \\ + \left(\cos\frac{2u\varphi\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2u\varphi\pi}{m}\right)\ldots + \left(\cos\frac{2(m-1)\varphi\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2(m-1)\varphi\pi}{m}\right) \end{array} \right\}$$

qui peut servir dans plusieurs cas à trouver la valeur de l'intégrale définie

$$\sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=c}^{y=d} \sum_{z=e}^{z=f} \ldots\ldots \cos\frac{a\varphi(x, y, z, \ldots \text{etc.})\pi}{m},$$

comme nous le montrerons dans la suite.

De même la somme des racines de la congruence $\varphi \equiv 0 \pmod{m}$, comprises entre les mêmes limites que celles qui ont servi à déterminer la formule (22.), sera donnée par l'intégrale

$$23.\ \frac{1}{m} \sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=c}^{y=d} \sum_{z=e}^{z=f} \ldots (x+y+z\ldots + \text{etc.}) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\cos\frac{2\varphi\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2\varphi\pi}{m}\right)\ldots\ldots \\ \ldots + \left(\cos\frac{2(m-1)\varphi\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2(m-1)\varphi\pi}{m}\right) \end{array} \right\}.$$

On pourrait trouver une infinité de formules du même genre; mais celles-ci suffisent déjà pour notre objet; et même elles sont trop générales, de manière qu'il faut les particulariser pour les appliquer avec facilité aux diverses questions que nous devrons résoudre.

Nous observerons d'abord que, d'après ce que nous avons dit précédemment, il suffira d'intégrer entre les limites

$$0 = x = y = z = \ldots\ldots \text{etc.},$$
$$m = x = y = z = \ldots\ldots \text{etc.},$$

pour savoir si la congruence proposée est ou n'est pas résoluble; et qu'ensuite les imaginaires devant se détruire entre eux, on pourra considérer l'intégrale

$$24.\ \frac{1}{m} \sum_{x=0}^{x=m} \sum_{y=0}^{y=m} \sum_{z=0}^{z=m} \ldots \left(1 + \cos\frac{2\varphi\pi}{m} + \cos\frac{4\varphi\pi}{m} \ldots + \cos\frac{2u\varphi\pi}{m} \ldots + \cos\frac{2(m-1)\varphi\pi}{m}\right),$$

au lieu de celle fournie par l'équation (22.), et l'intégrale

$$25.\ \frac{1}{m} \sum_{x=0}^{x=m} \sum_{y=0}^{y=m} \sum_{z=0}^{z=m} \ldots (x+y+z\ldots + \text{etc.}) \left(1 + \cos\frac{2\varphi\pi}{m} + \cos\frac{4\varphi\pi}{m} \ldots + \cos\frac{2u\varphi\pi}{m} \ldots + \cos\frac{2(m-1)\varphi\pi}{m}\right),$$

à la place de la formule (23.).

(La suite dans le cahier prochain.)

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
3,700	1,306 1249 70	4337 64	1,305 5940 43	4348 25	9,999 4690 73	10 61
3,701	1,306 5587 34	4337 65	1,306 0288 68	4348 24	9,999 4701 34	10 58
02	06 9925 00	4337 67	06 4636 92	4348 23	4711 92	10 57
03	07 4262 66	4337 68	06 8985 15	4348 22	4722 49	10 54
04	07 8600 34	4337 69	07 3333 37	4348 21	4733 03	10 53
05	08 2938 02	4337 70	07 7681 58	4348 20	4743 56	10 50
3,706	1,308 7275 72	4337 71	1,308 2029 78	4348 19	9,999 4754 06	10 48
07	09 1613 43	4337 72	08 6377 97	4348 18	4764 54	10 46
08	09 5951 14	4337 73	09 0726 14	4348 17	4775 00	10 44
09	10 0288 87	4337 74	09 5074 31	4348 16	4785 44	10 42
10	10 4626 61	4337 75	09 9422 47	4348 15	4795 86	10 40
3,711	1,310 8964 36	4337 76	1,310 3770 62	4348 14	9,999 4806 26	10 38
12	11 3302 12	4337 77	10 8118 75	4348 13	4816 64	10 35
13	11 7639 89	4337 78	11 2466 88	4348 12	4826 99	10 34
14	12 1977 67	4337 79	11 6815 00	4348 11	4837 33	10 32
15	12 6315 46	4337 80	12 1163 10	4348 10	4847 65	10 29
3,716	1,313 0653 26	4337 81	1,312 5511 20	4348 09	9,999 4857 94	10 27
17	13 4991 07	4337 82	12 9859 28	4348 08	4868 21	10 25
18	13 9328 89	4337 83	13 4207 36	4348 06	4878 46	10 23
19	14 3666 73	4337 84	13 8555 42	4348 05	4888 69	10 21
20	14 8004 57	4337 85	14 2903 47	4348 04	4898 90	10 20
3,721	1,315 2342 42	4337 86	1,314 7251 52	4348 03	9,999 4909 10	10 17
22	15 6680 28	4337 87	15 1599 55	4348 02	4919 27	10 15
23	16 1018 16	4337 88	15 5947 58	4348 01	4929 42	10 13
24	16 5356 04	4337 89	16 0295 59	4348 00	4939 55	10 11
25	16 9693 93	4337 90	16 4643 59	4347 99	4949 66	10 10
3,726	1,317 4031 83	4337 91	1,316 8991 59	4347 98	9,999 4959 76	10 07
27	17 8369 74	4337 92	17 3339 57	4347 97	4969 83	10 06
28	18 2707 67	4337 93	17 7687 55	4347 96	4979 89	10 03
29	18 7045 60	4337 94	18 2035 51	4347 95	4989 91	10 01
30	19 1383 54	4337 95	18 6383 46	4347 94	4999 92	9 99
3,731	1,319 5721 49	4337 96	1,319 0731 40	4347 93	9,999 5009 91	9 97
32	20 0059 45	4337 97	19 5079 34	4347 92	5019 88	9 95
33	20 4397 43	4337 98	19 9427 26	4347 91	5029 83	9 93
34	20 8735 41	4337 99	20 3775 17	4347 90	5039 76	9 92
35	21 3073 40	4338 00	20 8123 08	4347 89	5049 68	9 89
3,736	1,321 7411 40	4338 01	1,321 2470 97	4347 88	9,999 5059 57	9 86
37	22 1749 42	4338 02	21 6818 85	4347 87	5069 43	9 85
38	22 6087 44	4338 03	22 1166 72	4347 86	5079 28	9 83
39	23 0425 47	4338 04	22 5514 58	4347 85	5089 11	9 81
40	23 4763 51	4338 05	22 9862 44	4347 84	5098 92	9 79
3,741	1,323 9101 57	4338 06	1,323 4210 28	4347 83	9,999 5108 71	9 77
42	24 3439 63	4338 07	23 8558 11	4347 82	5118 48	9 76
43	24 7777 70	4338 08	24 2905 94	4347 81	5128 24	9 73
44	25 2115 78	4338 09	24 7253 76	4347 81	5137 97	9 72
45	25 6453 87	4338 10	25 1601 56	4347 80	5147 69	9 69
3,746	1,326 0791 97	4338 11	1,325 5949 35	4347 79	9,999 5157 38	9 68
47	26 5130 08	4338 12	26 0297 14	4347 78	5167 06	9 65
48	26 9468 20	4338 13	26 4644 91	4347 77	5176 71	9 64
49	27 3806 33	4338 14	26 8992 68	4347 76	5186 35	9 61
50	27 8144 47		27 3340 43		5195 96	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
3,750	1,327 8144 47	4338 15	1,327 3340 43	4347 75	9,999 5196 96	9 60
3,751	1,328 2482 62	4338 16	1,327 7688 18	4347 73	9,999 5206 66	9 59
52	28 6820 77	4338 17	28 2035 92	4347 73	5215 86	9 56
53	29 1158 94	4338 18	28 6383 65	4347 72	5224 72	9 54
54	29 5497 12	4338 19	29 0731 36	4347 71	5234 25	9 53
55	29 9835 30	4338 20	29 5079 07	4347 70	5243 77	9 50
3,756	1,330 4173 50	4338 21	1,329 9426 77	4347 69	9,999 5253 27	9 49
57	30 8511 70	4338 22	30 3774 46	4347 68	5262 76	9 46
58	31 2849 92	4338 22	30 8122 14	4347 67	5272 22	9 45
59	31 7188 14	4338 23	31 2469 81	4347 66	5281 67	9 42
60	32 1526 38	4338 24	31 6817 47	4347 65	5291 09	9 41
3,761	1,332 5864 62	4338 25	1,332 1165 12	4347 64	9,999 5300 50	9 40
62	33 0202 87	4338 26	32 5512 77	4347 63	5309 90	9 37
63	33 4541 13	4338 27	32 9860 40	4347 62	5319 27	9 35
64	33 8879 40	4338 28	33 4208 02	4347 61	5328 62	9 34
65	34 3217 68	4338 29	33 8555 64	4347 61	5337 96	9 31
3,766	1,334 7555 97	4338 30	1,334 2903 24	4347 60	9,999 5347 27	9 30
67	35 1894 27	4338 31	34 7250 84	4347 59	5356 57	9 28
68	35 6232 58	4338 32	35 1598 43	4347 58	5365 85	9 26
69	36 0570 90	4338 33	35 5946 00	4347 57	5375 11	9 24
70	36 4909 22	4338 34	36 0293 57	4347 56	5384 35	9 22
3,771	1,336 9247 56	4338 35	1,336 4641 13	4347 55	9,999 5393 57	9 21
72	37 3585 90	4338 36	36 8988 68	4347 54	5402 78	9 18
73	37 7924 26	4338 36	37 3336 22	4347 53	5411 96	9 17
74	38 2262 62	4338 37	37 7683 75	4347 52	5421 13	9 14
75	38 6601 00	4338 38	38 2031 27	4347 51	5430 27	9 13
3,776	1,339 0939 38	4338 39	1,338 6378 78	4347 50	9,999 5439 40	9 12
77	39 5277 77	4338 40	39 0726 29	4347 49	5448 52	9 09
78	39 9616 17	4338 41	39 5073 78	4347 48	5457 61	9 07
79	40 3954 58	4338 42	39 9421 26	4347 48	5466 68	9 06
80	40 8293 00	4338 43	40 3768 74	4347 47	5475 74	9 03
3,781	1,341 2631 43	4338 44	1,340 8116 20	4347 46	9,999 5484 77	9 02
82	41 6969 87	4338 45	41 2463 66	4347 45	5493 79	9 01
83	42 1308 31	4338 46	41 6811 11	4347 44	5502 80	8 98
84	42 5646 77	4338 46	42 1158 55	4347 43	5511 78	8 97
85	42 9985 23	4338 47	42 5505 98	4347 42	5520 75	8 94
3,786	1,343 4323 71	4338 48	1,342 9853 40	4347 41	9,999 5529 69	8 93
87	43 8662 19	4338 49	43 4200 81	4347 40	5538 62	8 92
88	44 3000 68	4338 50	43 8548 22	4347 40	5547 54	8 90
89	44 7339 18	4338 51	44 2895 62	4347 39	5556 44	8 88
90	45 1677 69	4338 52	44 7243 00	4347 38	5565 32	8 86
3,791	1,345 6016 20	4338 53	1,345 1590 38	4347 37	9,999 5574 18	8 85
92	46 0354 72	4338 53	45 5937 75	4347 36	5583 03	8 82
93	46 4693 26	4338 54	46 0285 11	4347 35	5591 85	8 81
94	46 9031 80	4338 55	46 4632 46	4347 34	5600 66	8 79
95	47 3370 35	4338 56	46 8979 80	4347 33	5609 45	8 77
3,796	1,347 7708 91	4338 57	1,347 3327 13	4347 33	9,999 5618 22	8 76
97	48 2047 48	4338 58	47 7674 46	4347 32	5626 98	8 73
98	48 6386 06	4338 59	48 2021 77	4347 31	5635 71	8 72
99	49 0724 65	4338 60	48 6360 08	4347 30	5644 43	8 70
3,800	49 5063 25		49 0716 38		5653 13	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
3,800	1,349 5063 23	4338 61	1,349 0716 38	4347 29	9,999 5653 13	8 68
3,801	1,349 9401 85	4338 62	1,349 5063 67	4347 28	9,999 5661 82	8 67
02	50 3740 46	4338 62	49 9410 95	4347 27	5670 49	8 65
03	50 8079 09	4338 63	50 3758 22	4347 26	5679 14	8 63
04	51 2417 72	4338 64	50 8105 49	4347 26	5687 77	8 62
05	51 6756 36	4338 65	51 2452 74	4347 25	5696 39	8 60
3,806	1,352 1095 00	4338 66	1,351 6799 99	4347 24	9,999 5704 99	8 58
07	52 5433 66	4338 66	52 1147 23	4347 23	5713 57	8 57
08	52 9772 32	4338 67	52 5494 46	4347 22	5722 14	8 56
09	53 4110 99	4338 68	52 9841 68	4347 21	5730 69	8 53
10	53 8449 67	4338 69	53 4188 89	4347 20	5739 22	8 51
3,811	1,354 2788 37	4338 70	1,353 8536 09	4347 20	9,999 5747 73	8 50
12	54 7127 07	4338 71	54 2883 29	4347 19	5756 23	8 48
13	55 1465 77	4338 72	54 7230 48	4347 18	5764 71	8 46
14	55 5804 49	4338 73	55 1577 65	4347 17	5773 17	8 44
15	56 0143 21	4338 73	55 5924 82	4347 16	5781 61	8 43
3,816	1,356 4481 94	4338 74	1,356 0271 98	4347 16	9,999 5790 04	8 41
17	56 8820 69	4338 75	56 4619 14	4347 14	5798 45	8 39
18	57 3159 44	4338 76	56 8966 28	4347 14	5806 84	8 38
19	57 7498 20	4338 77	57 3313 41	4347 13	5815 22	8 36
20	58 1836 96	4338 78	57 7660 54	4347 12	5823 58	8 34
3,821	1,358 6175 74	4338 78	1,358 2007 66	4347 11	9,999 5831 92	8 33
22	59 0514 52	4338 79	58 6354 77	4347 10	5840 25	8 31
23	59 4853 31	4338 80	59 0701 87	4347 10	5848 56	8 30
24	59 9192 11	4338 81	59 5048 97	4347 09	5856 86	8 28
25	60 3530 92	4338 82	59 9396 06	4347 08	5865 14	8 26
3,826	1,360 7869 73	4338 82	1,360 3743 13	4347 07	9,999 5873 40	8 24
27	61 2208 56	4338 83	60 8090 20	4347 06	5881 64	8 23
28	61 6547 39	4338 84	61 2437 26	4347 05	5889 87	8 22
29	62 0886 23	4338 85	61 6784 32	4347 05	5898 09	8 20
30	62 5225 08	4338 86	62 1131 36	4347 04	5906 29	8 18
3,831	1,362 9563 93	4338 87	1,362 5478 40	4347 03	9,999 5914 47	8 16
32	63 3902 80	4338 87	62 9825 43	4347 02	5922 63	8 15
33	63 8241 67	4338 88	63 4172 45	4347 01	5930 78	8 13
34	64 2580 55	4338 89	63 8519 46	4347 00	5938 91	8 11
35	64 6919 44	4338 90	64 2866 46	4347 00	5947 02	8 10
3,836	1,365 1258 34	4338 91	1,364 7213 46	4346 99	9,999 5955 12	8 08
37	65 5597 25	4338 92	65 1560 44	4346 98	5963 20	8 06
38	65 9936 16	4338 92	65 5907 42	4346 97	5971 26	8 04
39	66 4275 09	4338 93	66 0254 39	4346 96	5979 30	8 03
40	66 8614 02	4338 94	66 4601 35	4346 96	5987 33	8 02
3,841	1,367 2952 96	4338 95	1,366 8948 31	4346 95	9,999 5995 35	8 00
42	67 7291 90	4338 95	67 3295 26	4346 94	6003 35	7 98
43	68 1630 86	4338 96	67 7642 19	4346 93	6011 33	7 97
44	68 5969 82	4338 97	68 1989 13	4346 92	6019 30	7 96
45	69 0308 79	4338 98	68 6336 05	4346 92	6027 26	7 94
3,846	1,369 4647 77	4338 99	1,369 0682 96	4346 91	9,999 6035 20	7 92
47	69 8986 75	4338 99	69 5029 87	4346 90	6043 12	7 91
48	70 3325 74	4339 00	69 9376 77	4346 89	6051 03	7 89
49	70 7664 75	4339 01	70 3723 66	4346 88	6058 92	7 88
50	71 2003 75		70 8070 55		6066 80	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
3,850	1,371 2003 75	4339 02	1,370 8070 55	4346 68	9,999 6066 80	7 85
3,851	1,371 6342 77	4339 03	1,371 2417 12	4346 67	9,999 6074 65	7 84
52	72 0681 80	4339 03	71 6764 20	4346 66	6082 49	7 83
53	72 5020 83	4339 04	72 1111 15	4346 85	6090 32	7 82
54	72 9359 87	4339 05	72 5458 01	4346 85	6098 14	7 80
55	73 3698 92	4339 06	72 9804 85	4346 84	6105 94	7 78
3,856	1,373 8037 97	4339 06	1,373 4151 69	4346 83	9,999 6113 72	7 76
57	74 2377 04	4339 07	73 8498 52	4346 82	6121 48	7 75
58	74 6716 11	4339 08	74 2845 34	4346 81	6129 23	7 73
59	75 1055 19	4339 09	74 7192 15	4346 81	6136 96	7.72
60	75 5394 28	4339 10	75 1538 96	4346 80	6144 68	7 70
3,861	1,375 9733 37	4339 10	1,375 5885 75	4346 79	9,999 6152 38	7 68
62	76 4072 48	4339 11	76 0232 54	4346 78	6160 06	7 67
63	76 8411 59	4339 12	76 4579 32	4346 78	6167 73	7 66
64	77 2750 71	4339 13	76 8926 10	4346 77	6175 39	7 65
65	77 7089 83	4339 13	77 3272 87	4346 76	6183 04	7 63
3,866	1,376 1428 96	4339 14	1,377 7619 63	4346 75	9,999 6190 67	7 61
67	78 5768 11	4339 15	78 1966 38	4346 75	6198 28	7 59
68	79 0107 25	4339 16	78 6313 12	4346 74	6205 87	7 58
69	79 4446 41	4339 16	79 0659 86	4346 73	6213 45	7 57
70	79 8785 57	4339 17	79 5006 59	4346 72	6221 02	7 55
3,871	1,380 3124 75	4339 18	1,379 9353 31	4346 72	9,999 6228 57	7 54
72	80 7463 92	4339 19	80 3700 03	4346 71	6236 11	7 52
73	81 1803 11	4339 19	80 8046 73	4346 70	6243 62	7 50
74	81 6142 30	4339 20	81 2393 43	4346 69	6251 13	7 49
75	82 0481 51	4339 21	81 6740 13	4346 68	6258 62	7 48
3,876	1,382 4820 71	4339 22	1,382 1086 81	4346 68	9,989 6266 10	7 46
77	82 9159 93	4339 22	82 5433 49	4346 67	6273 56	7 44
78	83 3499 15	4339 23	82 9780 15	4346 66	6281 00	7 43
79	83 7838 39	4339 24	83 4126 82	4346 65	6288 43	7 42
80	84 2177 62	4339 25	83 8473 47	4346 66	6295 85	7 40
3,881	1,384 6516 87	4339 25	1,384 2820 12	4346 64	9,989 6303 25	7 38
82	85 0856 12	4339 26	84 7166 75	4346 63	6310 63	7 37
83	85 5195 38	4339 27	85 1513 39	4346 63	6318 00	7 36
84	85 9534 65	4339 28	85 5860 01	4346 62	6325 36	7 34
85	86 3873 93	4339 28	86 0206 63	4346 61	6332 70	7 33
3,886	1,386 8213 21	4339 29	1,386 4553 24	4346 60	9,999 6340 03	7 31
87	87 2552 50	4339 30	86 8899 84	4346 60	6347 34	7 30
88	87 6891 80	4339 30	87 3246 44	4346 59	6354 64	7 29
89	88 1231 10	4339 31	87 7593 03	4346 58	6361 93	7 27
90	88 5570 41	4339 32	88 1939 61	4346 57	6369 20	7 25
3,891	1,388 9909 73	4339 33	1,388 6286 18	4346 57	9,999 6376 45	7 24
92	89 4249 06	4339 33	89 0632 75	4346 56	6383 69	7 23
93	89 8588 39	4339 34	89 4979 31	4346 55	6390 92	7 21
94	90 2927 73	4339 35	89 9325 86	4346 55	6398 13	7 19
95	90 7267 08	4339 36	90 3672 40	4346 54	6405 32	7 18
3,896	1,391 1606 44	4339 36	1,390 8018 94	4346 53	9,999 6412 50	7 17
97	91 5945 80	4339 37	91 2365 47	4346 52	6419 67	7 15
98	92 0285 17	4339 38	91 6711 99	4346 52	6426 82	7 14
99	92 4624 55	4339 38	92 1058 51	4346 51	6433 96	7 13
3,900	92 8963 93		92 5405 02		6441 09	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
3,900	1,392 8963 93	4339 39	1,392 5406 02	4346 50	9,999 6441 08	7 11
3,901	1,393 3303 32	4339 40	1,392 9751 52	4346 49	9,999 6448 20	7 09
02	93 7642 72	4339 41	93 4098 01	4346 49	6455 29	7 09
03	94 1982 12	4339 41	93 8444 50	4346 48	6462 38	7 08
04	94 6321 54	4339 42	94 2790 98	4346 47	6469 44	7 06
05	95 0660 96	4339 43	94 7137 46	4346 47	6476 49	7 04
3,906	1,395 5000 38	4339 43	1,395 1483 91	4346 46	9,999 6483 53	7 03
07	95 9339 81	4339 44	95 5830 37	4346 45	6490 56	7 02
08	96 3679 25	4339 46	96 0176 82	4346 45	6497 57	7 00
09	96 8018 70	4339 45	96 4523 27	4346 44	6504 57	6 98
10	97 2358 16	4339 46	96 8869 71	4346 43	6511 56	6 97
3,911	1,397 6697 62	4339 47	1,397 3216 14	4346 43	9,999 6518 52	6 96
12	98 1037 08	4339 48	97 7562 56	4346 42	6525 48	6 94
13	98 5376 56	4339 48	98 1908 98	4346 41	6532 42	6 93
14	98 9716 04	4339 49	98 6255 39	4346 40	6539 35	6 92
15	99 4055 53	4339 50	99 0601 80	4346 40	6546 27	6 90
3,916	1,399 8395 03	4339 50	1,399 4948 20	4346 39	9,999 6553 17	6 89
17	1,400 2734 53	4339 51	99 9294 59	4346 38	6560 06	6 87
18	00 7074 04	4339 52	1,400 3640 97	4346 38	6566 93	6 86
19	01 1413 56	4339 52	00 7987 35	4346 37	6573 79	6 85
20	01 5753 08	4339 53	01 2333 72	4346 36	6580 64	6 83
3,921	1,402 0092 61	4339 54	1,401 6680 08	4345 36	9,999 6587 47	6 81
22	02 4432 15	4339 54	02 1026 43	4346 35	6594 28	6 81
23	02 8771 69	4339 55	02 5372 78	4346 34	6601 09	6 79
24	03 3111 24	4339 56	02 9719 12	4346 33	6607 88	6 77
25	03 7450 80	4339 56	03 4065 46	4346 33	6614 65	6 77
3,926	1,404 1790 36	4339 57	1,403 8411 78	4346 32	9,999 6621 42	6 75
27	04 6129 93	4339 58	04 2758 10	4346 31	6628 17	6 73
28	05 0469 51	4339 58	04 7104 41	4346 31	6634 90	6 72
29	05 4809 10	4339 59	05 1450 72	4346 30	6641 62	6 71
30	05 9148 69	4339 60	05 5797 02	4346 30	6648 33	6 70
3,931	1,406 3488 29	4339 61	1,406 0143 32	4346 29	9,999 6655 03	6 69
32	06 7827 89	4339 61	06 4489 61	4346 28	6661 72	6 67
33	07 2167 50	4339 62	06 8835 89	4346 28	6668 39	6 66
34	07 6507 12	4339 63	07 3182 16	4346 27	6675 04	6 65
35	08 0846 74	4339 63	07 7528 43	4346 26	6681 69	6 63
3,936	1,408 5186 38	4339 64	1,408 1874 69	4346 26	9,999 6688 32	6 62
37	08 9526 01	4339 64	08 6220 95	4346 25	6694 94	6 60
38	09 3865 66	4339 65	09 0567 20	4346 24	6701 54	6 59
39	09 8205 31	4339 66	09 4913 44	4346 24	6708 13	6 57
40	10 2544 97	4339 66	09 9259 67	4346 23	6714 70	6 57
3,941	1,410 6884 63	4339 67	1,410 3605 90	4346 22	9,999 6721 27	6 55
42	11 1224 30	4339 68	10 7952 12	4346 22	6727 82	6 54
43	11 5563 98	4339 68	11 2298 34	4346 21	6734 36	6 53
44	11 9903 66	4339 69	11 6644 55	4346 20	6740 89	6 51
45	12 4243 35	4339 70	12 0990 75	4346 20	6747 40	6 48
3,946	1,412 8583 05	4339 70	1,412 5336 94	4346 19	9,999 6753 89	6 49
47	13 2922 75	4339 71	12 9683 13	4346 18	6760 38	6 47
48	13 7262 46	4339 72	13 4029 31	4346 18	6766 85	6 47
49	14 1602 17	4339 72	13 8375 49	4346 17	6773 32	6 45
50	14 5941 90		14 2721 66		6779 77	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
3,950	1,414 6941 90	4339 73	1,414 2721 66	4346 16	9,999 6779 77	6 43
3,951	1,416 0281 62	4339 74	1,414 7067 82	4346 16	9,999 6786 20	6 42
52	15 4621 36	4339 74	15 1413 98	4346 15	6792 62	6 41
53	15 8961 10	4339 75	15 5760 13	4346 14	6799 03	6 39
54	16 3300 86	4339 76	16 0106 27	4346 14	6805 42	6 39
55	16 7640 60	4339 76	16 4452 41	4346 13	6811 81	6 37
3,956	1,417 1980 37	4339 77	1,416 8798 54	4346 13	9,999 6818 18	6 36
57	17 6320 13	4339 77	17 3144 67	4346 12	6824 54	6 34
58	18 0659 91	4339 78	17 7490 79	4346 11	6830 88	6 33
59	18 4999 69	4339 79	18 1836 90	4346 11	6837 21	6 31
60	18 9339 48	4339 79	18 6183 00	4346 10	6843 52	6 31
3,961	1,419 3679 27	4339 80	1,419 0529 10	4346 09	9,999 6849 83	6 30
62	19 8019 07	4339 81	19 4875 20	4346 09	6856 13	6 28
63	20 2358 87	4339 81	19 9221 28	4346 08	6862 41	6 27
64	20 6698 68	4339 82	20 3567 36	4346 07	6868 68	6 26
65	21 1038 50	4339 82	20 7913 44	4346 07	6874 94	6 24
3,966	1,421 5378 33	4339 83	1,421 2259 51	4346 06	9,999 6881 18	6 23
67	21 9718 16	4339 84	21 6605 57	4346 06	6887 41	6 22
68	22 4057 99	4339 84	22 0951 62	4346 05	6893 63	6 21
69	22 8397 84	4339 85	22 5297 67	4346 04	6899 84	6 20
70	23 2737 68	4339 86	22 9643 72	4346 04	6906 04	6 18
3,971	1,423 7077 54	4339 86	1,423 3989 75	4346 03	9,999 6912 22	6 16
72	24 1417 40	4339 87	23 8335 78	4346 02	6918 38	6 16
73	24 5757 27	4339 87	24 2681 81	4346 02	6924 54	6 15
74	25 0097 14	4339 88	24 7027 83	4346 01	6930 69	6 13
75	25 4437 02	4339 89	25 1373 84	4346 01	6936 82	6 11
3,976	1,425 8776 91	4339 89	1,425 5719 84	4346 00	9,999 6942 93	6 11
77	26 3116 80	4339 90	26 0065 84	4345 99	6949 04	6 10
78	26 7456 70	4339 90	26 4411 84	4345 99	6955 14	6 08
79	27 1796 60	4339 91	26 8757 82	4345 98	6961 22	6 08
80	27 6136 51	4339 92	27 3103 81	4345 98	6967 30	6 06
3,981	1,428 0476 43	4339 92	1,427 7449 78	4345 97	9,999 6973 36	6 04
82	28 4816 35	4339 93	28 1795 75	4345 96	6979 40	6 04
83	28 9156 28	4339 93	28 6141 72	4345 96	6985 44	6 02
84	29 3496 21	4339 94	29 0487 67	4345 96	6991 46	6 01
85	29 7836 15	4339 95	29 4833 63	4345 95	6997 47	6 00
3,986	1,430 2176 10	4339 95	1,429 9179 57	4345 94	9,999 7003 47	5 99
87	30 6516 05	4339 96	30 3525 51	4345 93	7009 46	5 98
88	31 0856 01	4339 96	30 7871 45	4345 93	7015 44	5 96
89	31 5195 97	4339 97	31 2217 37	4345 92	7021 40	5 95
90	31 9535 94	4339 98	31 6563 30	4345 92	7027 35	5 94
3,991	1,432 3875 92	4339 98	1,432 0909 21	4345 91	9,999 7033 29	5 93
92	32 8215 90	4339 99	32 5255 12	4345 90	7039 22	5 92
93	33 2555 89	4339 99	32 9601 03	4345 90	7045 14	5 90
94	33 6895 88	4340 00	33 3946 92	4345 89	7051 04	5 89
95	34 1235 88	4340 01	33 8292 81	4345 89	7056 93	5 88
3,996	1,434 5575 89	4340 01	1,434 2638 70	4345 88	9,999 7062 81	5 87
97	34 9915 90	4340 02	34 6984 58	4345 87	7068 68	5 86
98	35 4255 92	4340 02	35 1330 45	4345 87	7074 53	5 85
99	35 8595 94	4340 03	35 5676 32	4345 86	7080 38	5 83
4,000	36 2935 97		36 0022 18		7086 21	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,000	1,436 2935 97	4340 04	1,436 0022 18	4345 86	9,999 7086 21	5 82
4,001	1,436 7276 01	4340 04	1,436 4368 04	4345 85	9,999 7092 03	5 81
02	37 1616 05	4340 05	36 8713 89	4345 84	7097 84	5 80
03	37 5956 09	4340 05	37 3059 73	4345 84	7103 64	5 78
04	38 0296 15	4340 06	37 7405 57	4345 83	7109 42	5 78
05	38 4636 20	4340 06	38 1751 40	4345 83	7115 20	5 76
4,006	1,438 8976 27	4340 07	1,438 6097 23	4345 83	9,999 7120 96	5 75
07	39 3316 34	4340 08	39 0443 05	4345 82	7126 71	5 75
08	39 7656 41	4340 08	39 4788 87	4345 81	7132 46	5 73
09	40 1996 49	4340 09	39 9134 68	4345 81	7138 19	5 71
10	40 6336 58	4340 09	40 3480 48	4345 80	7143 90	5 71
4.011	1,441 0676 67	4340 10	1,440 7826 28	4345 79	9,909 7149 61	5 69
12	41 5016 77	4340 10	41 2172 07	4345 79	7155 30	5 69
13	41 9356 87	4340 11	41 6517 86	4345 78	7160 99	5 67
14	42 3696 98	4340 12	42 0863 64	4345 78	7166 66	5 66
15	42 8037 10	4340 12	42 5209 42	4345 77	7172 32	5 65
4,016	1,443 2377 22	4340 13	1,442 9555 19	4345 77	9,990 7177 97	5 64
17	43 6717 35	4340 13	43 3900 96	4345 76	7183 61	5 63
18	44 1057 48	4340 14	43 8246 72	4345 76	7189 24	5 61
19	44 5397 62	4340 14	44 2592 47	4345 75	7194 85	5 61
20	44 9737 76	4340 15	44 6938 22	4345 74	7200 46	5 59
4,021	1,445 4077 91	4340 16	1,445 1283 96	4345 74	9,999 7206 05	5 59
22	45 8418 06	4340 16	45 5629 70	4345 73	7211 64	5 57
23	46 2758 22	4340 17	45 9975 43	4345 73	7217 21	5 55
24	46 7098 39	4340 17	46 4321 15	4345 72	7222 76	5 55
25	47 1438 56	4340 18	46 8666 87	4345 72	7228 31	5 54
4,026	1,447 5778 74	4340 18	1,447 3012 59	4345 71	9,999 7233 85	5 53
27	48 0118 92	4340 19	47 7358 30	4345 70	7239 38	5 51
28	48 4459 11	4340 19	48 1704 00	4346 70	7244 89	5 51
29	48 8799 30	4340 20	48 6049 70	4346 69	7250 40	5 49
30	49 3139 50	4340 20	49 0395 39	4345 69	7255 89	5 49
4,031	1,449 7479 70	4340 21	1,449 4741 08	4345 68	9,999 7261 38	5 47
32	50 1819 91	4340 22	49 9086 76	4346 68	7266 85	5 46
33	50 6160 13	4340 22	50 3432 44	4345 67	7272 31	5 45
34	51 0500 35	4340 23	50 7778 11	4345 67	7277 76	5 43
35	51 4840 58	4340 23	51 2123 77	4345 66	7283 19	5 43
4,036	1,451 9180 81	4340 24	1,451 6469 43	4346 66	9,999 7288 62	5 42
37	52 3521 05	4340 24	52 0815 09	4345 65	7294 04	5 41
38	52 7861 29	4340 25	52 5160 74	4345 64	7299 45	5 39
39	53 2201 54	4340 25	52 9506 38	4346 64	7304 84	5 39
40	53 6541 79	4340 26	53 3852 02	4345 63	7310 23	5 37
4,041	1,454 0882 05	4340 26	1,453 8197 65	4345 63	9,999 7315 60	5 37
42	54 5222 31	4340 27	54 2543 28	4346 62	7320 98	5 35
43	54 9562 58	4340 27	54 6888 90	4345 62	7326 32	5 35
44	55 3902 85	4340 28	55 1234 52	4346 61	7331 67	5 33
45	55 8243 13	4340 28	55 5580 13	4345 61	7337 00	5 33
4,046	1,456 2583 41	4340 29	1,455 9925 74	4345 60	9,999 7342 33	5 31
47	56 6923 70	4340 30	56 4271 34	4345 60	7347 64	5 29
48	57 1264 00	4340 30	56 8616 93	4345 59	7352 93	5 29
49	57 5604 30	4340 31	57 2962 52	[illegible]	7358 22	5 28
50	57 9944 61		57 7308 11		7363 50	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,050	1,457 9944 61	4340 31	1,457 7308 11	4345 58	9,999 7363 50	5 27
4,051	1,458 4284 92	4340 32	1,458 1653 69	4345 58	9,999 7368 77	5 25
52	58 8625 24	4340 32	58 5999 26	4345 57	7374 02	5 25
53	59 2965 56	4340 33	59 0344 83	4345 56	7379 27	5 24
54	59 7305 89	4340 33	59 4690 40	4345 56	7384 51	5 22
55	60 1646 22	4340 34	59 9035 95	4345 55	7389 73	5 22
4,056	1,460 5986 56	4340 34	1,460 3381 51	4345 55	9,999 7394 96	5 21
57	61 0326 90	4340 35	60 7727 06	4345 54	7400 16	5 19
58	61 4667 25	4340 36	61 2072 60	4345 54	7405 35	5 18
59	61 9007 61	4340 36	61 6418 13	4345 53	7410 53	5 17
60	62 3347 97	4340 36	62 0763 67	4345 53	7415 70	5 16
4,061	1,462 7688 33	4340 37	1,462 5109 19	4345 52	9,999 7420 86	5 16
62	63 2028 70	4340 37	62 9454 72	4345 52	7426 02	5 14
63	63 6369 07	4340 38	63 3800 23	4345 51	7431 16	5 13
64	64 0709 45	4340 38	63 8145 74	4345 51	7436 29	5 12
65	64 5049 84	4340 39	64 2491 25	4345 50	7441 41	5 11
4,066	1,464 9390 23	4340 39	1,464 6836 75	4345 50	9,999 7446 52	5 11
67	65 3730 62	4340 40	65 1182 25	4345 49	7451 63	5 09
68	65 8071 02	4340 41	65 5527 74	4345 49	7456 72	5 09
69	66 2411 42	4340 41	65 9873 23	4345 48	7461 81	5 07
70	66 6751 83	4340 42	66 4218 71	4345 48	7466 88	5 06
4,071	1,467 1092 25	4340 42	1,466 8564 19	4345 47	9,999 7471 94	5 05
72	67 5432 67	4340 43	67 2909 66	4345 47	7476 99	5 04
73	67 9773 10	4340 43	67 7255 12	4345 46	7482 03	5 03
74	68 4113 52	4340 44	68 1600 58	4345 46	7487 06	5 02
75	68 8453 96	4340 44	68 5946 04	4345 45	7492 08	5 01
4,076	1,469 2794 40	4340 45	1,469 0291 49	4345 45	9,999 7497 09	5 00
77	69 7134 85	4340 45	69 4636 94	4345 44	7502 09	4 99
78	70 1475 30	4340 46	69 8982 38	4345 44	7507 08	4 98
79	70 5815 75	4340 46	70 3327 81	4345 43	7512 06	4 97
80	71 0156 21	4340 47	70 7673 24	4345 43	7517 03	4 96
4,081	1,471 4496 68	4340 47	1,471 2018 67	4345 42	9,999 7521 99	4 95
82	71 8837 15	4340 48	71 6364 09	4345 42	7526 94	4 94
83	72 3177 62	4340 48	72 0709 50	4345 41	7531 88	4 93
84	72 7518 10	4340 49	72 5054 91	4345 41	7536 81	4 92
85	73 1858 59	4340 49	72 9400 32	4345 40	7541 73	4 91
4,086	1,473 6199 08	4340 50	1,473 3745 72	4345 40	9,999 7546 64	4 91
87	74 0539 57	4340 50	73 8091 12	4345 39	7551 55	4 89
88	74 4880 07	4340 50	74 2436 51	4345 39	7556 44	4 88
89	74 9220 58	4340 51	74 6781 90	4345 38	7561 32	4 88
90	75 3561 08	4340 51	75 1127 28	4345 38	7566 20	4 86
4,091	1,475 7901 60	4340 52	1,475 5472 66	4345 37	9,999 7571 06	4 85
92	76 2242 12	4340 52	75 9818 03	4345 37	7575 91	4 84
93	76 6582 64	4340 53	76 4163 39	4345 36	7580 75	4 84
94	77 0923 17	4340 53	76 8508 76	4345 36	7585 59	4 82
95	77 5263 70	4340 54	77 2854 11	4345 35	7590 41	4 82
4,096	1,477 9604 24	4340 54	1,477 7199 47	4345 35	9,999 7595 23	4 81
97	78 3944 78	4340 55	78 1544 82	4345 34	7600 04	4 79
98	78 8285 33	4340 56	78 5890 16	4345 34	7604 83	4 78
99	79 2625 89	4340 56	79 0235 50	4345 33	7609 61	4 78
4,100	79 6966 44		79 4580 83		7614 39	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
4,100	1,479 6966 44	4340 56	1,479 4580 83	4345 33	9,999 7614 39	4 76
4,101	1,480 1307 01	4340 57	1,479 8926 16	4345 32	9,999 7619 15	4 76
02	80 5647 57	4340 57	80 3271 49	4345 32	7623 91	4 75
03	80 9988 14	4340 58	80 7616 80	4345 32	7628 66	4 74
04	81 4328 72	4340 58	81 1962 12	4345 31	7633 40	4 73
05	81 8669 30	4340 59	81 6307 43	4345 31	7638 13	4 72
4,106	1,482 3009 89	4340 59	1,482 0652 73	4345 30	9,999 7642 85	4 71
07	82 7350 48	4340 60	82 4998 04	4345 30	7647 56	4 70
08	83 1691 07	4340 60	82 9343 33	4345 29	7652 26	4 69
09	83 6031 67	4340 60	83 3688 62	4345 29	7656 95	4 68
10	84 0372 28	4340 61	83 8033 91	4345 28	7661 63	4 67
4,111	1,484 4712 89	4340 61	1,484 2379 19	4345 28	9,999 7666 30	4 67
12	84 9053 50	4340 62	84 6724 47	4345 27	7670 97	4 65
13	85 3394 12	4340 62	85 1069 74	4345 27	7675 62	4 65
14	85 7734 74	4340 63	85 5415 01	4345 26	7680 27	4 63
15	86 2075 37	4340 63	85 9760 27	4345 26	7684 90	4 63
4,116	1,486 6416 00	4340 64	1,486 4105 53	4345 25	9,999 7689 53	4 61
17	87 0756 64	4340 64	86 8450 78	4345 25	7694 14	4 61
18	87 5097 28	4340 65	87 2796 03	4345 24	7698 75	4 59
19	87 9437 93	4340 65	87 7141 27	4345 24	7703 34	4 59
20	88 3778 58	4340 66	88 1486 51	4345 24	7707 93	4 58
4,121	1,488 8119 24	4340 66	1,488 5831 75	4345 23	9,999 7712 51	4 57
22	89 2459 90	4340 67	89 0176 98	4345 23	7717 08	4 56
23	89 6800 56	4340 67	89 4522 20	4345 22	7721 64	4 55
24	90 1141 23	4340 67	89 8867 43	4345 22	7726 19	4 55
25	90 5481 91	4340 68	90 3212 64	4345 21	7730 74	4 54
4,126	1,490 9822 58	4340 68	1,490 7557 86	4345 21	9,999 7735 28	4 52
27	91 4163 27	4340 69	91 1903 06	4345 20	7739 80	4 52
28	91 8503 95	4340 69	91 6248 27	4345 20	7744 32	4 50
29	92 2844 65	4340 70	92 0593 47	4345 20	7748 82	4 50
30	92 7185 34	4340 70	92 4938 66	4345 19	7753 32	4 49
4,131	1,493 1526 04	4340 71	1,492 9283 85	4345 19	9,999 7757 81	4 48
32	93 5866 75	4340 71	93 3629 04	4345 18	7762 29	4 47
33	94 0207 46	4340 71	93 7974 22	4345 18	7766 76	4 47
34	94 4548 17	4340 72	94 2319 40	4345 17	7771 23	4 45
35	94 8888 89	4340 72	94 6664 57	4345 17	7775 68	4 45
4,136	1,495 3229 61	4340 73	1,495 1009 74	4345 16	9,999 7780 13	4 43
37	95 7570 34	4340 73	95 5354 90	4345 16	7784 56	4 43
38	96 1911 07	4340 74	95 9700 06	4345 15	7788 99	4 41
39	96 6251 81	4340 74	96 4045 21	4345 15	7793 40	4 41
40	97 0592 55	4340 75	96 8390 36	4345 15	7797 81	4 39
4,141	1,497 4933 30	4340 75	1,497 2735 50	4345 14	9,999 7802 20	4 39
42	97 9274 05	4340 75	97 7080 64	4345 14	7806 59	4 39
43	98 3614 80	4340 76	98 1425 78	4345 13	7810 98	4 37
44	98 7955 56	4340 77	98 5770 91	4345 13	7815 35	4 36
45	99 2296 33	4340 77	99 0116 04	4345 12	7819 71	4 36
4,146	1,499 6637 09	4340 77	1,499 4461 16	4345 12	9,999 7824 07	4 35
47	1,500 0977 86	4340 78	99 8806 28	4345 12	7828 42	4 34
48	00 5318 64	4340 78	1,500 3151 40	4345 11	7832 76	4 33
49	00 9659 42	4340 79	00 7496 51	4345 11	7837 09	4 32
50	01 4000 21		01 1841 62		7841 41	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,150	1,501 4000 21	4340 79	1,501 1841 62	4345 10	9,999 7841 41	4 32
4,151	1,501 8340 99	4340 79	1,501 6186 72	4345 10	9,999 7845 73	4 30
52	02 2681 79	4340 80	02 0531 82	4345 09	7850 03	4 29
53	02 7022 59	4340 80	02 4876 91	4345 09	7854 32	4 29
54	03 1363 39	4340 81	02 9222 00	4345 09	7858 61	4 28
55	03 5704 19	4340 81	03 3567 08	4345 08	7862 89	4 27
4,156	1,504 0045 00	4340 81	1,503 7912 16	4345 08	9,999 7867 16	4 26
57	04 4385 82	4340 82	04 2257 24	4345 07	7871 42	4 25
58	04 8726 64	4340 82	04 6602 31	4345 07	7875 67	4 25
59	05 3067 46	4340 83	05 0947 38	4345 06	7879 92	4 23
60	05 7408 29	4340 83	05 5292 44	4345 06	7884 15	4 23
4,161	1,506 1749 12	4340 84	1,505 9637 50	4345 06	9,999 7888 38	4 22
62	06 6089 96	4340 84	06 3982 55	4345 05	7892 60	4 21
63	07 0430 79	4340 84	06 8327 60	4345 05	7896 81	4 21
64	07 4771 63	4340 85	07 2672 65	4345 04	7901 02	4 19
65	07 9112 48	4340 85	07 7017 69	4345 04	7905 21	4 19
4,166	1,508 3453 33	4340 86	1,508 1362 73	4345 03	9,999 7909 40	4 18
67	08 7794 19	4340 86	08 5707 77	4345 03	7913 58	4 17
68	09 2135 06	4340 87	09 0052 80	4345 03	7917 75	4 16
69	09 6475 91	4340 87	09 4397 82	4345 02	7921 91	4 15
70	10 0816 78	4340 87	09 8742 84	4345 02	7926 06	4 14
4,171	1,510 5157 66	4340 88	1,510 3087 86	4345 01	9,999 7930 20	4 14
72	10 9498 53	4340 88	10 7432 87	4345 01	7934 34	4 13
73	11 3839 42	4340 89	11 1777 88	4345 01	7938 47	4 12
74	11 8180 30	4340 89	11 6122 89	4345 00	7942 59	4 11
75	12 2521 19	4340 90	12 0467 89	4345 00	7946 70	4 10
4,176	1,512 6862 09	4340 90	1,512 4812 88	4345 00	9,999 7950 80	4 09
77	13 1202 99	4340 90	12 9157 88	4344 99	7964 89	4 08
78	13 5543 89	4340 91	13 3502 86	4344 98	7958 97	4 08
79	13 9884 80	4340 91	13 7847 85	4344 98	7963 05	4 07
80	14 4225 71	4340 92	14 2192 83	4344 98	7967 12	4 06
4,181	1,514 8566 63	4340 92	1,514 6537 80	4344 97	9,999 7971 18	4 05
82	15 2907 54	4340 92	15 0882 77	4344 97	7975 23	4 05
83	15 7248 47	4340 93	15 5227 74	4344 96	7979 28	4 04
84	16 1589 39	4340 93	15 9572 71	4344 96	7983 32	4 02
85	16 5930 33	4340 94	16 3917 67	4344 95	7987 34	4 02
4,186	1,517 0271 26	4340 94	1,516 8262 62	4344 95	9,999 7991 36	4 01
87	17 4612 20	4340 94	17 2607 57	4344 95	7995 37	4 01
88	17 8953 14	4340 95	17 6952 52	4344 94	7999 38	4 00
89	18 3294 09	4340 95	18 1297 47	4344 94	8003 38	3 99
90	18 7635 04	4340 95	18 5642 41	4344 94	8007 37	3 98
4,191	1,519 1975 99	4340 96	1,518 9087 34	4344 93	9,999 8011 35	3 97
92	19 6316 95	4340 96	19 4332 27	4344 93	8015 32	3 97
93	20 0657 91	4340 97	19 8677 20	4344 92	8019 29	3 96
94	20 4998 88	4340 97	20 3022 13	4344 92	8023 25	3 95
95	20 9339 85	4340 97	20 7367 05	4344 92	8027 20	3 94
4,196	1,521 3680 82	4340 98	1,521 1711 98	4344 91	9,999 8031 14	3 93
97	21 8021 80	4340 98	21 6056 87	4344 91	8035 07	3 93
98	22 2362 78	4340 99	22 0401 78	4344 90	8039 00	3 92
99	22 6703 77	4340 99	22 4746 69	4344 90	8042 92	3 91
4,200	23 1044 76		22 9091 59		8046 83	

k.	log. Cos. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
4,200	1,523 1044 76	4340 99	1,522 9091 59	4344 90	9,999 8046 83	3 90
4,201	1,523 5385 75	4341 00	1,523 3436 48	4344 89	9,999 8050 73	3 90
02	23 9726 75	4341 00	23 7781 38	4344 89	8054 63	3 88
03	24 4067 75	4341 01	24 2126 26	4344 88	8058 51	3 88
04	24 8408 76	4341 01	24 6471 15	4344 88	8062 39	3 87
05	25 2749 77	4341 01	25 0816 03	4344 88	8066 26	3 87
4,206	1,525 7090 78	4341 02	1,525 5160 91	4344 87	9,999 8070 13	3 85
07	26 1431 80	4341 02	25 9505 78	4344 87	8073 98	3 85
08	26 5772 82	4341 03	26 3850 65	4344 87	8077 83	3 84
09	27 0113 85	4341 03	26 8195 51	4344 86	8081 67	3 83
10	27 4454 88	4341 03	27 2540 38	4344 86	8085 50	3 83
4,211	1,527 8795 91	4341 04	1,527 6885 23	4344 85	9,999 8089 33	3 82
12	28 3136 97	4341 04	28 1230 09	4344 85	8093 15	3 81
13	28 7477 98	4341 04	28 5574 94	4344 85	8096 96	3 80
14	29 1819 03	4341 05	28 9919 79	4344 84	8100 76	3 79
15	29 6160 08	4341 05	29 4264 63	4344 84	8104 55	3 79
4,216	1,530 0501 13	4341 06	1,529 8609 47	4344 84	9,999 8108 34	3 78
17	30 4842 18	4341 06	30 2954 30	4344 83	8112 12	3 78
18	30 9183 24	4341 06	30 7299 14	4344 83	8115 90	3 76
19	31 3524 30	4341 07	31 1643 96	4344 82	8119 66	3 76
20	31 7865 37	4341 07	31 5988 79	4344 82	8123 42	3 75
4,221	1,532 2206 44	4341 08	1,532 0333 61	4344 82	9,999 8127 17	3 73
22	32 6547 52	4341 08	32 4678 42	4344 81	8130 90	3 73
23	33 0888 60	4341 08	32 9023 23	4344 81	8134 63	3 73
24	33 5229 68	4341 09	33 3368 04	4344 81	8138 36	3 72
25	33 9570 77	4341 09	33 7712 85	4344 80	8142 08	3 71
4,226	1,534 3911 86	4341 09	1,534 2057 65	4344 80	9,999 8145 79	3 71
27	34 8252 95	4341 10	34 6402 45	4344 79	8149 50	3 69
28	35 2594 05	4341 10	35 0747 24	4344 79	8153 19	3 69
29	35 6935 15	4341 10	35 5092 03	4344 79	8156 88	3 69
30	36 1276 25	4341 11	35 9436 82	4344 78	8160 57	3 67
4,231	1,536 5617 36	4341 11	1,536 3781 60	4344 78	9,999 8164 24	3 67
32	36 9958 47	4341 11	36 8126 38	4344 78	8167 91	3 67
33	37 4299 58	4341 12	37 2471 16	4344 77	8171 58	3 65
34	37 8640 70	4341 12	37 6815 93	4344 77	8175 23	3 65
35	38 2981 82	4341 13	38 1160 70	4344 77	8178 88	3 63
4,236	1,538 7322 95	4341 13	1,538 5505 46	4344 76	9,999 8182 51	3 63
37	39 1664 08	4341 13	38 9850 22	4344 76	8186 14	3 63
38	39 6005 21	4341 14	39 4194 98	4344 75	8189 77	3 62
39	40 0346 35	4341 14	39 8539 73	4344 75	8193 39	3 61
40	40 4687 48	4341 14	40 2884 48	4344 75	8197 00	3 60
4,241	1,540 9028 63	4341 15	1,540 7229 23	4344 74	9,999 8200 60	3 59
42	41 3369 78	4341 15	41 1573 97	4344 74	8204 19	3 59
43	41 7710 93	4341 16	41 5918 71	4344 74	8207 78	3 58
44	42 2052 08	4341 16	42 0263 44	4344 73	8211 36	3 57
45	42 6393 24	4341 16	42 4608 17	4344 73	8214 93	3 57
4,246	1,543 0734 40	4341 17	1,542 8952 90	4344 73	9,999 8218 50	3 56
47	43 5075 57	4341 17	43 3297 63	4344 72	8222 06	3 56
48	43 9416 74	4341 17	43 7642 35	4344 72	8225 61	3 55
49	44 3757 91	4341 18	44 1987 07	4344 71	8229 16	3 53
50	44 8099 09		44 6331 78		8232 69	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,250	1,544 8099 09	4341 18	1,544 6331 78	4344 71	9,999 8232 69	3 53
4,251	1,545 2440 26	4341 18	1,545 0676 49	4344 71	9,999 8236 22	3 53
52	45 6781 45	4341 19	45 5021 20	4344 70	8239 75	3 52
53	46 1122 63	4341 19	45 9365 90	4344 70	8243 27	3 51
54	46 5463 82	4341 19	46 3710,60	4344 70	8246 78	3 50
55	46 9805 02	4341 20	46 8055 30	4344 69	8250 28	3 50
4,256	1,547 4146 21	4341 20	1,547 2399 99	4344 69	9,999 8253 78	3 49
57	47 8487 42	4341 21	47 6744 68	4344 69	8257 27	3 48
58	48 2828 62	4341 21	48 1089 37	4344 68	8260 75	3 47
59	48 7169 83	4341 21	48 5434 05	4344 68	8264 22	3 47
60	49 1511 04	4341 22	48 9778 73	4344 68	8267 69	3 46
4,261	1,549 5852 26	4341 22	1,549 4123 41	4344 67	9,999 8271 15	3 46
62	50 0193 47	4341 22	49 8468 08	4344 67	8274 61	3 45
63	50 4534 69	4341 23	50 2812 75	4344 67	8278 06	3 44
64	50 8875 92	4341 23	50 7157 42	4344 66	8281 50	3 43
65	51 3217 15	4341 23	51 1502 08	4344 66	8284 93	3 43
4,266	1,551 7558 38	4341 24	1,551 5846 74	4344 66	9,999 8288 36	3 42
67	52 1899 61	4341 24	52 0191 30	4344 65	8291 78	3 41
68	52 6240 85	4341 24	52 4536 04	4344 65	8295 19	3 41
69	53 0582 10	4341 25	52 8880 69	4344 65	8298 60	3 40
70	53 4923 34	4341 25	53 3225 34	4344 64	8302 00	3 39
4,271	1,553 9264 59	4341 25	1,553 7569 98	4344 64	9,999 8305 39	3 39
72	54 3605 84	4341 26	54 1914 62	4344 63	8308 78	3 37
73	54 7947 10	4341 26	54 6259 25	4344 63	8312 15	3 37
74	55 2288 36	4341 26	55 0603 88	4344 63	8315 52	3 37
75	55 6629 62	4341 27	55 4948 51	4344 63	8318 89	3 36
4,276	1,556 0970 89	4341 27	1,555 9293 13	4344 62	9,999 8322 25	3 35
77	56 5312 16	4341 27	56 3637 75	4344 62	8325 60	3 35
78	56 9653 43	4341 28	56 7982 37	4344 61	8328 95	3 34
79	57 3994 70	4341 28	57 2326 99	4344 61	8332 29	3 33
80	57 8335 98	4341 28	57 6671 60	4344 61	8335 62	3 32
4,281	1,558 2677 26	4341 29	1,558 1016 20	4344 60	9,999 8338 94	3 32
82	58 7018 55	4341 29	58 5360 81	4344 60	8342 26	3 31
83	59 1359 84	4341 29	58 9705 41	4344 60	8345 57	3 31
84	59 5701 13	4341 30	59 4050 01	4344 59	8348 88	3 29
85	60 0042 43	4341 30	59 8394 60	4344 59	8352 17	3 29
4,286	1,560 4383 73	4341 30	1,560 2739 19	4344 59	9,999 8355 46	3 29
87	60 8725 03	4341 31	60 7083 78	4344 59	8358 75	3 29
88	61 3066 33	4341 31	61 1428 37	4344 58	8362 04	3 27
89	61 7407 64	4341 31	61 5772 96	4344 58	8365 31	3 26
90	62 1748 95	4341 32	62 0117 52	4344 58	8368 57	3 26
4,291	1,562 6090 27	4341 32	1,562 4462 10	4344 57	9,999 8371 83	3 25
92	63 0431 59	4341 32	62 8806 67	4344 57	8375 08	3 25
93	63 4772 91	4341 33	63 3151 24	4344 57	8378 33	3 24
94	63 9114 23	4341 33	63 7495 80	4344 56	8381 57	3 24
95	64 3465 56	4341 33	64 1840 37	4344 56	8384 81	3 23
4,296	1,564 7796 89	4341 34	1,564 6184 93	4344 56	9,999 8388 04	3 21
97	65 2138 23	4341 34	65 0529 48	4344 55	8391 25	3 21
98	65 6479 57	4341 34	65 4874 03	4344 55	8394 46	3 21
99	66 0820 91	4341 35	65 9218 58	4344 55	8397 67	3 21
4,300	66 5162 25		66 3563 13		8400 88	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,300	1,566 5162 25	4341 35	1,566 3563 13	4344 54	9,999 8400 88	3 19
4,301	1,566 9503 60	4341 35	1,566 7907 67	4344 54	9,999 8404 07	3 19
02	67 3844 95	4341 35	67 2252 21	4344 54	8407 26	3 19
03	67 8186 30	4341 36	67 6596 75	4344 53	8410 45	3 18
04	68 2527 66	4341 36	68 0941 29	4344 53	8413 63	3 17
05	68 6869 02	4341 36	68 5285 82	4344 53	8416 80	3 16
4,306	1,569 1210 38	4341 37	1,568 9630 34	4344 52	9,999 8419 96	3 16
07	69 5551 75	4341 37	69 3974 87	4344 52	8423 12	3 15
08	69 9893 12	4341 37	69 8319 39	4344 52	8426 27	3 14
09	70 4234 49	4341 38	70 2663 91	4344 51	8429 41	3 14
10	70 8575 87	4341 38	70 7008 42	4344 51	8432 55	3 13
4,311	1,571 2917 25	4341 38	1,571 1352 93	4344 51	9,999 8435 68	3 13
12	71 7258 63	4341 39	71 5697 44	4344 50	8438 81	3 12
13	72 1600 01	4341 39	72 0041 94	4344 50	8441 93	3 11
14	72 5941 40	4341 39	72 4386 44	4344 50	8445 04	3 11
15	73 0282 79	4341 40	72 8730 94	4344 50	8448 15	3 10
4,316	1,573 4624 19	4341 40	1,573 3075 44	4344 49	9,999 8451 26	3 09
17	73 8965 59	4341 40	73 7419 93	4344 49	8454 34	3 09
18	74 3306 99	4341 41	74 1764 42	4344 49	8457 43	3 08
19	74 7648 40	4341 41	74 6108 90	4344 48	8460 51	3 07
20	75 1989 81	4341 41	75 0453 38	4344 48	8463 58	3 07
4,321	1,575 6331 22	4341 41	1,575 4797 86	4344 48	9,999 8466 65	3 06
22	76 0672 63	4341 42	75 9142 34	4344 47	8469 71	3 06
23	76 5014 05	4341 42	76 3486 82	4344 47	8472 77	3 05
24	76 9355 47	4341 42	76 7831 29	4344 47	8475 82	3 04
25	77 3696 89	4341 43	77 2175 76	4344 47	8478 86	3 04
4,326	1,577 8038 32	4341 43	1,577 6520 22	4344 46	9,999 8481 90	3 03
27	78 2379 75	4341 43	78 0864 68	4344 46	8484 93	3 03
28	78 6721 18	4341 44	78 5209 14	4344 46	8487 96	3 03
29	79 1062 61	4341 44	78 9553 60	4344 45	8490 99	3 01
30	79 5404 05	4341 44	79 3898 06	4344 45	8494 00	3 01
4,331	1,579 9745 49	4341 44	1,579 8242 50	4344 45	9,999 8497 01	3 01
32	80 4086 93	4341 45	80 2586 95	4344 44	8500 02	2 99
33	80 8428 38	4341 45	80 6931 39	4344 44	8503 01	2 99
34	81 2769 83	4341 4	81 1275 83	4344 44	8506 00	2 99
35	81 7111 28	4341 46	81 5620 27	4344 43	8508 99	2 98
4,336	1,582 1452 74	4341 46	1,581 9964 70	4344 43	9,999 8511 97	2 97
37	82 5794 19	4341 46	82 4309 13	4344 43	8514 94	2 97
38	83 0136 65	4341 46	82 8653 56	4344 43	8517 91	2 96
39	83 4477 12	4341 47	83 2997 99	4344 42	8520 87	2 96
40	83 8818 59	4341 47	83 7342 41	4344 42	8523 83	2 95
4,341	1,584 3160 05	4341 47	1,584 1686 83	4344 42	9,999 8526 78	2 94
42	84 7501 53	4341 48	84 6031 24	4344 41	8529 72	2 93
43	85 1843 01	4341 48	85 0375 66	4344 41	8532 66	2 93
44	85 6184 49	4341 48	85 4720 07	4344 41	8535 58	2 93
45	86 0525 97	4341 49	85 9064 47	4344 41	8538 51	2 92
4,346	1,586 4867 46	4341 49	1,586 3408 88	4344 40	9,999 8541 43	2 91
47	86 9208 94	4341 49	86 7753 28	4344 40	8544 34	2 90
48	87 3550 44	4341 50	87 2097 68	4344 40	8547 24	2 90
49	87 7891 93	4341 50	87 6442 07	4344 39	8550 14	2 90
50	88 2233 43		88 0786 47		8553 04	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,350	1,588 2233 43	4341 50	1,588 0786 47	4344 39	9,999 8553 04	2 89
4,351	1,588 6574 93	4341 50	1,588 5130 86	4344 39	9,999 8555 93	2 89
52	89 0916 43	4341 51	88 9475 25	4344 39	8558 82	2 87
53	89 5257 94	4341 51	89 3819 63	4344 38	8561 60	2 87
54	89 9599 45	4341 51	89 8164 01	4344 38	8564 56	2 87
55	90 3940 96	4341 51	90 2508 39	4344 38	8567 43	2 87
4,356	1,590 8282 47	4341 52	1,590 6852 77	4344 37	9,999 8570 30	2 86
57	91 2623 99	4341 52	91 1197 14	4344 37	8573 16	2 85
58	91 6965 51	4341 52	91 5541 51	4344 37	8576 01	2 85
59	92 1307 02	4341 52	91 9885 88	4344 37	8578 86	2 84
60	92 5648 55	4341 53	92 4230 25	4344 36	8581 70	2 84
4.361	1,592 9990 07	4341 53	1.592 8574 61	4344 36	9,999 8584 54	2 83
62	93 4331 60	4341 53	93 2918 97	4344 36	8587 37	2 82
63	93 8673 14	4341 54	93 7263 32	4344 35	8590 19	2 82
64	94 3014 67	4341 54	94 1607 68	4344 35	8593 01	2 81
65	94 7356 21	4341 54	94 5952 03	4344 35	8595 82	2 80
4,366	1,596 1697 76	4341 55	1,596 0296 37	4344 35	9,999 8598 62	2 80
67	95 6039 30	4341 55	95 4640 72	4344 34	8601 42	2 79
68	96 0380 85	4341 55	96 8985 06	4344 34	8604 21	2 79
69	96 4722 40	4341 55	96 3329 40	4344 34	8607 00	2 79
70	96 9063 95	4341 56	96 7673 74	4344 33	8609 79	2 77
4,371	1,597 3405 51	4341 56	1,597 2018 07	4344 33	9,999 8612 56	2 77
72	97 7747 07	4341 56	97 6362 40	4344 33	8615 33	2 77
73	98 2088 63	4341 56	98 0706 73	4344 33	8618 10	2 77
74	98 6430 19	4341 57	98 5051 06	4344 32	8620 87	2 76
75	99 0771 76	4341 57	98 9395 38	4344 32	8623 62	2 75
4,376	1,599 5113 33	4341 57	1,599 3739 70	4344 32	9,999 8626 37	2 75
77	99 9454 90	4341 58	99 8084 02	4344 32	8629 12	2 74
78	1,600 3796 48	4341 58	1,600 2428 33	4344 31	8631 86	2 73
79	00 8138 06	4341 58	00 6772 65	4344 31	8634 59	2 73
80	01 2479 64	4341 58	01 1116 96	4344 31	8637 32	2 72
4,381	1,601 6821 22	4341 59	1,601 5461 26	4344 30	9,999 8640 04	2 72
82	02 1162 81	4341 59	01 9806 57	4344 30	8642 76	2 71
83	02 5504 40	4341 59	02 4149 87	4344 30	8645 47	2 70
84	02 9845 99	4341 60	02 8494 16	4344 30	8648 17	2 70
85	03 4187 59	4341 60	03 2838 46	4344 29	8650 87	2 70
4,386	1,603 8529 18	4341 60	1,603 7182 75	4344 29	9,999 8653 57	2 69
87	04 2870 78	4341 60	04 1527 04	4344 29	8656 26	2 68
88	04 7212 39	4341 61	04 5871 33	4344 28	8658 94	2 68
89	05 1553 99	4341 61	05 0215 61	4344 28	8661 62	2 67
90	05 5895 60	4341 61	05 4559 89	4344 28	8664 29	2 67
4,391	1,606 0237 21	4341 61	1,605 8904 17	4344 28	9,999 8666 96	2 67
92	06 4578 83	4341 62	06 3248 45	4344 28	8669 63	2 66
93	06 8920 44	4341 62	06 7592 73	4344 27	8672 29	2 66
94	07 3262 06	4341 62	07 1937 00	4344 27	8674 94	2 65
95	07 7603 68	4341 62	07 6281 27	4344 27	8677 59	2 64
4,396	1,608 1945 30	4341 63	1,608 0625 53	4344 26	9,999 8680 23	2 64
97	08 6286 93	4341 63	08 4969 80	4344 26	8682 87	2 63
98	09 0628 56	4341 63	08 9314 06	4344 26	8685 50	2 63
99	09 4970 19	4341 63	09 3658 32	4344 26	8688 13	2 62
4,400	09 9311 82		09 8002 57		8690 75	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,400	1,609 9311 82	4341 64	1,609 8002 57	4344 25	9,999 8690 75	2 62
4,401	1,610 3653 46	4341 64	1,610 2346 83	4344 25	9,999 8693 37	2 61
02	10 7995 10	4341 64	10 6691 08	4344 24	8695 98	2 60
03	11 2336 74	4341 65	11 1035 32	4344 25	8698 58	2 60
04	11 6678 39	4341 65	11 5379 57	4344 24	8701 18	2 59
05	12 1020 04	4341 65	11 9723 81	4344 24	8703 77	2 59
4,406	1,612 5361 69	4341 65	1,612 4068 05	4344 24	9,999 8706 36	2 59
07	12 9703 34	4341 65	12 8412 29	4344 23	8708 95	2 58
08	13 4044 99	4341 66	13 2756 52	4344 23	8711 53	2 57
09	13 8386 65	4341 66	13 7100 75	4344 23	8714 10	2 57
10	14 2728 31	4341 67	14 1444 98	4344 23	8716 67	2 56
4,411	1,614 7069 98	4341 66	1,614 5789 21	4344 23	9,999 8719 23	2 57
12	15 1411 64	4341 67	15 0133 44	4344 22	8721 80	2 55
13	15 5753 31	4341 67	15 4477 66	4344 22	8724 35	2 55
14	16 1094 98	4341 67	15 8821 88	4344 21	8726 90	2 54
15	16 5436 65	4341 68	16 3166 09	4344 22	8729 44	2 54
4,416	1,616 9778 33	4341 68	1,616 7510 31	4344 21	9,999 8731 98	2 53
17	17 3120 01	4341 68	17 1854 52	4344 21	8734 51	2 53
18	17 7461 69	4341 68	17 6198 73	4344 21	8737 04	2 53
19	18 1803 37	4341 69	18 0542 94	4344 20	8739 57	2 51
20	18 6145 06	4341 68	18 4887 14	4344 20	8742 08	2 52
4,421	1,619 0486 74	4341 69	1,618 9231 34	4344 20	9,999 8744 60	2 50
22	19 4828 44	4341 69	19 3575 54	4344 20	8747 10	2 50
23	19 9170 13	4341 70	19 7919 74	4344 19	8749 61	2 49
24	20 3511 83	4341 70	20 2263 93	4344 19	8752 10	2 50
25	20 7853 53	4341 70	20 6608 12	4344 19	8754 60	2 48
4,426	1,621 2195 23	4341 70	1,621 0952 31	4344 19	9,999 8757 08	2 49
27	21 6536 93	4341 71	21 5296 50	4344 18	8759 57	2 47
28	22 0878 64	4341 71	21 9640 68	4344 18	8762 04	2 48
29	22 5220 34	4341 71	22 3984 86	4344 18	8764 52	2 47
30	22 9562 06	4341 71	22 8329 04	4344 18	8766 99	2 47
4,431	1,623 3903 77	4341 72	1,623 2673 22	4344 18	9,999 8769 46	2 47
32	23 8245 48	4341 72	23 7017 40	4344 17	8771 93	2 45
33	24 2587 20	4341 72	24 1361 57	4344 17	8774 37	2 45
34	24 6928 92	4341 72	24 5705 74	4344 16	8776 82	2 44
35	25 1270 64	4341 73	25 0049 90	4344 17	8779 26	2 44
4,436	1,625 5612 37	4341 73	1,625 4394 07	4344 16	9,999 8781 70	2 43
37	25 9954 10	4341 73	25 8738 23	4344 16	8784 13	2 43
38	26 4295 83	4341 73	26 3082 39	4344 16	8786 56	2 43
39	26 8637 56	4341 74	26 7426 55	4344 16	8788 99	2 42
40	27 2979 29	4341 74	27 1770 70	4344 16	8791 41	2 42
4,441	1,627 7321 03	4341 74	1,627 6114 86	4344 15	9,999 8793 83	2 41
42	28 1662 77	4341 74	28 0459 01	4344 14	8796 24	2 40
43	28 6004 51	4341 74	28 4803 15	4344 15	8798 64	2 40
44	29 0346 26	4341 75	28 9147 30	4344 14	8801 04	2 39
45	29 4688 01	4341 75	29 3491 44	4344 14	8803 43	2 40
4,446	1,629 9029 76	4341 75	1,629 7835 58	4344 14	9,999 8805 83	2 38
47	30 3371 51	4341 75	30 2179 72	4344 14	8808 21	2 39
48	30 7713 26	4341 76	30 6523 86	4344 13	8810 60	2 37
49	31 2055 02	4341 76	31 0867 99	4344 13	8812 97	2 37
50	31 6396 78		31 5212 12		8815 34	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,450	1,631 6396 78	4341 76	1,631 5212 12	4344 13	9,999 8815 34	2 37
4,451	1,632 0738 54	4341 76	1,631 9656 25	4344 13	9,999 8817 71	2 37
52	32 5080 30	4341 77	32 3900 38	4344 12	8820 08	2 36
53	32 9422 07	4341 77	32 8244 50	4344 12	8822 43	2 36
54	33 3763 84	4341 77	33 2588 62	4344 12	8824 78	2 35
55	33 8105 61	4341 77	33 6932 74	4344 12	8827 13	2 35
4,456	1,634 2447 38	4341 78	1,634 1276 86	4344 11	9,999 8829 48	2 33
57	34 6789 16	4341 78	34 5620 97	4344 11	8831 81	2 34
58	35 1130 93	4341 78	34 9965 08	4344 11	8834 15	2 34
59	35 5472 72	4341 78	35 4309 19	4344 11	8836 47	2 32
60	53 9814 50	4341 79	35 8653 30	4344 10	8838 80	2 33
4,461	1,636 4156 28	4341 79	1,636 2997 40	4344 10	9,999 8841 12	2 31
62	36 8498 07	4341 79	36 7341 50	4344 10	8843 43	2 31
63	37 2839 86	4341 79	37 1685 60	4344 10	8845 74	2 31
64	37 7181 65	4341 79	87 6029 70	4344 10	8848 05	2 30
65	38 1523 45	4341 80	38 0373 80	4344 10	8850 35	2 29
4,466	1,638 5865 25	4341 80	1,638 4717 89	4344 09	9,999 8852 64	2 30
67	39 0207 04	4341 80	38 9061 98	4344 09	8854 94	2 28
68	39 4548 85	4341 80	39 3406 07	4344 09	8857 22	2 29
69	39 8890 65	4341 81	39 7750 16	4344 08	8859 51	2 28
70	40 3232 46	4341 81	40 2094 24	4344 08	8861 79	2 27
4,471	1,640 7574 26	4341 81	1,640 6438 32	4344 08	9,999 8864 06	2 27
72	41 1916 07	4341 82	41 0782 40	4344 08	8866 33	2 27
73	41 6257 88	4341 81	41 5126 48	4344 07	8868 60	2 26
74	42 0599 70	4341 82	41 9470 55	4344 08	8870 86	2 26
75	42 4941 51	4341 82	42 3814 63	4344 07	8873 12	2 25
4,476	1,642 9283 33	4341 82	1,642 8158 70	4344 07	9,999 8875 37	2 25
77	43 3625 15	4341 82	43 2502 77	4344 06	8877 62	2 24
78	43 7966 98	4341 83	43 6846 83	4344 07	8879 86	2 24
79	44 2308 80	4341 83	44 1190 90	4344 06	8882 10	2 23
80	44 6650 63	4341 83	44 5534 96	4344 06	8884 33	2 23
4,481	1,645 0992 46	4341 83	1,644 9879 02	4344 06	9,999 8886 56	2 22
82	45 5334 30	4341 84	45 4223 08	4344 05	8888 78	2 22
83	46 9676 13	4341 94	45 8567 13	4344 06	8891 00	2 22
84	46 4017 97	4341 84	46 2911 19	4344 05	8893 22	2 21
85	46 8359 81	4341 84	46 7255 24	4344 05	8895 43	2 21
4,486	1,647 2701 65	4341 84	1,647 1599 29	4344 04	9,999 8897 64	2 20
87	47 7043 49	4341 85	47 5943 33	4344 05	8899 84	2 20
88	48 1385 34	4341 86	48 0287 38	4344 04	8902 04	2 19
89	48 5727 19	4341 85	48 4631 42	4344 04	8904 23	2 19
90	49 0069 04	4341 85	48 8975 46	4344 03	8906 42	2 18
4,491	1,649 4410 89	4341 85	1,649 3319 49	4344 04	9,999 8908 60	2 19
92	49 8752 74	4341 86	49 7663 53	4344 03	8910 79	2 17
93	50 3094 60	4341 86	50 2007 56	4344 03	8912 96	2 17
94	50 7436 46	4341 86	50 6351 59	4344 03	8915 13	2 17
95	51 1778 32	4341 86	51 0695 62	4344 03	8917 30	2 17
4,496	1,651 6120 18	4341 87	1,651 5039 66	4344 02	9,999 8919 47	2 15
97	52 0462 05	4341 87	51 9383 67	4344 02	8921 62	2 16
98	52 4803 91	4341 87	52 3727 69	4344 02	8923 78	2 15
99	52 9145 79	4341 87	52 8071 72	4344 02	8925 93	2 14
4,500	53 3487 66		53 2415 73		8928 07	

(Die Fortsetzung folgt.)

5.

Bemerkungen zur höhern Arithmetik.

In Folge eines Aufsatzes des Herrn Th. Clausen im 2. Hefte des 8. Bandes d. Journ. S. 140.

(Von Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Wenn p eine in der Form $6n+1$ enthaltene Primzahl ist, so hat die Congruenz $x^3 \equiv 1$ (mod. p) immer zwei Wurzeln, die Einheit nicht mitgerechnet. Nennt man die eine Wurzel f, so dafs $f^3 \equiv 1$ (mod. p) ist, so findet man die andere f^1 durch die Congruenz $f^1 \equiv f^2$ (mod. p). Die Wurzel f^1 kann auch durch die Congruenz $1+f+f^2 \equiv 0$ (mod. p) bestimmt werden, aus welcher $f^1 \equiv -(1+f)$ folgt. Da ferner $\frac{1}{f} \equiv f^2$ ist, so hat man $f^1 \equiv \frac{1}{f}$. Wie Herr Clausen bemerkt, kann immer, wofern 2 ein kubischer Nichtrest ist, eine Wurzel der Congruenz $x^3 \equiv 1$ (mod. p) durch die Formel $2^{2n} \equiv \pm \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots 3n}$ gefunden werden. Daher erhält man in diesem Falle die andere Wurzel durch die Formel

$$\pm \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots 3n}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n} \equiv 2^{4n}.$$

Setzt man $p = a + 3b^2$ und $4p = g^2 + 27h^2$, so ist, wie bekannt:

$$1. \quad \pm g \equiv \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots.4n}{1.2\ldots.2n},$$

und zwar mufs das obere oder untere Zeichen genommen werden, je nachdem g entweder in der Form $3m+2$ oder in der Form $3m+1$ enthalten ist. Statt dieser Formel kann man auch

$$2. \quad \pm g \equiv \frac{[(2n+1)(2n+2)\ldots.(3n)]^2}{1.2\ldots.2n}$$

schreiben. Ist nun 2 ein kubischer Rest, so hat man $g = 2a$ und zugleich $(2n+1), (2n+2)\ldots.3n \equiv \pm(n+1)(n+2),\ldots.2n$; folglich kann in diesem Falle a direct bestimmt werden, und zwar hat man

$$3. \quad \pm 2a \equiv \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots.3n}{1.2\ldots.n},$$

wo das positive oder negative Zeichen genommen werden mufs, je nachdem a in der Form $3m+1$ oder $3m+2$ enthalten ist. Die Formel (3.)

gilt aber nicht blos in dem besonderen Falle, sondern auch, wenn 2 ein kubischer Nichtrest ist, und man hat ganz allgemein $2a \equiv \mp 2^{2n}. g$ (mod. p), und zwar muſs das negative Zeichen genommen werden, wenn a und g beide in der Form $3m+1$ oder in der Form $3m+2$ enthalten sind, und das positive, wenn a in der einen, g in der andern Form enthalten ist.

Aus der Congruenz $1+f+f^2 \equiv 0$ folgt $(1+2f)^2 \equiv -3$. Nun ist $a^2 \equiv -3b^2 \equiv (1+2f)^2. b^2$, folglich $a \equiv \pm(1+2f)b$ oder $(1+2f)a \equiv \pm 3b$. Ist daher 2 ein kubischer Nichtrest, so kann auch b direct bestimmt werden; nur entsteht die Zweideutigkeit, ob das positive oder negative Zeichen genommen werden muſs. Eine ähnliche Zweideutigkeit hat schon Gauſs bemerkt (*Comment. de resid. biquadr.*).

Aus $g^2 \equiv -27h^2$ folgt $-3g^2 \equiv 81h^2$ oder $(1+2f)^2 g^2 \equiv 81h^2$, also ist $(1+2f)g \equiv \pm 9h$, und es kann daher auch h direct bestimmt werden, wenn 2 ein kubischer Nichtrest ist, wie schon Herr Clausen bemerkt hat, nur darf man nicht vergessen, daſs auch hier eine Zweideutigkeit wegen des Zeichens entsteht.

Herr Clausen bemerkt ferner, daſs g immer ein kubischer Rest ist. Hieraus folgt, daſs auch h immer ein solcher ist. Da nun $g \equiv 2a$ ist, so muſs auch a ein kubischer Rest sein, sobald 2 ein solcher ist. In diesem Falle ist $p = a^2 + 27m^2$, also auch m ein kubischer Rest. Aus der Formel $2a \equiv \pm 2^{2n}. g$ folgt, daſs überhaupt a ein kubischer Rest oder Nichtrest ist, je nachdem 2^{2n-1} das eine oder das andere ist.

6.

De theoremate Abeliano observatio.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

Demonstravit Cl. Abel (Vol. III. p. 313. sqq.), designantibus U, V, A, B functiones integras variabilis x, atque $\Pi(x)$ integrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(AB)}} = \Pi(x)$, radices aequationis algebraicae $AUU - BVV = 0$ tales fore, ut summa $\Sigma \pm \Pi(x)$, ad omnes illas radices extensa, a coëfficientibus functionum U, V omnino non pendeat; quod theorema etiam ad casum generaliorem extendit, quo $\Pi(x) = \int_0^x \frac{S\,dx}{T\sqrt{(AB)}}$, designantibus S, T et ipsis functiones quaslibet integras variabilis x. Quippe quo casu demonstravit, summam $\Sigma \pm \Pi(x)$ generaliter expressioni algebraicae et logarithmicae coëfficientium functionum U, V aequalem fore. Signa $\pm$ singulis $\Pi(x)$ in summa assignata praefigenda eadem esse debent atque valorum expressionis AUV.

Observo, theorema facile extendi ad casum, quo aequatio proposita fit $AUU + 2BUV + CVV = 0$, designantibus rursus A, B, C, S, T, U, V functiones integras, atque $\Pi(x)$ integrale $\int_0^x \frac{S\,dx}{T\sqrt{(BB - AC)}} = \Pi(x)$. Quo casu, siquidem ponitur $T = x - \alpha$, ad quem casum generalior facile revocatur, theorema Abelianum ita audit.

Theorema. „Sint A, B, C, S, U, V functiones integrae variabilis x, ponatur $BB - AC = \varphi(x)$, atque integrale $\int_0^x \frac{S\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \Pi(x)$, radices aequationis algebraicae $AUU + 2BUV + CVV = 0$ tales erunt, ut summa $\Sigma \pm \Pi(x)$, ad omnes eius radices extensa, sit $C + r - L$, designante

1) C quantitatem a coëfficientibus functionum U, V independentem;

2) r functionem algebraicam coëfficientium functionum U, V, aequalem coëfficienti termini $\frac{1}{x}$ in evolutione expressionis

$$\frac{S}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi(x))}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{(\varphi x)}}{AU + BV - V\sqrt{(\varphi(x))}},$$

evolutione secundum dignitates descendentes ipsius x instituta;

3) L valorem expressionis

$$\frac{S}{\sqrt{(\varphi(x))}} \log \frac{AU + BV + V\sqrt{(\varphi x)}}{AU + BV - V\sqrt{(\varphi x)}},$$

posito $x = \alpha$.

Signa $\pm$, quae in summa assignata $\Sigma \pm \Pi x$ singulis $\Pi(x)$ praefigenda sunt, eadem sunt atque valorum expressionis $\frac{AU + BV}{V}$."

Posito $B = 0$, hoc theorema in Abelianum abit; demonstrationi supersedeo, cum pro utroque eadem sit.

Regiomonti, 14. Maii 1832.

7.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Lond. Goth.)

Theoremata.

1. Aequatio unaquaeque cubica ad solubiles, quas proposuit cel. Abel, pertinet. Data enim aequatione $y^3 = 3\alpha y + 2\beta$, positis $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $y_1 = \frac{\gamma y + (\alpha^2 + \beta y)\sqrt{3}}{\gamma - (\beta + \alpha y)\sqrt{3}} = fy$, atque $y_2 = \frac{\gamma y - (\alpha^2 + \beta y)\sqrt{3}}{\gamma + (\beta + \alpha y)\sqrt{3}}$; invenietur, calculis rite subductis, haec radix $y_2 = fy_1 = ffy = fy$; itemque $y_3 = fy_2 = f^3 y = y$. Aequationis radices sunt igitur y, fy, $f^2 y$, exsistente $f^3 y = y$. Inde et consequitur, cum radix y_1 sub forma $a + a_, y + a_{,,} y^2$ exprimi potest, functionem quamcunque radicis alterius y rationalem, dummodo haec tribus subjiciatur conditionibus, alteram dare radicem y_1.

2. Cum ita de radicibus cubicis docuimus, alteram per alteram non modo rationaliter sed et per ejusmodi functionem exprimi, quae ter iterata hanc ipsam radicem reddet: quaeritur, numne simile quid de radicibus aequationum aliquot superiorum vel saltem biquadraticae, cum et haec solubilis sit, doceri possit?

Problemata.

3. Exsistentibus x et x_1 radicibus aequationis 3^{ti}, 4^{ti} vel n^{ti} gradus, functionem irrationalem R invenire ejusmodi, ut $x_1 = Rx$, atque $R^n x = x$ sit.

4. Aequationem 5^{ti} gradus in aliam mutare, cui tantummodo unicus coefficiens arbitrarius insit.

5. Functionem dati ordinis rationalem (R) invenire, quae aliquoties iterata ipsam radicem reddet, h. e. ejusmodi, ut $R^r x = x$ sit, exsistente exponente iterationis n numero integro, $R^{n+1} x = R(R^n x)$.

6. Quaeritur functio (fx), quae indefinite iterata formam ad exponentem datam, $\left(\text{ex gr. } f^n x = \frac{p + p_, n + p_{,,} n^2}{q + q_, n + q_{,,} n^2}\right)$ recipiat, exsistentibus $p, p_,, p_{,,}, q, q_,, q_{,,}$, functionibus ipsius x simul determinandis.

7. Data functione (g), quaeritur alia (φ) talis, ut $\varphi(gx) = \varphi x + 1$ sit; seu quaeritur functio, cujus differentia, pro incremento argumenti $= gx - x$, constans sit.

8. Datis functionibus f et g quibusvis, quaeritur alia duplicis argumenti φ ejusmodi, ut $\varphi(x, r + 1) = \varphi(fx, r) + gx$ sit.

9. Functionem, quae datae cujuscunque indefinities iterata est, secundum iterationis exponentem differentiare.

(Von Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

Lehrsätze und Aufgaben.

10. Zu einem sphärischen Dreiecke Δ gehören immer drei Nebendreiecke Δ', Δ'', Δ''', welche mit ihm zusammengenommen die halbe Kugelfläche ausmachen; die Radien der um diese Dreiecke geschriebenen Kreise mögen R, R', R'', R''', und die Radien der in sie geschriebenen Kreise r, r', r'', r''' sein. Unter diesen acht Radien finden nun mehrere Relationen statt, wovon die bemerkenswerthesten die folgenden sind:

Setzt man $\alpha = \operatorname{tang} R'$, $\beta = \operatorname{tang} R''$, $\gamma = \operatorname{tang} R'''$, $\delta = \operatorname{tang} R$, und $\alpha' = \operatorname{cotg} r'$, $\beta' = \operatorname{cotg} r''$, $\gamma' = \operatorname{cotg} r'''$, $\delta' = \operatorname{cotg} r$, so ist

$$\text{I.}\quad (\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\alpha\beta\gamma\delta = 4(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta).$$

Werden also α, β, γ als bekannt, und δ als unbekannt angesehen, so ist δ eine Wurzel dieser Gleichung des fünften Grades. Welche sind die übrigen Wurzeln derselben?

II. Wenn aus α, β, γ die Gröfse δ bestimmt ist, so finden sich α', β', γ', δ' nach den Formeln:

$$\alpha' = \frac{\beta+\gamma+\delta-\alpha}{2};\quad \beta' = \frac{\alpha+\gamma+\delta-\beta}{2};\quad \gamma' = \frac{\alpha+\beta+\delta-\gamma}{2};\quad \delta' = \frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2}.$$

III. Wenn drei von den vier Gröfsen α', β', γ', δ' gegeben sind, so dient zur Findung der vierten die Gleichung 5ten Grades:

$$(\beta'+\gamma'+\delta'-\alpha')(\alpha'+\gamma'+\delta'-\beta')(\alpha'+\beta'+\delta'-\gamma')(\alpha'+\beta'+\gamma'-\delta')\alpha'\beta'\gamma'\delta' = 4(\alpha'\beta'+\gamma'\delta')(\alpha'\gamma'+\beta'\delta')(\beta'\gamma'+\alpha'\delta').$$

Welche sind die vier übrigen Wurzeln dieser Gleichung?

IV. Die vier übrigen Gröfsen finden sich dann nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{\beta'+\gamma'+\delta'-\alpha'}{2};\quad \beta = \frac{\alpha'+\gamma'+\delta'-\beta'}{2};\quad \gamma = \frac{\alpha'+\beta'+\delta'-\gamma'}{2};\quad \delta = \frac{\alpha'+\beta'+\gamma'-\delta'}{2}.$$

Eine Folge hiervon ist, dafs

$$\text{V.}\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha'+\beta'+\gamma'+\delta';\quad \alpha+\alpha' = \beta+\beta' = \gamma+\gamma' = \delta+\delta' = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2};$$

$$\alpha+\beta = \gamma'+\delta';\quad \beta+\gamma = \alpha'+\delta';\quad \gamma+\delta = \alpha'+\beta';\quad \alpha+\gamma = \beta'+\delta';\quad \alpha+\delta = \beta'+\gamma';\quad \beta+\delta = \alpha'+\gamma'.$$

$$\text{VI.}\quad \beta\gamma+\alpha\delta = \beta'\gamma'+\alpha'\delta';\quad \alpha\gamma+\beta\delta = \alpha'\gamma'+\beta'\delta';\quad \alpha\beta+\gamma\delta = \alpha'\beta'+\gamma'\delta'.$$

$$\text{VII.}\quad \alpha^2+2\alpha'\beta'+\beta^2 = \gamma^2+2\gamma'\delta'+\delta^2 \text{ und } \alpha'^2-2\alpha\beta+\beta'^2 = \gamma'^2+2\gamma\delta+\delta'^2;$$
$$\alpha^2+2\alpha'\gamma'+\gamma^2 = \beta^2+2\beta'\delta'+\delta^2 \text{ und } \alpha'^2+2\alpha\gamma+\gamma'^2 = \beta'^2+2\beta\delta+\delta'^2;$$
$$\alpha^2+2\alpha'\delta'+\delta^2 = \beta^2+2\beta'\gamma'+\gamma^2 \text{ und } \alpha'^2+2\alpha\delta+\delta'^2 = \beta'^2+2\beta\gamma+\gamma'^2.$$

Überhaupt können aus drei von den acht Gröfsen α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' die fünf übrigen, wie auch die Seiten und Winkel, Inhalt und Umfang der Dreiecke Δ, Δ', Δ'', Δ''' zum Theil nach sehr einfachen Formeln berechnet werden. Nach welchen?

Wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, so reducirt sich die Gleichung fünften Grades zur Findung von δ leicht auf eine Gleichung zweiten Grades. Dasselbe findet Statt, wenn $\alpha' = \beta' = \gamma'$ gesetzt wird.

11. Wenn die innern Winkel eines vollständigen sphärischen Vierecks $ABCDEF$ (Taf. 1. Fig. 1.) mit den Buchstaben ihrer Scheitel A, B, C, D, E, F bezeichnet, und durch EG und GF die Nebenwinkel von E und F halbirt werden, so ist immer

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \sin \frac{E}{2} \sin \frac{F}{2} \cos G.$$

Ferner hat man $\cos E \cos F - \cos A \cos B = \sin C \sin D \cos CD$, und ähnliche Formeln hat man in Bezug auf die beiden andern Diagonalen AB und EF.

Die beiden aufgestellten Formeln gelten auch in der Planimetrie, wenn nur in der zweiten 1 für $\cos CD$ gesetzt wird. Die reciproken Sätze hierzu sind bekannt.

12. Wenn drei von einem Puncte P (Fig. 2.) ausgehende Bogen von Hauptkreisen von einem vierten in A, B, C geschnitten, und in ihnen drei andere Puncte a, b, c angenommen werden, so liegen diese ebenfalls in einem Hauptkreise, wenn ist:

$$\frac{\sin Bb}{\sin Pb} \sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa} \sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc} \sin AB, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin PB}{\operatorname{tang} Pb} \sin AC = \frac{\sin PA}{\operatorname{tang} Pa} \sin BC + \frac{\sin PC}{\operatorname{tang} Pc} \sin AB.$$

Die analogen Formeln der Planimetrie sind bekannt.

13. Wenn von drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises (Fig. 3.) drei Bogen AP, BP, CP von Hauptkreisen gezogen werden, welche sich in P schneiden, und man von denselben drei Puncten noch drei eben solche Bogen AQ, BQ, CQ in anderen Richtungen zieht, so gehen auch sie durch Einen Punct Q, wenn ist:

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX} \sin APC = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX} \sin APB, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX} \sin APC = \frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX} \sin APB.$$

Diese beiden Formeln gelten unverändert auch in der Planimetrie, wenn nur gerade Linien statt der Halbkreise genommen werden.

14. Werden von zwei Puncten M und N eines Hauptkreises (Fig. 4.) die Berührungslinien MA, MB, NC, ND an einen Kreis auf der Kugel gezogen, so ist immer

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang} \frac{\beta'}{2}.$$

Dasselbe Theorem gilt in der Ebene des Kreises, wenn MN, MA, MB, NC, ND gerade Linien sind, wovon die vier letzten den Kreis berühren.

Es wird ein elementarer Beweis dieser beiden Sätze verlangt.

(Von einem Ungenannten.)

Lehrsätze und Aufgaben.

15. Dreht sich ein rechter Winkel in der Ebene eines Kreises um seinen festen Scheitelpunct, so ist der Ort der Mitte der Sehne, zwi-

schen seinen Schenkeln, ein zweiter Kreis, dessen Mittelpunct in der Mitte zwischen dem Mittelpuncte des ersten Kreises und jenem festen Puncte liegt.

16. Bei der Ellipse ist das Rechteck unter den beiden Leitstrahlen, die nach irgend einem Puncte derselben gezogen werden, gleich dem Quadrate des halben Durchmessers, welcher mit der Tangente in jenem Puncte parallel ist. Findet dieser Satz auch bei der Hyperbel statt?

(Von dem Herrn Vermessungs-Reviser *Nernst* zu Stralsund.)

Lehrsatz.

17. Ein Ausdruck der Tangente durch eine Reihe der Potenzen ihrer Logarithmen ist:

$$\operatorname{tang} x =$$

$$1 + \frac{\log\operatorname{tang} x}{\log 2}\left[\frac{1}{1!2^1} + \frac{1!}{2!2^2} + \frac{2!}{3!2^3} + \frac{3!}{4!2^4} + \dots\right]$$

$$+\left(\frac{\log\operatorname{tang} x}{\log 2}\right)^2\left[\frac{1}{2!2^2} + \frac{2+1!}{3!2^3} + \frac{3.3+2!}{4!2^4} + \frac{4.11+3!}{5!2^5} + \dots\right]$$

$$+\left(\frac{\log\operatorname{tang} x}{\log 2}\right)^3\left[\frac{1}{3!2^3} + \frac{3+2+1}{4!2^4} + \frac{4.6+3.3+2!}{5!2^5} + \frac{4.35+4.11+3!}{6!2^6} + \dots\right]$$

$$+\left(\frac{\log\operatorname{tang} x}{\log 2}\right)^4\left[\frac{1}{4!2^4} + \frac{4+3+2+1}{5!2^5} + \frac{5.10+4.6+3.3+2!}{6!2^6} + \frac{6.85+5.35+4.11+3!}{7!2^7} + \dots\right]$$

$$+\left(\frac{\log\operatorname{tang} x}{\log 2}\right)^5\left[\frac{1}{5!2^5} + \frac{5+4+3+2+1}{6!2^6} + \frac{6.15+5.10+4.6+3.3+2!}{7!2^7} + \frac{7.175+6.85+5.35+4.11+3!}{8!2^8} + \dots\right]$$

$$+ \dots\dots\dots$$

Es ist z. B. $175 = 6.15 + 5.10 + 4.6 + 3.3 + 2!$, woraus die Fortschreitungs-Art dieser Reihen zu erkennen.

Für $\operatorname{tang} x = 2$ ist die Summe der eingeklammerten Reihen $= 1$.

(Von Anderen.)

Aufgaben.

18. Der körperliche Inhalt eines abgekürzten Kegels, dessen Grundflächen senkrecht auf der Axe stehen und, gleich allen übrigen auf die Axe senkrechten Querschnitten, Kreise sind, ist gegeben. Man sucht den Durchmesser der Grundflächen und die Höhe des Kegels für den Fall, wenn die Oberfläche des Kegels, sowohl mit Einschlufs der beiden Grundflächen, als mit Ausschlufs einer von ihnen, die möglich kleinste ist.

19. Die Erfahrung zeigt, dafs auf einem zweirädrigen, oder auch vierrädrigen Wagen, eine und dieselbe Last auf gewöhnlichem, unebenem, aber festem, und im Ganzen horizontalem Boden, mit um so geringerer Zugkraft fortbewegt wird, je näher der Schwerpunct der Last dem Boden liegt, auf welchem die Räder des Wagens fortrollen. Wie ist diese Erfahrung mathematisch zu erklären?

20. Der Durchschnitt eines Gefäfses mit der Ebene der Oberfläche der Flüssigkeit, worin es schwimmt, sei erstlich eine Ellipse und zwei-

tens eine von zwei gleichen Kreisbogen eingeschlossene Figur. Welche Gestalt muſs übrigens der eingetauchte Theil des Gefäſses haben, damit es mit derselben Oberfläche des eingetauchten Theils die möglichst gröſste Last trage, und zwar letztere erstlich mit Einschluſs des Gewichts des Gefäſses, und zweitens mit Ausschluſs dieses Gewichts gerechnet, von welchem angenommen wird, daſs dasselbe für den eingetauchten Theil das $m$fache der Oberfläche und das $n$fache des Volumens betrage, für den über Wasser befindlichen Theil aber constant sei.

21. Den Punct kleinster Entfernung für beliebige gegebene Puncte im Raume, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, zu finden, d. h. denjenigen Punct, von dessen Entfernungen von den gegebenen Puncten im Raume die Summe ein Minimum ist. Der Punct kleinster Entfernung für gegebene Puncte in einer und derselben Ebene hat die Eigenschaft, daſs er für alle Puncte, die in geraden Linien durch ihn und die gegebenen Puncte liegen, und die gleichweit von ihm entfernt sind, der Mittelpunct der Entfernungen, d. h. derjenige Punct ist, in welchem sich zwei auf einander senkrechte Axen schneiden, die so liegen, daſs die algebraische Summe der Entfernungen jener Puncte von ihnen Null ist. (Lehrbuch der Geometrie des Herausgebers S. 189. und 193.)

22. Den Flächeninhalt einer von geraden Linien umschlossenen Figur aus den Perpendikeln aus einem beliebigen Puncte auf ihre Seiten, und aus den Winkeln zwischen diesen Perpendikeln zu finden.

23. Zu untersuchen, ob ein beliebiges Polyëder durch die Lage und Länge der Perpendikel aus einem und demselben Puncte auf die Seiten-Ebenen des Körpers unvollständig oder vollständig oder übervollständig bestimmt werde; und im zweiten Falle: aus den gegebenen Stücken den körperlichen Inhalt des Polyëders zu finden.

24. Durch $\frac{a_1}{b_1}=c_1$, $\frac{a_2}{b_2}=c_2$, $\frac{a_3}{b_3}=c_3$ etc.

$$\frac{a_1+a_2+a_3\ldots.}{b_1+b_2+b_3\ldots.}$$

auszudrücken.

25. Wenn $y=fx$ eine gegebene Function von x ist, und x_1 ist einer der Werthe von x, für welchen y den gröſsten oder kleinsten Werth y_1 hat, so giebt bekanntlich die Gleichung $\partial y=0$ jenen Werth x_1 von x, und eliminirt man x_1 zwischen den Gleichungen $\partial y_1=0$ und $y_1=fx_1$, so findet man eine Gleichung, welche nur y_1 enthält und also y_1 bestimmt. Wie aber lieſse sich wohl die Elimination vermeiden, und die Gleichung, welche y_1 bestimmt, direct aus $y=fx$ finden?

8.

Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen.

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor zu Leipzig.)

Das berühmte Problem der Umkehrung der Reihen besteht bekanntlich darin, daſs, wenn eine Function einer Gröſse durch eine nach Potenzen der Gröſse fortlaufende Reihe gegeben ist, man umgekehrt die Gröſse selbst, oder auch irgend eine andere Function derselben, durch eine nach Potenzen jener Function fortschreitende Reihe ausgedrückt verlangt. Man weiſs, daſs es keines geringen analytischen Scharfsinnes bedurfte, um das Gesetz, nach welchem die Coefficienten der zweiten Reihe von denen der ersteren abhängen, aufzufinden. Ungleich einfacher zu lösen ist folgende Aufgabe.

Sei eine Function fx einer Gröſse x durch eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe gegeben:

$$1. \quad fx = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots .$$

Man soll x durch eine, nicht nach den Potenzen der Function fx, sondern nach den Functionen f der Potenzen von x fortgehende Reihe darstellen:

$$2. \quad x = b_1 fx + b_2 f(x^2) + b_3 f(x^3) + b_4 f(x^4) + \dots .$$

Wiewohl diese Aufgabe weder hinsichtlich der Schwierigkeit ihrer Lösung, noch hinsichtlich ihres Nutzens mit dem erst erwähnten eigentlichen Problem der Umkehrung der Reihen in Vergleich gestellt werden kann, indem aus dem Werthe von fx noch nicht die Werthe von $f(x^2)$, $f(x^3), \dots$, also auch noch nicht x nach der Formel (2.) sich berechnen lassen, und daher der eigentliche Zweck des Reversionsproblems hierbei unerfüllt bleibt, so wird uns doch die Lösung dieser neuen Aufgabe zu mehreren, für die Theorie der Reihen sowohl, als für die Combinationslehre, nicht ganz unwichtigen Resultaten führen.

Die Hauptforderung unseres Problems ist: die Coefficienten b_1, b_2, $b_3, \dots$ der Reihe (2.), als Functionen der Coefficienten a_1, a_2, $a_3, \dots$ der Reihe (1.) auszudrücken; und dies geschieht durch folgende ganz leichte Rechnung. Aus (1.) flieſst:

$$
\begin{aligned}
f(x^2) &= a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + a_4 x^8 + \ldots\ldots \\
f(x^3) &= a_1 x^3 + a_2 x^6 + a_3 x^9 + \ldots\ldots \\
f(x^4) &= a_1 x^4 + a_2 x^8 + \ldots\ldots \\
f(x^5) &= a_1 x^5 + a_2 x^{10} + \ldots\ldots \\
f(x^6) &= a_1 x^6 + a_2 x^{12} + \ldots\ldots \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Substituirt man diese Werthe von $f(x^2)$, $f(x^3)$, ... und von fx aus (1.) selbst in die Gleichung (2.), so kommt:

$$
x = a_1 b_1 + \left.\begin{matrix} a_2 b_1 \\ + a_1 b_2 \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a_3 b_1 \\ + a_1 b_3 \end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix} a_4 b_1 \\ + a_2 b_2 \\ + a_1 b_4 \end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix} a_5 b_1 \\ + a_1 b_5 \end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix} a_6 b_1 \\ + a_3 b_2 \\ + a_2 b_3 \\ + a_1 b_6 \end{matrix}\right| x^6 + \ldots\ldots
$$

Das Fortgangsgesetz der Coëfficienten dieser Reihe liegt am Tage. Ist nemlich der Coëfficient von x^m zu bestimmen, so zerlege man die Zahl m auf alle möglichen Arten in zwei ganze positive Factoren. Jedes dieser Producte giebt dann ein Glied des gesuchten Coëfficienten, indem man die zwei Factoren des Products als Indices der in einander zu multiplicirenden a und b nimmt.

Da die zuletzt erhaltene Gleichung für jeden Werth von x bestehen mufs, so haben wir:

$$
3. \quad \left\{
\begin{aligned}
& a_1 b_1 = 1, \\
& a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0, \\
& a_3 b_1 + a_1 b_3 = 0, \\
& a_4 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_4 = 0, \\
& a_5 b_1 + a_1 b_5 = 0, \\
& a_6 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_6 = 0, \\
& \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
\right.
$$

wodurch sich jedes b mit Hülfe der vorhergehenden b berechnen läfst.

Um hieraus die einzelnen b unabhängig von einander zu finden, setze man gröfserer Einfachheit willen $a_1 = 1$, und es kommt:

$$
4. \quad \left\{
\begin{aligned}
b_1 &= 1, \\
b_2 &= -a_2, \\
b_3 &= -a_3, \\
b_4 &= -a_4 + a_2 a_2, \\
b_5 &= -a_5, \\
b_6 &= -a_6 + a_3 a_2 + a_2 a_3, \\
b_7 &= -a_7, \\
b_8 &= -a_8 + a_4 a_2 + a_2 a_4 - a_2 a_2 a_2, \\
& \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
\right.
$$

Schon aus diesen wenigen Entwickelungen ist hinreichend abzunehmen, wie auch die Werthe der folgenden b aus a_2, a_3, ... zusammengesetzt sein werden. Man zerlege nemlich den Index m von b_m auf alle mögliche Arten in Factoren, indem man m selbst als höchsten Factor mitnimmt, die Einheit aber wegläſst, und auch je zwei Zerlegungen, die sich nur durch die Folge ihrer Factoren unterscheiden, als zwei verschiedene betrachtet; oder wie man sich auch in der Sprache der Combinationslehre kurz ausdrücken kann: **Man bilde alle Variationen mit Wiederholungen zum Product** m. Aus jeder dieser Variationen ergiebt sich dann ein Glied in dem Werthe von b_m dadurch, daſs man die Elemente der Variation zu den Indices von a nimmt, und dieses Glied erhält das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Anzahl seiner Elemente gerade oder ungerade ist.

So sind z. B. alle Variationen zum Product 12:

12, 2.6, 3.4, 4.3, 6.2, 2.2.3, 2.3.2, 3.2.2,

und daher

$$b_{12} = -a_{12} + 2a_2a_6 + 2a_3a_4 - 3a_2a_2a_3.$$

Die allgemeine Richtigkeit dieses Gesetzes flieſst aus den recurrirenden Formeln (3.) so leicht, daſs es überflüssig sein würde, uns bei dem Beweise desselben aufzuhalten.

Dieselben Relationen zwischen den Coefficienten a und b würden übrigens auch dann erhalten worden sein, wenn man, so wie (1.) und (2.), auf gleiche Art die allgemeineren Gleichungen

$$fx = a_1 Fx + a_2 F(x^2) + a_3 F(x^3) + \ldots,$$
$$Fx = b_1 fx + b_2 f(x^2) + b_3 f(x^3) + \ldots$$

mit einander verglichen hätte. Finden daher zwischen den a und den b die Relationen (3.) statt, so ist von diesen zwei Gleichungen die zweite eine Folge der ersten, und die erste eine Folge der zweiten, was auch im erstern Falle Fx, und im letzteren fx, für eine Function von x sein mag.

Die Relationen (3.) bestehen, wie man leicht wahrnimmt, auch dann noch, wenn man

für a_2, a_3, a_4, ... resp. $2^n a_2$, $3^n a_3$, $4^n a_4$, ... und

für b_2, b_3, b_4, ... resp. $2^n b_2$, $3^n b_3$, $4^n b_4$, ...

substituirt, wo n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Wenn daher

$$A.\ \begin{cases} fx = a_1 Fx + 2^n a_2 F(x^2) + 3^n a_3 F(x^3) + \ldots, \text{ so ist auch} \\ Fx = b_1 fx + 2^n b_2 f(x^2) + 3^n b_3 f(x^3) + \ldots \end{cases}$$

und umgekehrt.

Von noch gröfserer Allgemeinheit, als diese, sind folgende zwei zusammengehörige Gleichungen:

$$B.\ \begin{cases} fx = a_1 Fx + c_2 a_2 F(x^2) + c_3 a_3 F(x^3) + \ldots \\ Fx = b_1 fx + c_2 b_2 f(x^2) + c_3 b_3 f(x^3) + \ldots \end{cases}$$

In ihnen können die Coëfficienten c_2, c_3, c_5, ..., deren Indices Primzahlen sind, nach Belieben bestimmt werden. Ein Coëfficient c, dessen Index eine zusammengesetzte Zahl ist, mufs dann gleich genommen werden dem Product aus den Coëfficienten c, deren Indices die einfachen Factoren jener zusammengesetzten Zahl sind; also $c_4 = c_2^2$, $c_6 = c_2 . c_3$, etc. Die zwischen den a und den b erforderlichen Relationen sind dieselben, wie vorhin.

Um jetzt von dieser neuen Art der Reihen-Umkehrung ein sehr einfaches Beispiel zu geben, wollen wir

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$$

setzen, also nach (1.)

$$fx = x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ und daher } fx = \frac{x}{1-x}.$$

Mit diesen Werthen von a wird aber nach (4.):

$b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, $b_7 = -1$, $b_8 = 0$, u. s. w., und daher nach (2.):

$$[1.]\quad x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^7}{1-x^7} + \frac{x^{10}}{1-x^{10}} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} - \frac{x^{13}}{1-x^{13}} + \text{etc.}$$

Man wird es gewifs sehr auffallend finden, dafs die Coëfficienten dieser Reihe, auch wenn man sie noch weiter fortsetzt, keine andern als 1, 0 und —1 sind. Der Grund dieses merkwürdigen Ergebnisses, und das Gesetz, nach welchem die Coëfficienten 1, 0 und —1 mit einander abwechseln, wird sich am leichtesten mit Hülfe der recurrirenden Formeln (3.) entdecken lassen. Indem wir darin a_1, a_2, a_3, ... $= 1$, und nächstdem, der ersten dieser Formeln zufolge, auch $b_1 = 1$ setzen, werden sie:

$$1 + b_2 = 0,\ 1 + b_3 = 0,\ 1 + b_2 + b_4 = 0,\ 1 + b_5 = 0,$$
$$1 + b_5 = 0,\ 1 + b_2 + b_3 + b_6 = 0,\ 1 + b_7 = 0, \text{ u. s. w.,}$$

so dafs überhaupt, wenn α, β, γ, δ, ... alle von einander verschiedenen Factoren von m sind, man zur Bestimmung von b_m die Gleichung

$$1+b_\alpha+b_\beta+b_\gamma+\ldots+b_m=0$$

hat. Hieraus ist nun

1) ohne weiteres ersichtlich, dafs, wenn m eine Primzahl bedeutet, $1+b_m=0$, und daher $b_m=-1$ ist. Sei

2) m ein Product aus zwei einander nicht gleichen Primzahlen α und β, und habe also blofs α und β zu Factoren, so gilt für $b_{\alpha\beta}$ die Gleichung:

$$1+b_\alpha+b_\beta+b_{\alpha\beta}=0,$$

mithin

$$1+b_\alpha+b_\beta+b_\alpha.b_\beta=b_\alpha.b_\beta-b_{\alpha\beta}.$$

Es ist aber von den zwei Factoren $1+b_\alpha$ und $1+b_\beta$, in welche sich die linke Seite dieser Gleichung auflösen läfst, nach 1) jeder für sich $=0$, folglich

$$(a.)\quad b_{\alpha\beta}=b_\alpha.b_\beta.$$

Von einer Zahl, welche ein Product aus drei verschiedenen Primzahlen α, β, γ ist, erhält man sämmtliche Factoren durch Entwickelung des Products $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$, und es ist daher

$$1+b_\alpha+b_\beta+b_\gamma+b_{\alpha\beta}+b_{\alpha\gamma}+b_{\beta\gamma}+b_{\alpha\beta\gamma}=0.$$

Setzt man darin, der Formel (a.) zufolge, statt $b_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$ resp. $b_\alpha.b_\beta$, $b_\alpha.b_\gamma$, $b_\beta.b_\gamma$, so kann man die Gleichung auch so schreiben:

$$(1+b_\alpha)(1+b_\beta)(1+b_\gamma)=b_\alpha.b_\beta.b_\gamma-b_{\alpha\beta\gamma},$$

und da jeder der drei Factoren der linken Seite dieser Gleichung $=0$ ist, so hat man

$$(b.)\quad b_{\alpha\beta\gamma}=b_\alpha.b_\beta.b_\gamma.$$

Hiermit läfst sich auf ganz ähnliche Art zeigen, dafs, wenn δ eine vierte von α, β, γ verschiedene Primzahl ist,

$$(c.)\quad b_{\alpha\beta\gamma\delta}=b_\alpha.b_\beta.b_\gamma.b_\delta,$$

u. s. w. Nun ist, nach 1), $b_\alpha=b_\beta=b_\gamma=\text{etc.}=-1$, und daher

$$b_{\alpha\beta}=+1,\quad b_{\alpha\beta\gamma}=-1,\quad b_{\alpha\beta\gamma\delta}=+1,$$

und so fort abwechselnd. Wenn demnach m das Product aus mehreren einander nicht gleichen Primzahlen ist, so ist $b_m=\pm 1$, und zwar $+$ bei einer geraden, $-$ bei einer ungeraden Anzahl von Primzahlen.

3) Sei $m=\alpha^2=$ dem Quadrat einer Primzahl, so hat m den Factor α, und es ist daher

$$(d.)\quad 1+b_\alpha+b_{\alpha^2}=0,$$

folglich, wegen $1+b_\alpha=0$, $b_{\alpha^2}=0$.

Eben so folgt, wenn $m = \alpha^3$ ist, und daher α und α^2 zu Factoren hat:

$$1 + b_\alpha + b_{\alpha^2} + b_{\alpha^3} = 0,$$

mithin wegen c), $b_{\alpha^3} = 0$; und auf gleiche Art erhellet, daſs überhaupt, wenn m die Potenz einer Primzahl ist, $b_m = 0$ ist.

4) Wir haben jetzt noch den allgemeinen Fall zu untersuchen, wo m aus mehreren zum Theil einander gleichen, zum Theil verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist. Sei daher $m = \alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots \zeta^z$, also $p, q, r, \ldots z$ positive ganze Zahlen, von denen wenigstens eine gröſser als 1 ist. Auch ist darunter der vorige Fall, wo $m = \alpha^p$, als ein specieller, mit begriffen. Die Anzahl aller einfachen Factoren, in welche m aufgelöst werden kann, ist $= p + q + r + \ldots + z$, und werde mit N bezeichnet. Ich behaupte nun, daſs für ein m von der angegebenen Beschaffenheit immer $b_m = 0$ ist, und werde dieses beweisen, indem ich zeige, daſs wenn die Behauptung für alle Formen gilt, welche m bei allen Werthen von N, die kleiner als eine gewisse Zahl M sind, haben kann, die Behauptung auch für $N = M$ richtig ist.

Sämmtliche Factoren von $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots \zeta^z$ sind einerlei mit den Gliedern, welche durch Entwickelung des Products

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^p)(1+\beta+\ldots+\beta^q)(1+\gamma+\ldots+\gamma^r)\ldots(1+\zeta+\ldots+\zeta^z)$$

erhalten werden, und es ist folglich

$$1 + b_\alpha + b_\beta + \ldots + b_\zeta + b_{\alpha\beta} + b_{\alpha\gamma} + b_{\beta\gamma} + \ldots + b_{\alpha\beta\gamma} + \ldots$$
$$+ b_{\alpha\beta\gamma\ldots\zeta} + S + b_{\alpha^p\beta^q\gamma^r\ldots\zeta^z} = 0,$$

wo S die Summe aller durch die angezeigte Entwickelung entstehenden Glieder von der Form b_n bedeutet, in denen n dieselbe Beschaffenheit, wie die vorhin von m bemerkte, hat, nur daſs dabei die Summe der Exponenten der Primzahlen nie die Summe der Exponenten $p, q, r, \ldots z$ im letzten Gliede der Reihe erreicht. Nun sind von den ersten Gliedern der Reihe bis mit zum Gliede $b_{\alpha\beta\gamma\ldots\zeta}$ die Indices sämmtliche Factoren des aus den nicht potenzirten Primzahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \zeta$ zusammengesetzten Products, und es ist mithin die Summe dieser Glieder nach 2) für sich $= 0$. Wenn folglich jedes der unter S begriffenen Glieder $= 0$ ist, so muſs auch das letzte Glied $b_{\alpha^p\beta^q\ldots\zeta^z}$ selbst $= 0$ sein, wie zu erweisen war.

Aus dem in 3) gefundenen $b_{\alpha^2} = 0$ folgt daher

$$b_{\alpha^2\beta} = 0;$$

und hieraus und aus $b_{\alpha^3} = 0$:

$$b_{\alpha^3\beta} = 0, \quad b_{\alpha^2\beta^2} = 0; \quad b_{\alpha^2\beta\gamma} = 0;$$

und hieraus und aus $b_{\alpha^5} = 0$:

$$b_{\alpha^4\beta}, \quad b_{\alpha^3\beta^2}, \quad b_{\alpha^3\beta\gamma}, \quad b_{\alpha^2\beta^2\gamma}, \quad b_{\alpha^2\beta\gamma\delta} = 0,$$

u. s. w.

In der Reihe [1.], deren allgemeines Glied $\frac{x^m}{1-x^m}$ und deren Summe $= x$ ist, herrscht demnach das Gesetz, **dafs für $m = 1$ und für jedes m, welches ein Product aus einer geraden Anzahl von einander verschiedener Primzahlen ist, der Coëfficient des Gliedes $= 1$ ist, dafs jedes Glied, dessen m eine Primzahl selbst, oder ein Product aus einer ungeraden Menge sich nicht gleicher Primzahlen ist, den Coëfficient -1 hat, und dafs endlich alle Glieder wegfallen, deren Exponenten Quadrate oder höhere Potenzen von Primzahlen zu Factoren haben.**

Wir entwickelten dieses Gesetz mit Hülfe der recurrirenden Formeln (3.). Indessen wird es nicht unnütz sein, hierbei auch den independenten Bestimmungen (4.) Aufmerksamkeit zu schenken. Da gegenwärtig $a_2 = a_3 = a_4 = \text{etc.} = 1$, so ist nach den Formeln (4.) und nach dem, was zunächst über sie bemerkt worden: $b_m = -1 +$ der Anzahl der Binionen oder der Variationen der zweiten Classe, $-$ der Anzahl der Ternionen, oder der Variationen der dritten Classe, $+$ u. s. w., welche mit Wiederholungen zum Product m gebildet werden können. Hieraus, und weil die erste Classe blofs aus der Zahl m besteht, mithin die Anzahl der Unionen $= 1$ ist, fliefst in Verbindung mit dem Vorhergehenden folgender bemerkenswerthe Satz:

Bildet man alle Variationen mit Wiederholungen zu einem bestimmten Producte m, und ordnet diese Variationen nach Classen, wobei die Zahl m selbst die erste Classe ausmacht, die Einheit aber als Factor ausgeschlossen bleibt (indem sonst die Menge der Variationen unendlich sein würde), **so ist die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl der Variationen in den ungeraden entweder gleich oder um 1 gröfser, oder um 1 kleiner als die letztere, je nachdem von den einfachen Factoren von m einige, oder auch alle, einander gleich sind, oder m ein Product aus sämmtlich von einander verschiedenen Primzahlen ist, und dann**

die Menge dieser Primzahlen entweder gerade oder ungerade ist.

Dieser Satz steht in nahem Zusammenhange mit dem analogen Satze bei Variationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe m. Die erste Classe dieser Variationen hat blofs eine Complexion, nämlich m selbst; die zweite Classe besteht aus den Variationen:

1) $m-1$; 2) $m-2$; 3) $m-3$; .... $m-2$, 2; $m-1$, 1;

und die Anzahl derselben ist $= m-1$; die Anzahl der Variationen der dritten Classe findet sich $= \frac{m-1.m-2}{1.2}$; u. s. w.; und weil

$$1-(m-1)+\frac{m-1.m-2}{1.2}-\ldots = (1-1)^{m-1} = 0,$$

so ist bei Variationen mit Wiederholungen zu einer bestimmten Summe die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Variationenzahl in den ungeraden Classen immer gleich, statt dafs bei Variationen zu einem bestimmten Producte die eine Zahl bald der andern gleich, bald um 1 gröfser, bald um 1 kleiner, als die andere war.

Die Variationen zu bestimmten Summen sind in den Schriften über die Combinationslehre zur Genüge behandelt worden, während über Variationen zu bestimmten Producten, wenigstens unter diesem Namen, noch keine Untersuchungen angestellt sein dürften. Gleichwohl aber ist auch von letztern Variationen der Nutzen nicht zu verkennen, wie unter andern schon daraus hervorgeht, dafs die Aufgabe: alle Variationen der $n$ten Classe zum Product $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots$ zu finden, ganz einerlei ist mit der Aufgabe: $p+q+r+\ldots$ Elemente, von denen p Elemente unter sich, q Elemente unter sich, u. s. w. gleich sind, auf alle mögliche Arten in n verschiedene Fächer zu vertheilen. Auf dieselbe Art ist auch die Bildung der $n$ten Classe von Variationen zur Summe p offenbar nicht verschieden von der Forderung: p einander gleiche Elemente auf alle mögliche Arten in n Fächer zu vertheilen; woraus man zugleich ersieht, dafs das Variiren zu einer bestimmten Summe als ein specieller Fall des Variirens zu einem bestimmten Producte betrachtet werden kann.

Der so eben erhaltene Satz von Variationen zu bestimmten Producten möchte vielleicht einer der merkwürdigsten in diesem noch nicht bebauten Felde der Combinationslehre sein. Obschon er nun durch die

vorhergehenden Betrachtungen ganz bündig erwiesen ist, so will ich doch einen zweiten Beweis noch mittheilen, der in höherem Grade, als der vorige, auf der Natur der Variationen selbst beruht, und uns zugleich noch eine andere mit jener verwandte Eigenschaft dieser Variationen entdecken lassen wird.

Sei das Product, zu welchem man Variationen bilden will, zuerst eine Potenz einer Primzahl, also $= \alpha^p$, wo $p > 1$. Irgend eine Classe der Variationen zu diesem Product wird man erhalten, wenn man die ebensovielte Classe von Variationen zur Summe p entwickelt und die Elemente dieser Variationen zu Exponenten von α nimmt. So ergiebt sich z. B. die zweite Classe:

$$\alpha^1.\alpha^{p-1},\quad \alpha^2.\alpha^{p-2},\quad \ldots\ldots\ \alpha^{p-2}.\alpha^2,\quad \alpha^{p-1}.\alpha^1.$$

Die Anzahl der Variationen in der $n$ten Classe zum Product α^p ist mithin der Variationenzahl der $n$ten Classe zur Summe p gleich. Da nun, wie vorhin bemerkt worden, beim Variiren zu einer bestimmten Summe die Anzahl der Variationen in den graden Classen der Anzahl der Variationen in den ungraden gleich ist, so muſs dasselbe auch beim Variiren zu einem Product gelten, welches eine Potenz einer Primzahl ist.

Werde jetzt die Anzahl von Variationen zu einem Product m, welche resp. in der ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Classe enthalten sind, durch A_m, B_m, C_m, ... N_m bezeichnet. Sei n die Anzahl der einander sämmtlich oder nur theilweise gleichen, oder durchweg von einander verschiedenen Primzahlen, aus denen m zusammengesetzt ist; also die $n$te Classe die höchste. Sei ferner α eine in m nicht mit enthaltene Primzahl, und werden die Mengen der Variationen zum Product $m\alpha$ nach den verschiedenen Classen, deren höchste die $(n+1)$ste ist, gleicherweise durch $A_{m\alpha}$, $B_{m\alpha}$, ... $\overset{+1}{N}_{m\alpha}$ ausgedrückt. Alsdann wird sein:

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha} &= \quad A_m = 1,\\
B_{m\alpha} &= 2A_m + 2B_m,\\
C_{m\alpha} &= 3B_m + 3C_m,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
N_{m\alpha} &= n\overset{-1}{N}_m + nN_m,\\
\overset{+1}{N}_{m\alpha} &= (n+1)N_m.
\end{aligned}$$

Denn die zweite Classe zum Product $m\alpha$ findet sich, indem man erstlich die erste Classe zum Product m, d. i. m selbst nimmt, und diesem das

eine Mal α vor-, das andere Mal nachsetzt. Dies giebt $2 = 2A_m$ Variationen: α, m und m, α. Die übrigen Variationen der zweiten Classe zum Product $m\alpha$ erhält man aus den Variationen derselben Classe zum Product m, indem man von den zwei Elementen einer solchen Variation, — sie seien f, g, und daher $fg = m$, — das eine Mal das eine, das andere Mal das andere mit α verbindet, — also $f\alpha . g$ und $f . g\alpha$. Jede dieser B_m Variationen giebt daher zwei, und sämmtliche B_m geben $2B_m$ Variationen der zweiten Classe zum Product $m\alpha$, so daſs die Anzahl aller dieser Variationen überhaupt $= 2A_m + 2B_m$ ist. Eben so bekommt man aus jeder der B_m Variationen, wie $f.g$, drei: $\alpha.f.g$; $f.\alpha.g$; $f.g.\alpha$, und aus jeder der C_m Variationen, wie $h.i.k$, wenn $hik = m$ ist, ebenfalls drei, nemlich $h\alpha.i.k$, $h.i\alpha.k$, $h.i.k\alpha$, der $C_{m\alpha}$ Variationen; folglich u. s. w.

Addiren wir nun die obigen Gleichungen mit abwechselnden Zeichen und setzen das Aggregat, mit dessen Werthbestimmung wir uns jetzt beschäftigen:

$$A_m - B_m + C_m - \ldots \pm N_m = S_m,$$

und eben so

$$A_{m\alpha} - B_{m\alpha} + C_{m\alpha} - \ldots \mp \overset{+1}{N}_{m\alpha} = S_{m\alpha},$$

so kommt:

$$S_{m\alpha} = -S_m.$$

Nun ist nach dem Vorigen, und wenn α, β, γ, δ .... von einander verschiedene Primzahlen bedeuten: $S_{\alpha^p} = 0$, folglich auch $S_{\alpha^p\beta} = 0$, folglich $S_{\alpha^p\beta\gamma} = 0$, $S_{\alpha^p\beta\gamma\delta} = 0$, u. s. w.

Ist ferner m eine Primzahl $= \alpha$, so sind B_m, C_m, ... $= 0$, folglich $S_\alpha = A_\alpha = 1$, $S_{\alpha\beta} = -S_\alpha = -1$, $S_{\alpha\beta\gamma} = -S_{\alpha\beta} = 1$, u. s. w. — Alles übereinstimmend mit den schon oben auf andere Weise erhaltenen Resultaten.

Es bleiben uns daher noch diejenigen Werthe von S_m zu bestimmen übrig, bei welchen m zwei oder mehrere Potenzen von Primzahlen zu Factoren hat. Sei zu dem Ende m eine beliebige Zahl, α eine in m nicht mit enthaltene Primzahl, und suchen wir aus den Variationen zum Product m die Variationen zum Product $m\alpha^p$ herzuleiten. Zuerst ist:

$$1)\quad A_{m\alpha^p} = A_m.$$

Die zweite Classe zum Product $m\alpha^p$ wird sich ergeben:

Erstens aus der ersten Classe zum Product m, d. i. aus m allein, indem wir daraus Variationen von den Formen $m\alpha^q.\alpha^r$ und $\alpha^r m\alpha^q$ ableiten, wo für q nach und nach die Werthe 0, 1, 2, ... $p-1$, und für r

die Werthe 1, 2, ... p zu setzen sind, jedoch so, dafs immer $q+r=p$. Die Anzahl dieser Variationen, welche a heifse, wird offenbar eine blofs von p abhängige Zahl sein.

Zweitens aus der zweiten Classe zum Product m. Sei nemlich $f.g$ irgend eine Variation dieser Classe, also $fg=m$. Alle daraus fliefsenden Variationen sind dann von der Form $f\alpha^q.g\alpha^r$, wo $q=0, 1, 2, \ldots p$; $r=0, 1, 2, \ldots p$, und immer $q+r=p$ ist. Die Anzahl derselben wird mithin gleichfalls blofs von p abhängen, und heifse b. Eben so viel Variationen der zweiten Classe zu $m\alpha^p$ werden aber auch aus jeder andern Variation der zweiten Classe zum Product m hervorgehen. Die Anzahl aller erstern aus den letztern entstehenden Variationen ist daher $=bB_m$; und folglich überhaupt:

$$2)\quad B_{m\alpha^p}=aA_m+bB_m.$$

Auf gleiche Art werden alle Variationen der dritten Classe zum Product $m\alpha^p$ aus den Variationen der drei ersten Classen zum Product m sich ergeben, und zwar aus jeder Variation einer und derselben Classe gleichviel, so dafs wir setzen können:

$$3)\quad C_{m\alpha^p}=a'A_m+b'B_m+c'C_m,$$

wo a', b', c' nur von p abhängige Zahlen sind; b' z. B. die Menge derjenigen Variationen der dritten Classe zu $m\alpha^p$, welche aus einer und derselben, gleichviel welcher, Variation der zweiten Classe zum Product m fliefsen.

Eben so wird sein:

$$4)\quad D_{m\alpha^p}=a''A_m+b''B_m+c''C_m+d''D_m,$$

wo a'', b'', c'', d'' gleichfalls nur von p abhängen; u. s. w.

Man addire jetzt die Gleichungen 1), 2), 3), 4), u. s. w. mit abwechselnden Zeichen, und man erhält:

$$S_{m\alpha^p}=(1-a+a'-a''+\ldots)A_m-(b-b'+b''-\ldots)B_m$$
$$+(c'-c''+\ldots)C_m-(d''-\ldots)D_m+\text{etc.}$$

Sei nun zuerst m eine Primzahl, so sind $A_m=1$, B_m, C_m, D_m, $\ldots=0$, und, wie wir vorhin sahen, $S_{m\alpha^p}=0$, folglich nach gegenwärtiger Formel: $1-a+a'-a''+\ldots=0$, und auch dann noch $=0$, wenn m keine Primzahl ist, weil a, a', a'', ... blofs von p abhängen. Mithin ist allgemein:

$$S_{m\alpha^p}=-(b-b'+b''-\ldots)B_m+(c'-c''+\ldots)C_m-(d''-\ldots)D_m+\text{etc.}$$

Sei zweitens m ein Product aus zwei verschiedenen Primzahlen, so werden, B_m ausgenommen, C_m, D_m, $\ldots\ldots = 0$; und da nach dem Vorigen auch für diesen Fall $S_{m\alpha^p} = 0$ ist, so mufs die von m unabhängige Zahl $b - b' + b'' - \ldots\ldots = 0$ sein.

Eben so wird bewiesen, indem man m aus drei, vier und mehrern von einander verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sein läfst, dafs auch $c' - c'' + \ldots\ldots = 0$, u. s. w. Folglich ist allgemein

$$S_{m\alpha^p} = 0,$$

was auch m für eine positive ganze Zahl sein mag, und unser Satz ist somit von Neuem vollkommen dargethan.

Um den letzten Theil dieses Beweises noch durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir $p = 2$ setzen. Hiermit findet sich

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha^2} &= A_m, \\
B_{m\alpha^2} &= 4A_m + 3B_m, \\
C_{m\alpha^2} &= 3A_m + 9B_m + 6C_m, \\
D_{m\alpha^2} &= 6B_m + 16C_m + 10D_m, \\
E_{m\alpha^2} &= 10C_m + 25D_m + 15E_m, \\
&\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

In der That erhält man aus der ersten Classe zu m, d. i. aus m selbst, $4 = 4A_m$ Variationen der zweiten Classe zu $m\alpha^2$, nemlich:

$$m.\alpha^2,\quad \alpha^2.m,\quad m\alpha.\alpha,\quad \alpha.m\alpha.$$

und $3 = 3A_m$ Variationen der dritten Classe zu $m\alpha^2$, nemlich:

$$m.\alpha.\alpha,\quad \alpha.m.\alpha,\quad \alpha.\alpha.m,$$

keine Variationen aber der höhern Classen zu $m\alpha^2$, indem hierzu eine höhere Potenz von α, als die zweite, erforderlich ist.

Ist ferner $f.g$ eine der B_m Variationen, so bilden sich hieraus 3 von den $B_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$f\alpha^2.g,\quad f.g\alpha^2,\quad f\alpha.g\alpha;$$

9 von den $C_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2.f.g,\quad \alpha.f\alpha.g,\quad \alpha.f.g\alpha, \\
&f.\alpha^2.g,\quad f\alpha.\alpha.g,\quad f.\alpha.g\alpha, \\
&f.g.\alpha^2,\quad f\alpha.g.\alpha,\quad f.g\alpha.\alpha;
\end{aligned}$$

6 von den $D_{m\alpha^2}$ Variationen:

$$\begin{aligned}
&\alpha.\alpha.f.g,\quad \alpha.f.\alpha.g,\quad f.\alpha.\alpha.g, \\
&\alpha.f.g.\alpha,\quad f.\alpha.g.\alpha,\quad f.g.\alpha.\alpha,
\end{aligned}$$

höheren Classen zu $m\alpha^2$.

Ähnlicherweise lassen sich auch die Coëfficienten von C_m, D_m, ... in den obigen Gleichungen verificiren.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist immer der Zahl der höchsten Classe zum Product $m\alpha^p$, also der Anzahl aller einfachen Factoren dieses Products gleich, mithin $= p + q$, wenn m sich in q einfache Factoren auflösen läfst. Die $q$te Classe ist die höchste, welche zum Product m gebildet werden kann, also die höchste, welche auf der rechten Seite der Gleichungen vorkömmt. Sei z. B. wie vorhin $p = 2$, und enthalte m drei einfache Factoren, so reduciren sich die vorigen Gleichungen auf folgende fünf:

$$\begin{aligned}
A_{m\alpha^2} &= A_m, \\
B_{m\alpha^2} &= 4A_m + 3B_m, \\
C_{m\alpha^2} &= 3A_m + 9B_m + 6C_m, \\
D_{m\alpha^2} &= 6B_m + 16C_m, \\
E_{m\alpha^2} &= 10C_m.
\end{aligned}$$

Addirt man dieselben mit abwechselnden Zeichen, so werden, übereinstimmend mit dem obigen allgemeinen Beweise, die Coëfficienten von A_m, B_m, C_m einzeln $= 0$.

Dieses sich Aufheben der Coëfficienten von A_m, ... kann uns zur Aufstellung eines neuen Satzes Gelegenheit geben. Denn um anfangs nur die Coëfficienten 3, 9, 6 von B_m zu berücksichtigen, so erhielten wir diese Zahlen als die Mengen von Variationen in der 2ten, 3ten und 4ten Classe zum Product $fg\alpha^2$, wobei jedoch die Elemente f, g niemals in einem Factor mit einander verbunden vorkamen, auch ihre Folge, g nach f, immer dieselbe blieb. Ziehen wir auf gleiche Weise auch die Cöfficienten von C_m, D_m, etc. in Betracht, setzen die Potenz von α allgemein $= p$, und nehmen, was hier auf die Menge von Variationen keinen Einflufs hat, die Zahlen f, g, ... insgesammt einander gleich, jede $= \beta$, ihre Menge $= q$, so können wir den aus diesen Betrachtungen hervorgehenden Satz also ausdrücken:

Bildet man alle Variationen zum Product $\alpha^p \beta^q$, so jedoch, dafs in keinem Factor einer dieser Variationen β in einer höhern Potenz, als der ersten, vorkömmt, und ordnet man die Variationen nach Classen, wobei also die $q$te die niedrigste, und die $p+q$te die höchste Classe ist, so ist die Anzahl der Variationen in den geraden Classen der Anzahl in den ungeraden gleich.

Aus der im Obigen erhaltenen merkwürdigen Reihe

$$[1.] \quad x = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^5}{1-x^5} + \frac{x^6}{1-x^6} - \dots$$

lassen sich eine unzählige Menge anderer summirbarer Reihen ableiten, von denen ich hier nur diejenigen anführen will, die ihrer Einfachheit willen, mir von Interesse zu sein geschienen haben. Durch Division mit x wird die Reihe

$$[1.^*] \quad 1 = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^3} - \frac{x^4}{1-x^5} + \dots$$

Hierin x negativ genommen, erhält man:

$$1 = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1+x^3} - \frac{x^4}{1+x^5} + \dots$$

und wenn man diese Gleichung Glied für Glied zu der vorigen addirt, dann mit 2 dividirt, und zuletzt y für x^2 schreibt:

$$[2.] \quad 1 = \frac{1}{1-y} - \frac{y}{1-y^3} - \frac{y^2}{1-y^5} - \frac{y^3}{1-y^7} - \frac{y^5}{1-y^{11}} - \frac{y^6}{1-y^{13}} + \dots$$

Jedes Glied dieser Reihe hat die Form $\pm \frac{y^{\frac{m-1}{2}}}{1-y^m}$, wo m jede ungerade Zahl ist, die entweder eine Primzahl oder ein Product aus mehreren verschiedenen Primzahlen ist. Das Vorzeichen bestimmt sich wie im Vorigen nach der geraden oder ungeraden Menge der Factoren von m.

Setzt man $-y$ für y, so geht [2.] über in:

$$[3.] \quad 1 = \frac{1}{1+y} + \frac{y}{1+y^3} - \frac{y^2}{1+y^5} + \frac{y^3}{1+y^7} + \frac{y^5}{1+y^{11}} - \frac{y^6}{1+y^{13}} - \dots,$$

wo die Glieder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen mit den gleichstelligen Gliedern in [2.] haben, nachdem m von der Form $4p+1$ oder $4p-1$ ist.

Man addire [2.] und [3.], dividire durch 2 und setze z für y^2, so kommt:

$$[4.] \quad 1 = \frac{1}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^3} - \frac{z}{1-z^5} - \frac{z^5}{1-z^7} - \frac{z^8}{1-z^{11}} - \frac{z^3}{1-z^{13}} + \dots$$

Die Nenner und die Vorzeichen sind hier dieselben wie in [2.], die Exponenten der Zähler aber $= \frac{1}{4}(m-1)$ oder $= \frac{1}{4}(3m-1)$, nachdem m oder der Exponent im Nenner von der Form $4p+1$ oder $4p-1$ ist.

Nach demselben Verfahren, durch welches [2.] aus [1.*], und [4.] aus [2.] abgeleitet wurde, kann nun aus [4.] eine neue Reihe, aus dieser abermals eine neue, und so fort ohne Ende, entwickelt werden.

Wir wollen jetzt in der Reihe [1.], von welcher wir ausgegangen sind, x^2 für x schreiben, also:

$$(a.)\quad x^2 = \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^6}{1-x^6} - \frac{x^{10}}{1-x^{10}} + \frac{x^{12}}{1-x^{12}} - \dots$$

und dieses Ergebnifs zu [1.] addiren. Hiermit findet sich

$$[5.]\quad x+x^2 = \frac{1}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} - \frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} - \frac{x^{11}}{1-x^{11}} + \frac{x^{12}}{1-x^{12}} - \dots$$

eine Reihe, die sogleich aus [1.] hervorgeht, wenn man alle in [1.] vorkommenden geraden Exponenten verdoppelt.

Subtrahirt man $(a.)$ von [1.], Glied für Glied, so kommt:

$$[6.]\quad x - x^2 = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} + \frac{x^6}{1-x^{12}} - \dots,$$

und wenn man von [1.] das Doppelte von $(a.)$ abzieht:

$$[7.]\quad x - 2x^2 = \frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^3}{1+x^3} - \frac{x^5}{1+x^5} + \frac{x^6}{1+x^6} - \dots$$

In wiefern sich diese zwei Reihen von [1.] unterscheiden, fällt in die Augen und bedarf keiner Erörterung.

Eine Transformation von noch anderer Art wird dadurch bewerkstelliget, dafs man in [1.], $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wo $i = \sqrt{-1}$, setzt. Hiermit wird

$$x^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),\qquad \frac{x^m}{r-x^m} = \frac{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) - r^{2m}}{1-2r^m\cos m\varphi + r^{2m}},$$

und man erhält, nachdem man für x diese Functionen von r und φ in [1.] substituirt und hierauf das Mögliche vom Unmöglichen abgesondert hat, folgende zwei Gleichungen:

$$[8.]\quad r\cos\varphi = \frac{r\cos\varphi - r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2} - \frac{r^2\cos 2\varphi - r^4}{1-2r^2\cos 2\varphi + r^4} - \text{etc.},$$

$$[9.]\quad r\sin\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2} - \frac{r^2\sin 2\varphi}{1-2r^2\cos 2\varphi + r^4} - \text{etc.}$$

Eine neue reichhaltige Quelle summirbarer Reihen eröffne sich, wenn wir die allgemeineren Gleichungen (A) zur Hülfe nehmen. Werden $a_1, a_2, a_3, \dots = 1$ gesetzt, so sind $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -1$, $b_6 = 1$, u. s. w. und man hat daher allgemein, wenn

$$\text{I.}\quad \begin{cases} fx = Fx + 2^n F(x^2) + 3^n F(x^3) + 4^n F(x^4) + \dots \text{ ist:} \\ Fx = fx - 2^n f(x^2) - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 6^n f(x^6) - \dots \end{cases}$$

Setzt man hierin $Fx = x$ und $n = -1$, so wird

$$fx = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \dots = -\log(1-x),\ \text{und daher}$$

$$[10.]\quad x = -\log(1-x) + \tfrac{1}{2}\log(1-x^2) + \tfrac{1}{3}\log(1-x^3) + \tfrac{1}{5}\log(1-x^5) - \dots$$

Setzt man ferner $Fx = x - x^2$ und $n = -1$, so wird

$$fx = x - x^2 + \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4) + \tfrac{1}{3}(x^3 - x^6) + \dots$$

$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \dots = \log(1+x),$$

folglich

[11.] $$x - x^2 = \log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) - \tfrac{1}{3}\log(1+x^3) - \dots$$

Eben so wie [10.] ist auch:

$$y = -\log(1-y) + \tfrac{1}{2}\log(1-y^2) + \tfrac{1}{3}\log(1-y^3) + \dots$$

und wenn man diese Gleichung zu [10.] addirt:

$$x + y = -\log(1-x)(1-y) + \tfrac{1}{2}\log(1-x^2)(1-y^2) + \dots$$

Man setze hierin $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $y = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, und es kommt:

[12.] $$2r\cos\varphi = -\log(1 - 2r\cos\varphi + r^2) + \tfrac{1}{2}\log(1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4) + \dots$$

Aus [10.], [11.], [12.] folgt noch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet:

[13.] $$e^x = (1-x)^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-x^5)^{\frac{1}{5}}(1-x^6)^{-\frac{1}{6}} \text{ etc.}$$

[14.] $$e^{x-x^2} = (1+x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}(1+x^5)^{-\frac{1}{5}} \text{ etc.}$$

[15.] $$e^{2r\cos\varphi} = (1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{-1}(1 - 2r^2\cos 2\varphi + r^4)^{\frac{1}{2}} \text{ etc.}$$

Man setze jetzt in [2.] x^2 statt y, und multiplicire die Gleichung mit x, so kommt:

$$x = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x^3}{1-x^6} - \frac{x^5}{1-x^{10}} - \frac{x^7}{1-x^{14}} - \dots$$

Man hat aber $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots$ Wenn daher

$$a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1,\quad a_4 = 0,\ a_5 = 1,\quad a_6 = 0, \text{ etc.},$$

so ist $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$, $b_5 = -1$, $b_6 = 0$, etc.,
und es ist mithin von den zwei Gleichungen

II. $$\begin{cases} fx = Fx + 3^n F(x^3) + 5^n F(x^5) + 7^n F(x^7) + \dots \\ Fx = fx - 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) - 7^n f(x^7) - 11^n f(x^{11}) - \dots \end{cases}$$

eine jede eine Folge der andern. Eben so fließen aus [3.] die zwei zusammengehörigen Gleichungen:

III. $$\begin{cases} fx = Fx - 3^n F(x^3) + 5^n F(x^5) - 7^n F(x^7) + \dots \\ Fx = fx + 3^n f(x^3) - 5^n f(x^5) + 7^n f(x^7) + 11^n f(x^{11}) - \dots \end{cases}$$

Nimmt man darin $Fx = x$ und $n = -1$, so wird

$$fx = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \dots = \text{arc tang}\, x,$$

folglich

[16.] $$x = \text{arc tang}\, x + \tfrac{1}{3}\text{arc tang}(x^3) - \tfrac{1}{5}\text{arc tang}(x^5) + \tfrac{1}{7}\text{arc tang}(x^7) + \tfrac{1}{11}\text{arc tang}(x^{11}) + \dots$$

Die Zahlen 3, 5, 7, 11, ... sind hierbei alle ungeraden Zahlen, die entweder selbst Primzahlen oder Producte aus verschiedenen Primzahlen sind. Jedes Glied, dessen Zahl ein Product aus einer ungeraden Menge von Primzahlen und von der Form $4p-1$, oder aus einer geraden Menge und von der Form $4p+1$ ist, hat das positive Zeichen, die übrigen Glieder das negative.

Erwägt man dabei, daſs, wenn Zahlen, die zum Theil von der Form $4p+1$, zum Theil von der Form $4p-1$ sind, in einander multiplicirt werden, das Product entweder von der ersten oder zweiten Form ist, je nachdem die Factoren der zweiten Form in gerader oder ungerader Anzahl vorhanden sind; daſs folglich sowohl ein Product von der Form $4p-1$, welches eine ungerade Anzahl von Factoren hat, als ein Product von der Form $4p+1$, dessen Factorenzahl gerade ist, eine grade Zahl Factoren, jeden von der Form $4p+1$ haben muſs: so sieht man leicht, daſs die Coëfficienten der Reihe [16.] nichts Anderes sind, als alle die einzelnen aus der Multiplication

$$(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{5})(1+\tfrac{1}{7})(1+\tfrac{1}{11})(1-\tfrac{1}{13})(1-\tfrac{1}{17}) \text{ etc.}$$

hervorgehenden Producte, wo die Nenner der Brüche alle ungeraden Primzahlen sind, und die Brüche das positive oder negative Vorzeichen haben, je nachdem ihr Nenner von der Form $4p-1$ oder $4p+1$ ist.

Die jetzt erhaltenen Reihen [10.], [11.], [12.] und [16.] lassen sich auch sehr einfach durch Integration aus den vorhergehenden ableiten, z. B. [10.] aus [1.], wenn man [1.] vorher mit x dividirt und mit dx multiplicirt. Indessen schien es mir zweckmäſsiger, statt Integralrechnung ein auf der hier vorgetragenen Reversionsmethode selbst beruhendes Princip zu gebrauchen.

Den Schluſs dieses Aufsatzes mögen einige numerische Anwendungen der entwickelten Reihen machen. Die Reihe [1.] erhält, indem man $\frac{1}{v}$ für x schreibt, die etwas einfachere Form:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v^2-1} - \frac{1}{v^3-1} - \frac{1}{v^5-1} + \frac{1}{v^6-1} - \dots$$

Setzt man hierin $v = 10$, so kommt:

$$[17.] \quad \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{99} - \tfrac{1}{999} - \tfrac{1}{99999} + \tfrac{1}{999999} - \dots$$

folglich $\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{11} - \frac{1}{111} - \dots$, $1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{111} + \dots$, d. i.

$$[18.] \quad \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{111} + \tfrac{1}{11111} - \tfrac{1}{111111} + \dots$$

Hiermit ist die **doppelte Aufgabe** gelöset: **den Bruch** $\frac{1}{10}$ **als ein Aggregat von Brüchen darzustellen, deren Zähler** $= 1$,

und deren Nenner das eine Mal blofs mit der Ziffer 9, das andere Mal blofs mit der Ziffer 1 geschrieben werden. Das in der einen und andern Reihe herrschende Gesetz geht unmittelbar aus [1.] hervor. Auch ist es leicht, sich durch Rechnung zu überzeugen, dafs keine der beiden Aufgaben noch auf andere Weise gelöset werden kann.

Man setze noch in der für $\frac{1}{v}$ erhaltenen Reihe, $v = 1 + w$, wo w eine unendlich kleine Gröfse bedeute, so kommt, wenn man in der Entwickelung blofs die erste Potenz von w beibehält:

$$\frac{1}{1+w} = \frac{1}{w} - \frac{1}{2w} - \frac{1}{3w} - \frac{1}{5w} + \frac{1}{6w} - \dots;$$

folglich, wenn man mit w multiplicirt:

$$[19.] \quad 0 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} - \dots$$

Aus der uns schon bekannten Beschaffenheit der Vorzeichen und der Nenner dieser Reihe ersehen wir ohne Schwierigkeit, dafs die Reihe sich auch als ein Product aus den Factoren $1 - \frac{1}{2}$, $1 - \frac{1}{3}$, $1 - \frac{1}{5}$, $1 - \frac{1}{7}$, etc. darstellen läfst, wo 2, 3, 5, 7, ... die Reihe der sämmtlichen Primzahlen ist. Hiermit wird:

$$[20.] \quad 0 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{6}{7} \cdot \tfrac{10}{11} \cdot \tfrac{12}{13} \cdot \tfrac{16}{17} \dots$$

Ein Product aus allen Brüchen, deren Nenner die sämmtlichen Primzahlen sind, und deren Zähler um 1 kleiner als die Nenner sind, hat daher Null zum Grenzwerth. Dieses Resultat findet sich auch in Euler's *Introductio, Tom.* I. in dem Kapitel *de seriebus ex evolutione factorum ortis*, §. 277. Exempl. I.

Setzt man auf gleiche Weise in [13.] $x = 1 - w$, so kommt, mit Weglassung der höhern Potenzen von w:

$$e^{1-w} = w^{-1}(2w)^{\frac{1}{2}}(3w)^{\frac{1}{3}} \dots = w^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots} . 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{3}} \dots$$

Da nun das Product auf der rechten Seite dieser Gleichung dem Gliede mit der niedrigsten Potenz von w in der Entwickelung von e^{1-w} gleich sein mufs, und $e^{1-w} = e . e^{-w} = e(1 - w + \dots)$ ist, so mufs gedachtes Product $= e$ selbst, also unabhängig von w sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 0$, wie schon vorhin gefunden wurde; folglich

$$[21.] \quad e = 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{3}} . 5^{\frac{1}{5}} . 6^{-\frac{1}{6}} . 7^{\frac{1}{7}} . 10^{-\frac{1}{10}} . 11^{\frac{1}{11}} \text{ etc.}$$

Zieht man demnach aus jeder Zahl, welche eine Primzahl oder ein Product aus mehreren verschiedenen Primzahlen ist, die eben so vielte Wurzel, als die Zahl Einheiten hat, und multiplicirt die aus allen den Zahlen, welche Producte

aus einer geraden Menge von Primzahlen sind, gezogenen Wurzeln in einander, desgleichen die Wurzeln aus allen den Zahlen, welche entweder Primzahlen selbst, oder Producte aus einer ungeraden Menge von Primzahlen sind: so giebt die Division des erstern Products in das letztere die Basis der natürlichen Logarithmen.

Um mich einigermaſsen über die Annäherung zu belehren, mit welcher man auf diese Weise e berechnen kann, bin ich in der Factorenreihe bis zu $51^{-\frac{1}{51}}$ fortgegangen, und habe damit $e = 2{,}7258$ gefunden. Der wahre Werth von e ist $= 2{,}7183$, und daher das Product aus den von $53^{-\frac{1}{53}}$ an weggelassenen Factoren

$$= \frac{2{,}7183}{2{,}7258} = \frac{1}{1{,}0028}.$$

Jener sonderbare Ausdruck für e, und zugleich eine andere noch merkwürdigere Formel, läſst sich auch aus [15.] herleiten. Setzt man darin $r = 1$ und $\varphi = 2\psi$, so kommt:

$e^{2\cos 2\psi} = (2 - 2\cos 2\psi)^{-1}(2 - 2\cos 4\psi)^{\frac{1}{2}} \ldots = 4^{-1+\frac{1}{2}+\ldots}(\sin \psi^2)^{-1}(\sin 2\psi^2)^{\frac{1}{2}} \ldots,$

folglich, weil $-1 + \frac{1}{2} + \ldots = 0$, und wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht:

$$[22.] \quad e^{\cos 2\psi} = \sin \psi^{-1} \sin 2\psi^{\frac{1}{2}} \sin 3\psi^{\frac{1}{3}} \sin 5\psi^{\frac{1}{5}} \sin 6\psi^{-\frac{1}{6}} \ldots$$

Nimmt man nun hierin ψ unendlich klein, setzt also $\cos 2\psi = 1$ und $\sin \psi = \psi$, $\sin 2\psi = 2\psi$, etc. so erhält man, weil $\psi^{-1+\frac{1}{2}+\ldots} = 1$ ist, denselben Ausdruck für e, wie vorhin.

Noch folgt aus dieser Gleichung, wenn man von beiden Seiten die Logarithmen nimmt:

$$[23.] \quad \cos 2\psi = -\log \sin \psi + \tfrac{1}{2} \log \sin 2\psi + \tfrac{1}{3} \log \sin 3\psi + \tfrac{1}{5} \log \sin 5\psi - \ldots$$

Endlich setze man in [16.], $x = 1$; hierdurch wird $\operatorname{arctang} x = \operatorname{arctang}(x^2) = \text{etc.}, = \frac{1}{4}\pi$, π in der bekannten Bedeutung genommen, und damit:

$$[24.] \quad \frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \text{etc.}$$

eine Formel, welche, mit Berücksichtigung des oben zu [16.] Bemerkten, ganz mit der von **Euler** in dem vorhin angeführten Kapitel der *Introductio* §. 285. gegebenen Formel

$$[25.] \quad \frac{4}{\pi} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{etc.}$$

identisch ist.

9.

Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes.

(Par Mr. *Plücker*, prof. des math. à Berlin.)

---

1. Soit

$$tz + uy + vx + w = 0$$

l'équation générale du plan rapporté à trois axes coordonnés quelconques. En donnant aux coefficiens t, u, v et w des valeurs convenables t', u', v' et w', l'on pourra déterminer de position un plan donné quelconque. Je nommerai *coordonnées de ce plan* (coordonnées planaires) les quatre quantités t', u', v' et w'. Le nombre de ces coordonnées peut se réduire à trois si l'on pose l'une d'elles, choisie arbitrairement, égale à l'unité. En posant $w = 1$, les trois coordonnées d'un plan donné seront les valeurs réciproques et prises avec le signe contraire des segmens déterminés par ce plan sur les trois axes coordonnés. Dans ce qui va suivre nous poserons par préférence $t = 1$; alors l'interprétation géométrique des trois coordonnées restantes n'en deviendra pas moins simple que dans le cas précédent. Dans la discussion générale des surfaces algébriques il y aura de l'avantage à employer toutes les quatre coordonnées ensemble. L'on obtiendra alors, à la place d'équations complètes entre trois variables, des équations homogènes entre quatre variables. L'on peut du reste passer immédiatement de ces dernières équations ci aux premières et *vice versa*.

2. En regardant w, v et u comme coordonnées variables, l'équation

$$\varphi(w, v, u) = 0$$

peut être dit *représenter une surface*. Cette surface est celle qui est touchée par tous les plans, dont les coordonnées satisfont à l'équation proposée. Le système de deux équations pareilles existantes ensemble représentera alors la surface développable qui enveloppe à la fois les deux surfaces, représentées par ces deux équations prises séparement.

L'équation générale du premier degré entre les trois variables w, v et u représente un point de l'espace *), et le système de deux équations

---

*) Pour le démontrer, soit

1. $$z + uy + vx + w = 0$$

pareilles, existantes simultanément, une ligne droite passant par deux tels points.

L'équation générale du second degré représente les surfaces de la seconde classe (je me sers ici de la dénomination introduite par M. Gergonne) qui sont aussi du second ordre, et comme cas particuliers, des systèmes de deux points, qui peuvent devenir imaginaires, ou coïncider ou passer à l'infini. Dans le cas de deux points réels, on peut leur substituer la ligne droite joignant ces deux points et terminée en eux, et puis regarder cette ligne droite comme la limite, d'un ellipsoïde par exemple, dont deux axes, le troisième restant le même, diminuent sans cesse. C'est seulement se servir d'un autre mot pour exprimer la même chose.

Je n'entrerai ici dans aucun détail comme je l'ai fait dans la première partie du second volume de mes „Développemens" par rapport aux constructions à deux dimensions. Il est évident, qu'en introduisant les coordonnées nouvelles, l'on redoublera par là même les moyens de démonstration. L'on verra aisément que, quant à la facilité des démonstrations, l'avantage sera tantôt du coté des coordonnées vulgaires, tantôt, et plus souvent peut être, du coté des coordonnées planaires.

3. Dans la note, qu'on va lire, je me suis proposé de faire résortir la liaison, qui existe entre les deux systèmes de coordonnées, planaires et vulgaires. Pour mon but actuel, au lieu de suivre une marche directe, j'ai préféré de déduire ainsi la nouvelle théorie des surfaces de celle qui repose sur la considération des coordonnées des points et qui, par les géomètres modernes a reçu de si beaux développemens.

Soit

$$1. \quad F(z, y, x) = 0$$

l'équation d'une surface donnée quelconque. L'équation du plan tangent

---

l'équation générale du plan, u, v et w indiquant trois coefficiens indéterminés. Posons l'équation de condition suivante:

$$2. \quad c + c'u + c''v + w = 0,$$

en désignant par c, c' et c'' trois quantités données. L'on a également

$$z' + y'u + x'v + w = 0,$$

(z', y', x') étant un point quelconque du plan (1.). Mais cette équation ayant absolument la même forme que l'équation (2.), l'on en conclura qu'on pourra prendre

$$z = c, \quad y = c', \quad x = c''.$$

Donc par l'équation (2.) le plan (1.) est assujetti à la condition de passer par un point donné, dont les coordonnées sont c, c' et c''. C'est précisément ce point que représente l'équation (2.), lorsqu'on y regarde w, v et u comme coordonnées planaires et variables.

l'un de ses points sera alors

$$Z - z = q(Y - y) + p(X - x),$$

$$Z - qY - pX - (z - qy - px) = 0,$$

en posant $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{dz}{dx} = p$ et en regardant Z, Y et X comme coordonnées courantes. Les coordonnées de ce plan tangent seront d'après le premier numéro:

$$2. \quad v = -p, \quad u = -q, \quad w = -(z - qy - px),$$

et de là on tire: $\quad 3. \quad z + uy + vx + w = 0:$

équation symétrique par rapport à z, y, x et w, u, v.

Si l'on différentie l'équation (3.) par rapport à x seul, en regardant y constant, il viendra:

$$p + \frac{du}{dx}.y + \frac{dv}{dx}.x + v + \frac{dw}{dx} = 0,$$

oubien en réduisant:

$$\frac{du}{dx}.y + \frac{dv}{dx}.x + \frac{dw}{dx} = 0.$$

Si l'on regarde w comme fonction de v et u l'on pourra donner à cette équation la forme suivante:

$$\frac{du}{dx}\left(y + \frac{dw}{du}\right) + \frac{dv}{dx}\left(x + \frac{dw}{dv}\right) = 0.$$

Cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparement:

$$y + \frac{dw}{du} = 0, \quad x + \frac{dw}{dv} = 0, \quad \text{ou bien}$$

$$4. \quad \begin{cases} y = -Q, & x = -P, \end{cases}$$

si, pour abréger, l'on désigne par Q et P les coefficiens différentiels pa[rtiels] $\frac{dw}{du}$ et $\frac{dw}{dv}$. En substituant ces valeurs de y et x dans l'équation (3[.)] l'on obtiendra:

$$5. \quad z = -(w - Qu - Pv).$$

4. Si l'on met dans l'équation du point de contact (z, y, x):

$$W + xV + yU + w = 0$$

(je désigne par W, V et U les coordonnées planaires courantes) à la [place] de x, y et z, les valeurs, que nous venons d'obtenir, on trouvera:

$$6. \quad W - w = Q(U - u) + P(V - v).$$

... et P se tirent de l'équation

$$\ldots(w, v, u) = 0,$$

que nous supposons obtenue par l'élimination de z, y et x entre les quatre équations (1.) et (2.) et qui par conséquent représentera, ainsi que (1.), la surface donnée.

Nous aurions pu, en suivant une marche inverse, partir de l'équation (6.), qui s'obtient immédiatement, si l'on développe la théorie des surfaces dans le système des coordonnées planaires.

L'on voit que les relations entre les coordonnées z, y, x et w, u, v soient parfaitement réciproques.

5. Dans ce numéro nous nous proposons de développer les relations qui existent entre les coefficiens différentiels seconds de z par rapport à y et x et ceux de w par rapport à u et v. Nous poserons d'abord pour abréger

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dx\,dy}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t,\quad \frac{d^2w}{dv^2}=R,\quad \frac{d^2w}{du\,dv}=S,\quad \frac{d^2w}{du^2}=T.$$

Si l'on différentie les deux équations:

$$u=-q,\quad v=-p,$$

successivement par rapport à y seul, en regardant x constant, et par rapport à x seul, en regardant y constant, l'on obtiendra:

$$t=-\frac{du}{dy},\quad s=-\frac{du}{dx}=-\frac{dv}{dy},\quad r=-\frac{dv}{dx}.$$

Si l'on différentie, sous le même point de vue, l'équation:

$$y+Q=0,$$

l'on trouvera, en regardant Q comme fonction de u et v:

$$1+\frac{dQ}{du}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dv}{dy}=0,$$

$$\frac{dQ}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=0,$$

ou ce qui revient au même:

$$1.\qquad 1-Tt-Ss=0,$$

$$2.\qquad Ts+Sr=0.$$

En opérant de la même manière sur l'équation suivante

$$x+P=0,$$

l'on parviendra aux deux équations suivantes:

$$3.\qquad 1-Rr-Ss=0,$$

$$4.\qquad Rs+St=0.$$

Il est évident que l'une quelconque des quatre équations (1.) – (4.) soit comportée par les trois autres, car les équations (1.) et (3.), et les

équations (2.) et (4.) s'accordent à donner

$$5.\quad Tt = Rr.$$

Après cela l'on obtient aisément:

$$6.\quad \begin{cases} S = \frac{-s}{rt-s^2}, & s = \frac{-S}{RT-S^2}, \\ R = \frac{t}{rt-s^2}, & r = \frac{T}{RT-S^2}, \\ T = \frac{r}{rt-s^2}, & t = \frac{R}{RT-S^2}. \end{cases}$$

Il sera bon de remarquer aussi l'équation suivante:

$$7.\quad (rt-s^2)(RT-S^2) = 1.$$

6. En différentiant de nouveau les équations (1.) — (4.) successivement par rapport à y et x, en regardant R, S et T comme fonctions de u et v, et u et v comme fonctions de y et x, l'on obtiendra des équations, qui serviront à déterminer les quatre coefficiens différentiels partiels du troisième ordre, de w par rapport à u et v, au moyen des coefficiens différentiels du troisième et du second ordre, de z par rapport à y et x. En suivant la même marche, l'on pourra continuer ainsi à volonté. Un simple changement de lettres suffira alors, pour exprimer, réciproquement, tout coefficient différentiel partiel d'un ordre quelconque de z par rapport à y et x en fonction des coefficiens différentiels partiels du même ordre et des ordres inférieurs, inclusivement le second, de w par rapport à u et v.

Dans ce qui suivra j'éclaircirai par quelques exemples l'application de ce qui précède.

7. *Théorie analytique nouvelle des surfaces développables et des courbes à double courbure.* Soient

$$1.\quad \begin{cases} F(w, v, u) = 0, \\ f(w, v, u) = 0, \end{cases}$$

les équations entre les coordonnées nouvelles de deux surfaces données quelconques. Si l'on choisit les trois coordonnées w, v et u telles, qu'elles satisfont en même tems aux deux équations proposées, on aura les coordonnées d'un plan, qui touche à la fois les deux surfaces données. Tous les plans ainsi déterminés envelopperont une surface développable et circonscrite à ces mêmes surfaces. L'on peut donc dire que le système des deux équations (1.) *représente une surface développable.* Il en résulte que le plan, qui, dans son mouvement, enveloppe une telle surface, ne peut passer d'une position quelconque à une autre que dans un sens

unique et déterminé: et c'est en cela évidemment que consiste le caractère des surfaces développables.

Si l'on élimine v entre les deux équations (1.), il viendra:

$$u = \varphi(v),$$

ou bien, si l'on y met pour u et v leurs valeurs $(-q)$ et $(-p)$:

$$q = \psi(p).$$

Si de cette équation enfin on fait disparaître, par la différentiation, la fonction inconnue, designée par ψ, il viendra

$$2. \quad s^2 - rt = 0.$$

C'est l'équation des surfaces développables donnée pour la première fois par Euler. Je ne crois pas qu'il y ait une marche plus directe, d'y parvenir, que la précédente.

8. Soient, en second lieu

$$F(z, y, x) = 0,$$
$$f(z, y, x) = 0,$$

les équations, entre les coordonnées vulgaires, de deux surfaces données quelconques. Le système de ces équations représente l'intersection des deux surfaces, courbe, en général, à double courbure. En éliminant z entre les deux équations proposées, il viendra

$$y = \varphi(x)$$

ou bien, en substituant:

$$Q = \psi(P)$$

et de là on tire:

$$S^2 - RT = 0.$$

C'est l'équation des courbes à double courbure, dans le système des coordonnées planaires.

Analytiquement parlant, une surface développable ne doit être regardée comme une surface que dans le système des coordonnées vulgaires, et non pas dans le système des coordonnées nouvelles, parceque dans ce dernier système-ci une telle surface ne peut être représentée, qu'au moyen de deux équations simultanées. Pareillement une courbe à double courbure ne doit nullement être rangée parmi les surfaces dans le système des coordonnées vulgaires, parceque deux équations simultanées y sont exigées pour la représenter.

Mais dans le système de coordonnées planaires une courbe à double courbure doit être placée parmi les surfaces: elle y est représentée par

une équation unique. Et, réciproquement, toute équation entre w, v et u, qui satisfait à l'équation (4.) représentera une telle surface.

L'on peut encore remarquer le parallélisme suivant entre une surface développable et une courbe à double courbure. L'une est touchée par un plan tangent quelconque, non dans un point unique, mais suivant une ligne droite indéfinie. L'autre, dans l'un quelconque de ses points, est touchée par une infinité de plans, qui se coupent tous suivant une même ligne droite, touchant la courbe. L'une peut être *engendrée* par une ligne droite en mouvement, l'autre est *enveloppée* par une ligne droite, qui se meut dans l'espace.

9. *Théorie du contact et de l'osculation.* Si deux surfaces se touchent en un point donné, l'on a, en rapportant les lettres non accentuées à l'une, et les lettres accentuées à l'autre surface:

$$q = q', \quad p = p', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

En introduisant les coordonnées planaires relatives au plan, qui touche les deux surfaces dans le point donné, l'on obtiendra d'abord des quatre premières équations:

$$u = u', \quad v = v', \quad P = P', \quad Q = Q',$$

et de là et de l'équation $z = z'$ on tire d'après le numéro 5:

$$w = w'.$$

Si les deux surfaces ont dans le point donné un contact du second ordre, l'on a, comme on sait, les trois équations nouvelles:

$$r = r', \quad s = s', \quad t = t',$$

et de là on tire d'après les équations (6.) du numéro cité:

$$R = R', \quad S = S', \quad T = T'.$$

L'on pourroit continuer ainsi à volonté. La théorie du contact de deux surfaces en un point donné ou sur un plan donné est donc exactement la même dans les deux systèmes de coordonnées différentes.

10. *Courbure des surfaces.* L'on sait que pour déterminer les deux rayons de courbure d'une surface donnée en un point donné, l'on a, dans la supposition de coordonnées rectangulaires, l'équation suivante:

$$(rt - s^2)\delta^2 + [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r](1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\delta + (1+p^2+q^2)^2 = 0,$$

équation qui se transforme aussitôt en

$$(1.) \quad \delta^2 + [(1+v^2)R - 2uvS + (1+u^2)T](1+v^2+u^2)^{\frac{1}{2}}\delta + (1+v^2+u^2)^2(RT - S^2) = 0.$$

Si l'on prend un plan quelconque, parallèle au plan, qui touche la surface

dans le point donné, pour celui des xy, l'on aura $u=0$, $v=0$; donc

$$2.\quad \delta^2+(R+T)\delta+(RT-S^2)=0.$$

En désignant enfin par δ' et δ'' les deux racines de cette équation, il viendra

$$\delta'+\delta''=-(R+T),\quad \delta'\delta''=RT-S^2.$$

L'on sait que $\left(-\frac{1}{r}\right)$ et $\left(-\frac{1}{t}\right)$ expriment les rayons de courbure des deux sections faites dans la surface proposée par les plans des xz et yz, l'angle formé par l'axe des x et celui des y étant quelconque et l'axe des z perpendiculaire au plan des xy. Pareillement $(-R)$ et $(-T)$ expriment les rayons de courbure des courbes d'intersection de deux cylindres circonscrits à la surface donnée et dont les arêtes sont parallèles à l'axe des y et des x, respectivement avec les plans des xz et yz; ou, ce qui revient au même, les rayons de courbure de ces deux mêmes cylindres, divisés par le sinus de l'angle, formé par l'axe des y et celui de x. Dans ce qui précède, toutes les courbures sont supposées prises au point donné, appartenant à la fois à la surface proposée, aux deux cylindres circonscrits et aux différentes courbes d'intersection.

Après cela l'une des deux dernières équations fournit le théorème suivant:

„La somme des deux rayons de courbure de deux cylindres cir-„conscrits à une surface donnée quelconque, de manière que leurs arêtes „soient parallèles à deux tangentes quelconques, mais perpendiculaires entre „elles, d'une surface donnée dans un point donné, est constante et égale „à la somme des deux rayons de courbure de la surface en ce point."

11. Dans le cas que la surface, proprement dite, est remplacée par une courbe à double courbure, l'on a

$$RT-S^2=0.$$

L'un des deux rayons de courbure disparaissant alors, le degré des équations (1.) et (2.) s'abaisse et l'on obtient:

$$(3.)\quad \delta=-[(1+v^2)R-2uvS+(1+u^2)T](1+u^2+v^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$(4.)\quad \delta=-(R+T).$$

L'un des deux rayons de courbure d'une courbe (considéré comme surface) est nul par conséquent, comme on devoit s'y attendre; l'autre est généralement donné par l'équation (3.). C'est ce dernier rayon qui est pris dans le plan osculateur de la courbe.

Tout plan contenant une tangente de la courbe doit être censé la toucher. Après cela l'interprétation géométrique de la dernière équation fait voir, que la somme des deux rayons de courbure de deux cylindres quelconques, dont les arètes sont perpendiculaires entre elles et à la tangente de la courbe en un point donné, est constante et égale au rayon de courbure de la courbe en ce point. Ce même résultat, cas particulier du théorème précédent, peut s'exprimer aussi de la manière suivante:

„Le rayon de courbure d'une courbe donnée quelconque en un „point donné est égal à la somme des deux rayons de courbure cor„respondans des deux projections planes de la courbe sur deux plans „quelconques, perpendiculaires entre eux et parallèles à la tangente de „la courbe proposée dans le point donné."

12. Nous aurions aussi pu déduire les résultats précédens de l'une des équations (6.) du numéro 5, de celle-ci par exemple:

$$t = \frac{R}{RT - S^2},$$

comme nous allons en déduire quelques autres résultats. Si l'on écrit cette équation de la manière suivante

$$RT - S^2 = \delta^{\prime}\delta^{\prime\prime} = R.\frac{1}{t},$$

l'on obtiendra, en interprétant cet autre théorème:

„Si par un point donné et suivant une tangente quelconque l'on „fait dans une surface donnée une section plane, et si à la même surface „on circonscrit un cylindre, dont les arètes sont parallèles à la même „tangente: le produit des rayons de courbure, dans le point donné, de „la courbe dans le plan d'intersection et de ce cylindre, sera constant et „égal au produit des deux rayons de courbure de la surface proposée en „ce même point."

Euler a démontré le premier, qu'en nommant ϖ l'angle que forme l'axe des y avec celui des deux sections principales à laquelle répond le rayon δ', l'on a (Dupin, *Développemens de géométrie p.* 109.):

$$-t = \left(\frac{1}{\delta'}\right)\cos^2\varpi + \left(\frac{1}{\delta''}\right)\sin^2\varpi$$

et de là on tire d'après l'équation (6.):

$$-R = \delta''\cos^2\varpi + \delta'\sin^2\varpi.$$

Cette équation donne la courbure d'un cylindre circonscrit quelconque au moyen de la direction de ses arètes, et les courbures de la surface proposée dans le point correspondant.

13. Si $S=0$, on aura également d'après le numéro 3., $s=0$. L'équation (5.) se réduit alors à

$$17. \quad T=\frac{1}{t}.$$

Si l'on s'exprime comme l'a fait Mr. Dupin, l'on aura donc ce nouveau théorème:

„Si à une surface donnée quelconque l'on circonscrit un cylindre, „dont les arêtes sont parallèles à l'une de deux tangentes conjuguées quel-„conques dans un point donné, ce cylindre aura, avec la surface propo-„sée, un contact du second ordre suivant l'autre tangente conjuguée."

L'on sait que le produit des deux rayons de courbure de deux sections normales faites dans une surface donnée suivant deux tangentes conjuguées quelconques et du carré du sinus de l'angle formé par ces tangentes, soit égale à une quantité constante et que la somme de ces mêmes rayons le soit également. (Dupin, *Dév. p.* 102.) De là résultent, d'après l'équation (7.) ces deux autres théorèmes.

„Le produit des deux rayons de courbure de deux cylindres cir-„conscrits à une surface donnée quelconque et dont les arêtes sont paral-„lèles à deux tangentes conjuguées, est égal à une même quantité con-„stante. La somme de ces mêmes rayons divisée par le sinus de l'angle „des tangentes conjuguées est également constante."

14. Pour ne pas étendre trop loin la présente note, je me bornerai, pour dernier exemple, à énoncer simplement que, dans le système de coordonnées planaires, des formules intégrales nouvelles se présentent, tant pour la quadrature des surfaces que pour la cubature des corps, terminés par elles, ces surfaces et ces corps étant limités d'une autre manière que dans la méthode ordinaire.

15. Je pense que les exemples que j'ais pris au hazard et auxquels en eux mêmes je n'attache aucune importance, suffiront pour faire sentir la possibilité, je dis plus, la nécessité de parvenir, en poursuivant la même marche, à une foule de résultats nouveaux. L'on n'a qu'à parcourir les ouvrages de MM. Monge, Dupin, Hachette et d'autres géomètres qui se sont occupé de la théorie analytique des surfaces, pour en recueillir les matériaux pour un livre nouveau sur une matière qui semblait usée, mais qui, en se présentant sous une autre face, est bien loin de l'être.

16. Je terminerai par une dernière remarque purement analytique. Soit

$$1.\quad f(q, p, z, y, x) = 0$$

une équation donnée entre z, y, x et les deux coefficiens différentiels partiels de z par rapport à y et x, et supposons qu'on en ait obtenu comme intégrale l'équation suivante:

$$2.\quad F(z, y, x) = 0.$$

L'équation différentielle proposée peut se transformer dans la suivante:

$$3.\quad f(-u, -v, -(w-Qu-Pv), -Q, -P) = 0,$$

dont on aura également l'intégrale en éliminant z, y et x entre l'équation (2.) et les trois équations suivantes:

$$\frac{dz}{dy} = -u,\quad \frac{dz}{dx} = -v,\quad w + uy + vx + z = 0.$$

Si l'équation (3.) se réduit à

$$4.\quad f(-(w-Qu-Pv), -Q, -P),$$

l'on aura, à la place de l'équation (2.), celle-ci:

$$f(z, y, x) = 0,$$

et de là on déduira une intégrale, qui ne sera qu'une solution particulière de l'équation (4.).

En passant aux coefficiens différentiels seconds, l'on verra qu'une équation quelconque:

$$\varphi(t, s, r, q, p, z, y, x) = 0$$

est intimément liée avec l'autre:

$$\varphi\left(\frac{R}{RT-S^2}, -\frac{S}{RT-S^2}, \frac{T}{RT-S^2}, -u, -v, -(w-Qu-Pv), -Q, -P\right) = 0,$$

de manière que, l'intégrale de l'une d'elles étant obtenue, l'autre s'intégrera par une simple élimination. Les deux équations suivantes:

$$(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = 0,$$
$$(1+x^2)r - 2xys + (1+y^2)t = 0,$$

dans la dernière desquelles j'ai changé seulement les variables, en fournissent un exemple; l'une étant intégrable, l'autre l'est également.

Je m'abstiens ici de toute sorte de développemens, parcequ'il y a une manière plus générale de traiter la même question. J'avois seulement en vue de faire ressortir que, quant à la possibilité d'en obtenir les intégrales, les équations aux différences partielles se groupent par couples, ainsi que cela a lieu, quant aux théorèmes de géometrie.

Bonn, le 18. Février 1831.

10.

Quelques théorèmes de géométrie.

(Par Mr. *L. J. Magnus* à Berlin.)

Dans un article inséré p. 51. du présent volume j'ai donné une méthode, pour tirer de théorèmes connus sur des coniques des autres théorèmes sur des lignes courbes du même degré. Mais la même méthode suffit pour tirer de ces mêmes théorèmes connus des théorèmes sur des courbes d'un degré plus élevé; et comme l'application de la méthode n'a aucune difficulté, je me borne seulement à en donner quelques résultats qui se rapportent à des courbes dont les géomètres se sont occupés déjà depuis tant de siècles.

Soient données

1°. une cardioide dont l'équation en coord. rect. est

$$(y^2+x^2)^2-4a(y^2+x^2)x-4a^2y^2=0;$$

2°. une cissoide dont l'équation en coord. rect. est

$$(y^2+x^2)x-ay^2=0;$$

3°. une lemniscate dont l'équation en coord. rect. est

$$(y^2+x^2)^2+a^2(y^2-x^2)=0.$$

Désignons le point de rebroussement de la cardioide, celui de la cissoide, et le centre de la lemniscate par p_1.

I. Soit élevée au point de rebroussement p_1 de la *cardioide* une perpendiculaire D à l'axe des abscisses. Soit p un point quelconque de la courbe, tirez la corde pp_1, élevez par son point milieu une droite perpendiculaire à cette corde qui coupera en général la droite D dans un point q, joignez p et q, enfin nommez m et n les droites qui divisent en deux parties égales les angles formés par les droites pq et pp_1; de ces droites m et n l'une sera la tangente et l'autre la normale de la courbe au point p.

II. Soient élevées deux perpendiculaires D, D' à l'axe de la *cissoide*, l'une par le point de rebroussement p_1 et l'autre par le point de l'axe dont l'abscisse est égale à $2a$. De même soient élevées deux perpendiculaires D, D' à l'axe de la *lemniscate* par deux points de cette axe dont les abscisses sont égales respectivement à $+\frac{a}{\sqrt{8}}$ et $-\frac{a}{\sqrt{8}}$.

Soit p un point quelconque de l'une de ces deux courbes, tirez la corde pp_1, élevez par son point milieu une droite perpendiculaire à cette corde, qui coupera en général les deux droites D, D' en deux points q et q_1, joignez pq et pq_1, enfin nommez m et n les deux droites qui divisent en deux parties égales les angles formés par les droites pq, pq_1; de ces droites m et n l'une sera la tangente et l'autre la normale de la courbe au point p.

III. Si par un point fixe p pris arbitrairement dans le plan de l'une de ces trois courbes ci-dessus nommées et par le point p_1 on fait passer un cercle C_1, il coupera la courbe tout au plus encore en deux points a et b. Si de plus on décrit deux cercles C_2, C_3 passant tous deux par le point p_1, dont l'un touche la courbe au point a et l'autre au point b, ces deux cercles C_2, C_3 se couperont en un second point q. Si ensuite on fait varier le rayon du cercle C_1, les rayons des cercles C_2, C_3 varieront aussi. Alors le point q décrira une courbe qui sera un cercle passant par le point p_1.

IV. Réciproquement, si le second point d'intersection q de deux cercles C_2, C_3 qui passent par le point p_1 et dont l'un touche une des trois courbes en un point a et l'autre en un point b, se meut sur une circonférence d'un cercle fixe qui passe par le point p_1: tous les cercles qu'on peut faire passer par les deux points variables a et b et par le point fixe p_1 iront passer par un second point fixe p.

V. Si l'on prend sur une des trois courbes deux points quelconques p_2, p_3, et que par ces points on décrive une suite de cercles: chacun de ces cercles coupera la courbe tout au plus encore en deux points a, b. Or, si l'on décrit une nouvelle suite de cercles dont chacun passe par le point p_1 et par une couple de points a, b: tous les cercles de cette suite se toucheront au point p_1.

VI. Si l'on décrit un cercle C_1 touchant une des trois courbes en un point quelconque p de manière qu'il ait deux autres points q, q_1 de commun avec cette courbe, si par les points q, q_1 et p_1 on fait passer un second cercle C_2, et par les points p et p_1 un troisième cercle C_3 qui touche le cercle C_2 au point p_1: ce troisième cercle C_3 coupera la courbe tout au plus encore en un point q_3. Or, si l'on décrit un quatrième cercle C_4 passant par les points p et q_3 et touchant le cercle C_1 au point p, ce cercle C_4 sera le cercle osculateur de la courbe au point p.

VII. Soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 six points pris arbitrairement sur une des trois courbes. Si l'on décrit six cercles $p_1 a_1 a_2$, $p_1 a_2 a_3$, $p_1 a_3 a_4$, $p_1 a_4 a_5$, $p_1 a_5 a_6$, $p_1 a_6 a_1$ qui passent par le point p_1 et qui joignent respectivement deux points consécutifs sur la courbe: le second point d'intersection du 1[ier] et du 4[me], celui du 2[me] et du 5[me] et celui du 3[me] et du 6[me] seront situés sur la circonférence d'un cercle qui passe par le point p_1.

VIII. Soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 six points pris arbitrairement sur une des trois courbes. Soient décrit six cercles C_1, C_2, ... C_6 qui passent par le point p_1 et qui touchent la courbe respectivement aux points a_1, a_2, ... a_6, et soient désignés les deuxièmes points d'intersection des cercles consécutifs par b_1, b_2, ... b_6. Si l'on décrit les trois cercles $p_1 b_1 b_4$, $p_1 b_2 b_5$, $p_1 b_3 b_6$ qui passent par le point p_1 et qui joignent respectivement les points b_1 et b_4, b_2 et b_5, b_3 et b_6: ces trois cercles auront un même second point d'intersection.

Le théorème suivant est également un résultat de l'application de notre méthode.

Soient S et Σ deux spirales logarithmiques égales, situées dans un même plan, ayant le même pôle A et faisant leurs révolutions en sens contraire. Désignons une révolution quelconque de la spirale S par r_0, les revolutions *extérieures* qui suivent la révolution r_0 par r_1, r_2, r_3 etc., et les révolutions *intérieures* qui la précèdent par r_{-1}, r_{-2}, r_{-3} etc. Désignons de plus une révolution quelconque de la spirale Σ par ϱ_0, les révolutions *intérieures* qui précèdent la révolution ϱ_0 par ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 etc., et les révolutions *extérieures* qui la suivent par ϱ_{-1}, ϱ_{-2}, ϱ_{-3} etc.

Cela posé, si l'on tire une droite quelconque dans le plan des deux courbes, elle coupera une infinité de révolutions de la spirale S, et chacune d'elles en deux points. Si l'on désigne les deux points d'intersection de cette droite et de chacune de ces révolutions respectivement par a_0, b_0; a_1, b_1; a_{-1}, b_{-1}; a_2, b_2; etc., si l'on joint le pôle A et chacun de ces points d'intersection par des droites qu'on imagine être prolongées indéfiniment au delà de ces points d'intersection; chacune de ces droites coupera chacune des révolutions de la spirale Σ en un seul point. Si l'on désigne le point d'intersection de la droite Aa_m ou Ab_m et de la révolution ϱ_n par $\alpha_{m,n}$ ou $\beta_{m,n}$, on peut former une infinité de séries de points d'intersection, dont chacune est composée d'une infinité de points $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$ de sorte que les indices m, n des points d'une même série ont une

différence constante. Tous les points de chaque série seront situés sur une même circonférence d'un cercle, et tous ces cercles se toucheront au point A.

Réciproquement, si l'on décrit un cercle par le pôle A, il coupera une infinité de révolutions de la spirale S, et chacune d'elles en deux points. Si l'on désigne les deux points d'intersection de ce cercle et de chacune de ces révolutions respectivement par c_0, d_0; c_1, d_1; c_{-1}, d_{-1}; c_2, d_2; etc.; si l'on joint le pôle A et chacun de ces points d'intersection par des droites, qu'on imagine être prolongées indéfiniment au delà de ces points d'intersection: chacune de ces droites coupera chacune des révolutions de la spirale Σ en un seul point. Si l'on désigne le point d'intersection de la droite Ac_m ou Ad_m et de la révolution ϱ_n par $\gamma_{m,n}$ ou $\delta_{m,n}$, on peut former une infinité de séries de points d'intersection, dont chacune est composée d'une infinité de points $\gamma_{m,n}$, $\delta_{m,n}$, de sorte que les indices m, n des points d'une même série ont une différence constante. Tous les points de chaque série seront situés sur une même droite, et toutes ces droites seront parallèles entr'elles.

11.

Auflösung einiger Aufgaben aus der Calendariographie.

(Von Herrn *G. A. Jahn*, Stud. math. aus Leipzig)

Durch eine nähere Betrachtung meiner vor drei Jahren im Druck erschienenen „Fest-Tabelle von 1700 bis 2000," Leipzig, in der Baumgärtnerschen Buchandlung, wurde ich veranlafst, mehrere, den Jul. und Greg. Kalender betreffende Aufgaben zu behandeln, deren Auflösung einer öffentlichen Mittheilung nicht unwerth zu sein scheint.

Bekanntlich ist das von Gaufs angegebene Verfahren, den Ostersonntag (Mten März) eines Jahres N, Greg. Styls, rein arithmetisch zu bestimmen, in folgender Operationen enthalten:

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{rl}
1. & \frac{N}{19} = A + \frac{a}{19}, \\
2. & \frac{N}{4} = B + \frac{b}{4}, \\
3. & \frac{N}{7} = C + \frac{c}{7}, \\
4. & \frac{m+19a}{30} = D + \frac{d}{30}, \\
5. & \frac{n+2b+4c+6d}{7} = E + \frac{e}{7}, \\
6. & M = 22 + d + e,
\end{array}\right.$$

wo m und n die für jedes Jahrhundert bekannten Constanten bedeuten.

Setzen wir uns nun die umgekehrte Aufgabe vor, d. h. suchen wir das Jahr N eines gegebenen Jahrhunderts, in welchem der Ostersonntag auf den Mten März fällt, so wird diese Aufgabe eine unbestimmte. Versuchen wir sie aufzulösen.

1) Folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) nach Elimination von N:

$$B = \frac{19A + a - b}{4} = 5A + x, \text{ also } x = \frac{a - b - A}{4}, \text{ woraus}$$
$$A = a - b - 4x, \text{ folglich}$$
$$B = 5a - 5b - 19x;$$

2) aus den Gleichungen (2.) und (3.) nach Elimination von N:

$$B = \frac{7C + c - b}{4} = 2C + x', \text{ also } x' = \frac{c - b - C}{4}, \text{ woraus}$$
$$C = c - b - 4x', \text{ folglich}$$
$$B = 2c - 2b - 7x';$$

3) aus der Gleichstellung beider gefundenen Werthe von B:

$$x' = \frac{19x - 5a + 3b + 2c}{7} = 3x - a + y, \text{ also } y = \frac{2a + 3b + 2c - 2x}{7}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{2a + 3b + 2c - 7y}{2} = a + b + c - 3y + y', \text{ also } y' = \frac{b - y}{2}, \text{ woraus}$$

$$y = b - 2y', \text{ folglich}$$
$$x = a + c - 2b + 7y',$$
$$x' = 2a + 3c - 5b + 19y';$$

4) nach Substitution der gefundenen Werthe von x, x' in die Gleichungen für A, B, C:

$$A = -3a + 7b - 4c - 28y',$$
$$B = -14a + 33b - 19c - 133y',$$
$$C = -8a + 19b - 11c - 76y';$$

5) nach Substitution dieser Werthe in eine der Gleichungen (1.), (2.), (3.):

$$N = -56a + 133b - 76c - 532y';$$

6) aus der Gleichung (4.):

$$a = \frac{30D + d - m}{19} = 2D + z, \text{ also } z = \frac{d - m - 8D}{19}, \text{ woraus}$$

$$D = \frac{d - m - 19z}{8} = -2z + z', \text{ also } z' = \frac{d - m - 3z}{8}, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{d - m - 8z'}{3} = -3z' + z'', \text{ also } z'' = \frac{d - m + z'}{3}, \text{ woraus}$$

$$z' = 3z'' + m - d, \text{ folglich}$$
$$z = -8z'' - 3m + 3d,$$
$$D = 19z'' + 7m - 7d,$$
$$a = 30z'' + 11m - 11d;$$

7) aus der Gleichung (5.):

$$c = \frac{7E + e - n - 2b - 6d}{4} = 2E - d + u, \text{ also } u = \frac{e - n - 2b - 2d - E}{4}, \text{ woraus}$$

$$E = e - n - 2b - 2d - 4u, \text{ folglich}$$
$$c = 2e - 2n - 4b - 5d - 7u;$$

8) aus der Gleichung (6.):

$$d = M - 22 - e.$$

Durch die vier gefundenen Gleichungen

$$\text{II.} \begin{cases} 1. & d = M - 22 - e, \\ 2. & a = 11m - 11d + 30z'', \\ 3. & c = -2n - 4b + 2e - 5d - 7u, \\ 4. & N = 133b - 56a - 76c - 532y' \end{cases}$$

sind nun die anfänglichen Gleichungen (I.) so weit reducirt, als es i

lich ist, und dienen, sobald in ihnen b und e willkürlich genommen werden, zur Bestimmung von N.

Folgende Betrachtungen jedoch werden uns noch auf einige Abkürzungen dieser Auflösung leiten.

Setzen wir b constant, und bilden aus den vorstehenden Gleichungen die Differenzengleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Delta d &= -\Delta e,\\ \Delta a &= -11\Delta d + 30\Delta z'',\\ \Delta c &= +2\Delta e - 5\Delta d - 7\Delta u,\\ \Delta N &= -56\Delta a - 76\Delta c - 532\Delta y';\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}\Delta d &= -\Delta e,\\ \Delta a &= +11\Delta e + 30\Delta z'',\\ \Delta c &= +7(\Delta e - \Delta u),\\ \Delta N &= -1148\Delta e - 1680\Delta z'' + 532\Delta u - 532\Delta y'.\end{aligned}$$

Da nun c nach der Gleichung (3.) in (I.) kleiner als 7 ist, so muſs, da die Incremente Δe, Δd, $\Delta z''$, u. s. w. immer nur ganze Zahlen sein dürfen, $\Delta u = \Delta e$, mithin $\Delta c = 0$, also für ein constantes b auch c constant sein. Folglich ist dann:

$$\begin{aligned}\Delta a &= +11\Delta e + 30\Delta z'',\\ \Delta N &= -616\Delta e - 1680\Delta z'' - 532\Delta y'.\end{aligned}$$

Wenn wir daher Δe der Reihe nach die Werthe 0, 1, ... 6 geben, so ergiebt sich folgende tabellarische Übersicht der zusammengehörenden Werthe von Δe, $\Delta z''$, Δa und ΔN:

Δe	$\Delta z''$	Δa	ΔN
0	0	0	$-\quad 0 - 532\Delta y'$
1	0	11	$-\ 616 - 532\Delta y'$
2	0	22	$-1232 - 532\Delta y'$
3	-1	3	$-\ 168 - 532\Delta y'$
4	-1	14	$-\ 784 - 532\Delta y'$
5	-1	25	$-1400 - 532\Delta y'$
6	-2	6	$-\ 336 - 532\Delta y'$

Setzen wir also $e = 0$, und Δe nach und nach $= 0, 1, \ldots 6$, nennen die ihnen zugehörenden Jahre N, N', N'' u. s. w., und bemerken, daſs für $\Delta e = 0$, auch $\Delta N = 0$, mithin auch $\Delta y' = 0$ sein muſs, so haben wir:

$$\begin{aligned}N &= N & N^{IV} &= N - 784\\ N' &= N - 616 & N^{V} &= N - 1400\\ N'' &= N - 1232 & N^{VI} &= N - 336.\\ N''' &= N - 168. & &\end{aligned}$$

Übrigens werden wir auf ähnliche Art leicht finden, dafs, wenn für b das erste Jahr $= N$ ist, dann für $b + \triangle b$ das erste Jahr $= N - 95 \triangle b$ sein mufs. Aus diesen Betrachtungen nun geht fast von selbst folgende allgemeine, und für die numerische Rechnung bequeme Auflösung der Aufgabe hervor.

Nachdem das Jahrhundert und der Ostersonntag gegeben ist, bestimme man die Gröfsen a, c aus den Gleichungen

$$a = 242 + 11m - 11M + 30z'',$$
$$c = 110 - 2n - 5M - 7u,$$

wo z'' und u so zu nehmen sind, dafs a und c respective kleiner als 19 und 7 bleiben, so hat man folgende 28 Jahre:

$N = -4(14a + 19c) - 532y'$

$N_1 = N - 616$	$N_{10} = N_9 + 1064$	$N_{19} = N_{18} - 616$
$N_2 = N_1 - 616$	$N_{11} = N_{10} - 616$	$N_{20} = N_{19} + 1064$
$N_3 = N_2 + 1064$	$N_{12} = N_{11} - 616$	$N_{21} = N_{20} + 241$
$N_4 = N_3 - 616$	$N_{13} = N_{12} + 1064$	$N_{22} = N_{21} - 616$
$N_5 = N_4 - 616$	$N_{14} = N_{13} + 241$	$N_{23} = N_{22} - 616$
$N_6 = N_5 + 1064$	$N_{15} = N_{14} - 616$	$N_{24} = N_{23} + 1064$
$N_7 = N_6 + 241$	$N_{16} = N_{15} - 616$	$N_{25} = N_{24} - 616$
$N_8 = N_7 - 616$	$N_{17} = N_{16} + 1064$	$N_{26} = N_{25} - 616$
$N_9 = N_8 - 616$	$N_{18} = N_{17} - 616$	$N_{27} = N_{26} + 1064;$

von welchen höchstens 4 reell sein werden, d. h. in denen y' so gewählt werden kann, dafs dadurch die Jahre in das gegebene Jahrhundert fallen. Ein Beispiel wird dieses noch mehr erläutern.

Man sucht alle Jahre des 19ten Jahrhunderts, in denen der Ostersonntag auf den 31. März fällt.

Hier ist also $M = 31$, $m = 23$, $n = 4$, und folglich

$$a = +154 + 30z'',$$
$$c = -53 - 7u;$$

$z = -5$, giebt $a = 4$; $u = -8$, giebt $c = 3$; und daher die Jahre

$-452 - 532y'$	$-547 - 532y'$	$-642 - 532y'$	$-737 - 532y'$
$-1068 - 532y'$	$-1163 - 532y'$	$-1258 - 532y'$	$-1353 - 532y'$*
$-1684 - 532y'$	$-1779 - 532y'$	$-1874 - 532y'$*	$-1969 - 532y'$
$-620 - 532y'$	$-715 - 532y'$	$-810 - 532y'$	$-905 - 532y'$
$-1236 - 532y'$	$-1331 - 532y'$*	$-1426 - 532y'$	$-1521 - 532y'$
$-1852 - 532y'$	$-1947 - 532y'$	$-2042 - 532y'$	$-2137 - 532y'$
$-788 - 532y'$*	$-883 - 532y'$	$-978 - 532y'$	$-1073 - 532y'$

von denen nur die mit Sternchen bezeichneten möglich sind; nemlich 1872, 1861, 1850, 1839.

Für den Julianischen Kalender, wo für alle Jahrhunderte $m = 15$, $n = 6$ ist, wird die Auflösung noch viel einfacher. Man bestimme nemlich die Größen a, c aus den Gleichungen:

$$a = 307 - 11M + 30z'',$$
$$c = 98 - 5M - 7u,$$

so hat man

$$N = -4(14a + 19c) - 532y',$$
$$N_1 = -4(14a + 19c) - 95 - 532y',$$
$$N_2 = -4(14a + 19c) - 190 - 532y',$$
$$N_3 = -4(14a + 19c) - 285 - 532y',$$

wo y' alle Werthe annehmen kann. Folglich erhält man 4 Reihen von Jahren, welche Ostern den Mten März haben. Übrigens ersieht man hieraus, daß die Julianischen Ostersonntage nach 532 Jahren in derselben Ordnung wieder kehren. Ein Beispiel scheint überflüssig zu sein.

Um zu bestimmen, in welchen Jahren eines gegebenen Jahrhunderts der Februar 5 Sonntage hat, setze man in den Gleichungen (II.)

$$M = 28 + 7.\Delta M$$
$$e = 0$$
$$b = 0,$$

so erhält man, nachdem d eliminirt worden ist:

$$a = -66 + 11m - 77\Delta M + 30z'',$$
$$c = -30 - 2n - 35\Delta M - 7u \quad \text{und}$$

$$N = -56a - 76c - 532y' \qquad N_4 = N_3 - 616$$
$$N_1 = N - 616 \qquad N_5 = N_4 - 616$$
$$N_2 = N_1 - 616 \qquad N_6 = N_5 + 1064,$$
$$N_3 = N_2 + 1064$$

wo ΔM nach und nach $= 0, 1, 2, 3$ gesetzt wird.

Beispiel. Für das 19te Jahrhundert hat man:

$$m = 23, \quad n = 4; \quad \text{daher für } \Delta M = 0:$$
$$a = 187 + 30z''$$
$$c = -38 - 7u;$$

$z'' = -6$ giebt $a = 7$; $u = -6$ giebt $c = 4$, und daher die Jahre

$$-696 - 532y'$$
$$-1312 - 532y'\,*, \quad y' = -6 \text{ giebt } 1880,$$

$-1928-532y'$
$-864-532y'$
$-1480-532y'$
$-2096-532y'$
$-1032-532y'$;

für $\triangle M=1$ folgt $a= \quad 110+30z''$
$c=-73-7u$;

$z=-3$ giebt $a=+20$; $u=-11$ giebt $c=4$, und daher die Jahre, wegen $a=20$, unmöglich:

für $\triangle M=2$ ist $a= \quad 33+30z''$
$c=-108-7u$,

$z''=-1$ giebt $a=3$; $u=-16$ giebt $c=4$, und daher die Jahre:

$-472-532y'$
$-1088-532y'$
$-1704-532y'$
$-640-532y'$
$-1256-532y'$
$-1872-532y'$*, $y'=-7$ giebt 1852,
$-808-532y'$;

für $\triangle M=3$ ist $a=-44+30z''$
$c=-143-7u$,

$z''=+2$ giebt $a=16$; $u=-21$ giebt $c=4$, und daher die Jahre:

$-1200-532y'$
$-1816-532y'$
$-2432-532y'$*, $y'=-8$ giebt 1824,
$-1368-532y'$
$-1984-532y'$
$-2600-532y'$
$-1536-532y'$;

für $\triangle M=4$ ist $a=-121+30z''$
$c=-178-7u$,

$z''=+5$ giebt $a=29$; $u=-26$ giebt $c=4$, und daher die Jahre, wegen $a=29$, unmöglich.

Um alle Julianischen Schaltjahre mit einem gegebenen Ostersonntage und bekannter goldnen Zahl zu bestimmen, setze man in den Gleichungen (II.)

$b=0$
$a=$ goldene Zahl -1,

und es kommt

$$\text{III.}\begin{cases}1.\quad d = M - 22 - e,\\ 2.\quad a = 30z'' + 165 - 11d,\\ 3.\quad c = 2e - 12 - 5d - 7u,\\ 4.\quad N = -56a - 76c - 532y'.\end{cases}$$

Aus der Gleichung (II.) folgt:

$$d = \frac{30z''+165-a}{11} = 3z''+15+\alpha, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{3z''+a}{11}, \quad \text{woraus}$$

$$z'' = -\frac{a+11\alpha}{3} = -4\alpha+\alpha', \quad \text{also} \quad \alpha' = \frac{\alpha-a}{3}, \quad \text{woraus}$$

$$\alpha = 3\alpha' + a, \quad \text{folglich}$$

$$z'' = -11\alpha' - 4a,$$

$$d = -30\alpha' - 11a + 15;$$

ferner aus der Gleichung (I.)

$$e = M - 22 - d.$$

Die beiden gefundenen Gleichungen

$$d = -30\alpha' - 11a + 15$$

$$e = M - 22 - d,$$

verbunden mit den 2 letzten in (III.) sind die zur numerischen Auflösung erforderlichen Ausdrücke.

Beispiel. Man sucht die Julianischen Schaltjahre mit der goldenen Zahl 14, in welchen der Ostersonntag auf den 19. April fällt?

Hier ist $M = 50$, $a = 13$; folglich

$$d = -30\alpha' - 128,$$

$$e = 28 - d,$$

$$c = 2e - 12 - 5d - 7u,$$

$$N = -56a - 76c - 532y';$$

$\alpha' = -5$ giebt $d = 22$, folglich $e = 6$, daher

$$c = -110 - 7u;$$

$u = -16$ giebt $c = 2$, folglich $N = -880 - 532y'$. Der kleinste Werth von $y' = -2$ giebt 184.

Man hat daher die Jahre

184
716
1248
1780
2312
2844 u. s. w.

Leipzig, im März 1830.

12.

De resolutione algebraica aequationis $X^{257}=1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata.

(Cont. Diss. Vol. IX. Fasc. I.)

(Auct. *Richelot*, Doct. phil. Regiom.)

Pars altera.

VII.

Quamquam in iis, quae modo exposita sunt, problemati proposito satisfactum esse videtur, tamen formula una desideratur, qua singula quaeque periodus (2, 1) (2, 2) etc. sive $2\cos\frac{2\pi}{257}$, $2\cos\frac{4\pi}{257}$ etc. protinus exprimantur. Substituentes quidem valores ex aliis aequationibus quadraticis desumtos in aliis sequentibus, sensim struere liceret formulam quantitatis $(2, 1) = 2\cos\frac{2\pi}{257}$; illud vero negotium quantopere complicatum sit nemo est, quem fugit.

Prorsus vero alia totum problema solvendi via, nec non formulam desideratam struendi patet. Periodos enim quatuor formae (64,), octo formae (32,), sedecim formae (16,) etc. ex aequatione respective quarti, octavi, sedecimi ordinis, nec non denique centum viginti octo periodos formae (2,) ex aequatione centesimi vigesimi octavi ordinis protinus eliciendi problema propositum sit. Quae aequationes per methodum celeberrimam solvi possunt, qua ostenditur, quomodo radices aequationis $X^{nm+1}=1$, ubi $nm+1$ numerus primus est, per aequationes auxiliares ordinis μ, quarum radices formulis trigonometricas functiones angulorum formae $\left(\frac{2x\pi}{\mu}\right)$ continentibus exprimantur, sine ulla ambiguitate determinare liceat.

In exemplo proposito, quia $\mu m+1=257$ est, μ aut $=2$, aut $=4$, aut $=8$, aut $=16$, aut $=32$, aut $=64$, aut $=128$ ponitur, ita ut ex theoremate modo praemisso sequitur, periodos formae:

(128,) (64,) (32,) (16,) (8,) (4,) (2,)

formulis determinari posse, quas trigonometricae functiones angulorum respective

$$\frac{2\varkappa\pi}{2}\quad \frac{2\varkappa\pi}{4}\quad \frac{2\varkappa\pi}{8}\quad \frac{2\varkappa\pi}{16}\quad \frac{2\varkappa\pi}{32}\quad \frac{2\varkappa\pi}{64}\quad \frac{2\varkappa\pi}{128}$$

componunt.

Ita hic semper in bisectione anguli saepius repetita, tota solutio nititur.

Quamvis vero clarum sit, ultimam suppositionem $\mu = 128$ brevissimam totius quaestionis solvendae viam munituram esse, quippe quia in ceteris suppositionibus non radices ipsae eliciuntur, sed earum aggregata maiora, inde ex quibus ad periodos (2,) eruendas novus calculus adhibeatur necesse est, in illa vero periodi (2,) ipsae excutuntur, quae radices ipsas facilius praebent; attamen antequam ad illam solutionem generalem aggrediar, octo periodos triginta duorum terminorum formulis concinnis determinare velim.

VIII.

Sit r radix ulla adhuc indeterminata aequationis:

$$X^{256} + X^{255} + \text{etc.} \;\; + X + 1 = 0, \qquad r = \cos\frac{2\varkappa\pi}{257} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{257},$$

atque ponamus, numero 3 rursus tanquam radice primitiva numeri 257 supposito:

$$p_0 = r + r^{3^8} + r^{3^{16}} + \text{etc.} \;\; + r^{3^{248}},$$

nec non $p_1, p_2, \dots p_7$ functiones tales quantitatis r sint, quae ex p_0, loco ipsius r ibi posito respective:

$$r^3,\;\; r^{3^2},\;\; \dots\dots\;\; r^{3^7}$$

oriuntur. Jam clarum est, si introducatur ex priori parte notatio haec: $r = (1)$, $r^2 = (2)$ etc., fore:

$$p_0 = (32,1),\quad p_1 = (32,3),\quad p_2 = (32,3^2) \text{ etc.},\quad p_7 = (32,3^7).$$

Hanc ob rem ex eodem notissimo theoremate, quo in artic. IV. ad productum (32,1) (32,81) determinandum usi sumus, secunda tabula adhibita, valores productorum $p_0 p_4$, $p_0 p_3$, $p_0 p_2$, $p_0 p_1$, p^2 tanquam lineares functiones quantitatum $p_0, p_1, p_2, \dots p_7$ derivantur; habemus igitur:

$$1. \ldots \begin{cases} p_0 \cdot p_4 = 2p_0 + 5p_1 + 4p_2 + 5p_3 + 2p_4 + 5p_5 + 4p_6 + 5p_7, \\ p_0 \cdot p_3 = 0p_0 + 3p_1 + 3p_2 + 6p_3 + 5p_4 + 5p_5 + 5p_6 + 5p_7, \\ p_0 \cdot p_2 = 6p_0 + 5p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 4p_6 + 3p_7, \\ p_0 \cdot p_1 = 4p_0 + 2p_1 + 5p_2 + 3p_3 + 5p_4 + 5p_5 + 3p_6 + 5p_7, \\ p_0 \cdot p_0 = 32 + 9p_0 + 4p_1 + 6p_2 + 0p_3 + 2p_4 + 6p_5 + 2p_6 + 2p_7. \end{cases}$$

De quibus valoribus nonnulla placet animadvertere.

I. In quatuor prioribus expressionibus summa coëfficientium quantitatum p est $= \frac{257-1}{8} = 32$, in ultima vero $\frac{257-1}{8} - 1 = 31$. Quod ex natura productorum facillime generaliter demonstrari potest. Jam enim productum $p_0 p_4$ exempli causa, quippe quod $= (32,1)(32,3^4)$ est, nec plus nec minus quam triginta duos terminos formae $(32,)$ continere posse, in art. IV. expositum est; quas periodos $(32,)$ rursus per quantitates p expressas, numerum 32 assequi clarum est. In ultimo vero producto, una triginta duarum periodorum ortarum erit $(32,0)$ sive $= 32$, quia $p_0 p_0 = (32,1)(32,1)$ atque hoc erit:

$$= (32,3^0+1) + (32,3^8+1) + (32,3^{16}+1) + \text{etc.} \quad + (32,3^{248}+1).$$

Jam vero notum est, nullam aliam potestatem ipsius 3, nisi 128tam esse $\equiv -1\,(257)$, unde sequitur in serie illa nonnisi terminum $(32,3^{128}+1)$ fore $= (32,0) = 32$. Restant igitur adhuc 31 termini formae $(32,)$ sive 31 quantitates p; q. e. d.

Hanc demonstrationem prorsus generalem esse, simulac loco ipsius 257 ponatur numerus primus $8m+1$, nemo est quem fugit.

II. In expressione prima, coëfficientes quantitatum p_0 et p_4 iidem sunt, nec non ipsarum p_1 et p_5 etc., id quod iam in art. IV. (per theorem. disq. arithm. 350) demonstratum est.

III. Ex quinque his expressionibus, indices promovendo, novas veras effici, e natura quantitatum p elucet; ita ut habeamus omnia producta: $p_1.p_5$, $p_2.p_6$, $p_3.p_7$, $p_1.p_4$, $p_2.p_5$ etc., $p_1.p_3$, $p_2.p_4$ etc., $p_1.p_2$, $p_2.p_3$ etc., $p_1^2.p_2^2$ etc. per lineares functiones quantitatum p expressa, quorum tria priora eandem legem inter coëfficientes sequuntur, quam formula ipsius $p_0.p_4$.

IV. Adhibita denique aequatione nota hac:

$$2. \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = -1$$

per (-32) multiplicata, ex formula ultima pro $p_0 p_0$ hanc assequimur:

$$3. \quad p_0 p_0 = -23 p_0 - 28 p_1 - 26 p_2 - 32 p_3 - 30 p_4 - 26 p_5 - 30 p_6 - 30 p_7,$$

unde novae formulae pro $p_1 p_1$, $p_2 p_2$ etc. per solas quantitates p expressae derivantur.

Inde ex formulis (1.) et (2.) una cum iis quae indices promovendo sequuntur, earum functionum invariabilium ex octo quantitatibus p compositarum valores numerici enumerari possunt, quae aequationis octi ordinis, quantitates p tanquam radices continentis, coëfficientes sunt. Cuius aequationis igitur terminus secundus $= A_1$ erit:

$$A_1 = -(p_0 + p_1 + p_2 + \text{etc.} + p_7) = +1,$$

terminus vero tertius $=A_2$ summa binarum quantitatum p inter se multiplicatarum, quippe quam, notatione nota adhibita $\Sigma(p^m)=p_0^m+p_1^m+\text{etc.}+p_7^m$, esse constat

$$A_2=-\frac{\Sigma pp+A_1\Sigma p}{2}=-\frac{225-1}{2}=-112.$$

Terminus tertius $=A_3$ eiusdem aequationis erit:

$$A_3=-\frac{\Sigma p^3+A_1\Sigma p^2+A_2\Sigma p}{3},$$

quantitatem vero p_0^3, ex 3) per multiplicationem ipsius p_0p_0 per p_0, formularum 1) ope invenimus:

$$p_0p_0p_0=-75p_0-158p_1-150p_2-198p_3-174p_4-162p_5-186p_6-186p_7,$$

unde fluit

$$\Sigma p^3=75+158+150+198+174+162+186+186=1289,$$

nec non:

$$A_3=-542.$$

Prorsus simili ratione sequentes numerantur coëfficientes, quos coëfficientes respective coëfficientibus binomii evoluti $\left(Y-\frac{256}{8}\right)^8$ secundum modulum 257 congruos esse notum est; id quod calculo apud tres numeratos comprobatur.

His praemissis, R esse radicem aequationis $X^8=1$, cuius octava demum potestas $=1$ fiat, ponamus; sit igitur $R=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; iam omnes ceterae radices erunt:

$$4.\quad\begin{cases}R=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\\ R^2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\\ R^3=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\\ R^4=\cos\pi+i\sin\pi=-1,\\ R^5=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4},\\ R^6=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i,\\ R^7=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4},\\ R^8=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=+1.\end{cases}$$

Tum ponamus:

$$f_1=p_0+p_1R+p_2R^2+p_3R^3+p_4R^4+p_5R^5+p_6R^6+p_7R^7,$$

nec non f_2, f_3, f_4 etc. eas quantitatis R functiones significent, quae ex f_1, loco ipsius R positis respective:

$$R^2,\; R^3,\; R^4 \text{ etc.}$$

Quarum functionum valores numerici inveniantur, ut ipsas quantitates p determinemus, necesse erit.

Jam vero clarum est, ex indole ipsius f_1, esse: $f_8 = -1$, nec non $f_{8+m} = f_m$, quippe quia $R^8 = R^{2.8} = R^{3.8}$ etc. $= 1$ est.

Ceterarum vero septem functionum f_1, f_2 etc. f_7 valores haud sine calculo sequenti determinari possunt.

Ponamus nimirum e theoria huc pertinente notum esse, id quod facillime demonstratur, productum $f_m f_n$ semper formam $(FR) f_{m+n}$ induere, ubi FR quantitatem ex potestatibus ipsius R compositam significat, quae coëfficiens est quantitatis p_0 in evolutione lineari producti $f_m . f_n$.

Jam vero ad finem nostrum tria genera functionum FR introducamus. Primum sit igitur:

$$f_1 f_1 = (F^{\text{I}} R) . f_2$$

tum:

$$5. \quad f_1 f_{(4-1)} = f_1 f_3 = (F^{\text{II}} R) f_4$$

denique vero:

$$f_1 f_{(8-1)} = f_1 f_7 = (F^{\text{III}} R) f_8 = -F^{\text{III}} R,$$

unde eo ut loco ipsius R ubique respective R^2, R^3 etc. substituamus, novae aequationes, novaeque functiones FR subordinatae efficiuntur.

Aggrediamur ad determinandas quantitates (5.). Habemus:

$$f_1 = p_0 + p_1 R + p_2 R^2 + p_3 R^3 + p_4 R^4 + p_5 R^5 + p_6 R^6 + p_7 R^7,$$
$$f_1 = p_0 + p_1 R + p_2 R^2 + p_3 R^3 + p_4 R^4 + p_5 R^5 + p_6 R^6 + p_7 R^7.$$

Si vero in functione f_1 indices quantitatum p per 1, 2, 3 augeantur, ex f_1 oriri respective clarum est:

$$R^7 f_1,\quad R^6 f_1,\quad R^5 f_1,$$

hanc ob rem ex producto $f_1 f_1$ oriri respective:

$$R^6 f_1 f_1,\quad R^4 f_1 f_1,\quad R^2 f_1 f_1$$

sive coëfficientem ipsius R^2 in $f_1 f_1$, ex coëfficiente ipsius R^0 augendo indices per 1, oriri intelligitur, ipsius vero R^4 eodem modo ex coëfficiente ipsius R^2 etc., unde sequitur, productum $f_1 f_1$ hanc induere formam:

$$f_1 f_1 = a_0 + a_1 R^2 + a_2 R^4 + a_3 R^6 + b_0 R + b_1 R^3 + b_2 R^5 + b_3 R^7,$$

ubi

$$a_0 = \;\; p_0 p_0 + \;\; p_4 p_4 + 2 p_7 p_1 + 2 p_2 p_6 + 2 p_3 p_5,$$
$$b_0 = 2 p_0 p_1 + 2 p_2 p_7 + 2 p_3 p_6 + 2 p_4 p_5$$

ponamus necesse est, ceterosque coëfficientes indices augendo in ordinem $a_1 b_1$ $a_2 b_2$ $a_3 b_3$ derivare licet.

Facile animadvertitur aggregatum a_0 haud mutari, si omnes indices per numerum 4 augeantur, unde ex theoremate noto sequitur etiam in lineari forma ipsius a_0 coëfficientes quantitatum p_0 et p_4 eosdem esse debere, non minus quam quantitatum p_1 et p_5, p_2 et p_6, p_3 et p_7. Idem apud aggregatum b_0 valet theorema. Id quod calculo comprobatur. Aequationibus enim (1.) nec non iis quae inde sequuntur, adhibitis nanciscimur:

$$a_0 = -25p_0-32p_1-40p_2-32p_3-25p_4-32p_5-40p_6-32p_7,$$
$$b_0 = \quad 34p_0+30p_1+38p_2+26p_3+34p_4+30p_5+38p_6+26p_7.$$

Hinc deducitur facillime:

6. $F^{I}R = -25+34R-32R^2+26R^3-40R^4+38R^5-32R^6+30R^7$,

unde derivantur $F^{I}(R^2)$, $F^{I}(R^3)$ etc.

Iam vero ad secundam speciem transeamus ($F^{II}R$). Habemus:

$$f_1 = p_0+p_1R+p_2R^2+p_3R^3+p_4R^4+p_5R^5+p_6R^6+p_7R^7 \text{ et}$$
$$f_3 = p_0+p_1R^3+p_2R^6+p_3R+p_4R^4+p_5R^7+p_6R^2+p_7R^5.$$

Quia $f_1 f_3$ valorem haud commutat loco ipsius R posito R^3, nec non in $f_1 f_3$ omnibus indicibus quantitatum p per 1 auctis, oritur $R^4 f_1 f_3$, concludere licet, in quantitate $f_1 f_3$ coëfficientes ipsorum R^2 et R^6 inter se esse aequales, non minus quam ipsorum R et R^3 atque R^5 et R^7, tum vero etiam coëfficientes ipsorum R^4, R^6, R^5 et R^7 indices augendo oriri respective ex ipsorum R^0, R^2, R^1, R^3 coëfficientibus. Id quod calculo comprobatur. Ponere enim licet:

$$f_1 f_3 = a_0+b_0R^2+a_1R^4+b_0R^6+c_0R+c_0R^3+c_1R^5+c_1R^7,$$

ubi:

$$a_0 = p_0p_0+p_2p_2+p_4p_4+p_6p_6+2p_1p_5+2p_3p_7,$$
$$b_0 = p_0p_2+p_1p_3+p_2p_4+p_3p_5+p_4p_6+p_5p_7+p_6p_0+p_7p_1,$$
$$c_0 = p_0p_1+p_2p_3+p_4p_5+p_6p_7+p_0p_3+p_2p_5+p_5p_7+p_6p_1.$$

Qui coëfficientes formularum (1.) et (3.) ope ad lineares formas has reducuntur:

$$a_0 = -89(p_0+p_2+p_4+p_6)-104(p_1+p_3+p_5+p_7),$$
$$b_0 = \quad 32(p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7),$$
$$c_0 = \quad 30(p_0+p_2+p_4+p_6)+\ 34(p_1+p_3+p_5+p_7).$$

Unde derivatur:

7. $F^{II}(R) = -89+30R+32R^2+30R^3-104R^4+34R^5+32R^6+34R^7$,

quae formula etiam quantitates $F^{II}R^2$, $F^{II}R^3$ etc. suppeditat. Tertium

genus functionum FR est adhuc determinandum. Contendo vero esse:

$$8. \quad f_1 f_7 = 257,$$

quod ita facillime demonstratur. Habemus

$$f_1 = p_0 + p_1 R + p_2 R^2 + p_3 R^3 + p_4 R^4 + p_5 R^5 + p_6 R^6 + p_7 R^7,$$
$$f_7 = p_0 + p_1 R^7 + p_2 R^6 + p_3 R^5 + p_4 R^4 + p_5 R^3 + p_6 R^2 + p_7 R^1,$$

unde sequitur, signis:

$$\Sigma p_0 p_0 = p_0 p_0 + p_1 p_1 + p_2 p_2 \text{ etc. } + p_7 p_7,$$
$$\Sigma p_0 p_1 = p_0 p_1 + p\; p_2 + p_2 p_3 \text{ etc. } + p_7 p_0,$$
etc.

introductis:

$$f_1 f_7 = \Sigma p_0 p_0 + R\, \Sigma p_0 p_1 + R^2 \Sigma p_0 p_2 + R^3 \Sigma p_0 p_3 + R^4 \Sigma p_0 p_4$$
$$+ R^7 \Sigma p_0 p_1 + R^6 \Sigma p_0 p_2 + R^5 \Sigma p_0 p_3 + R^4 \Sigma p_0 p_4.$$

Quia f_7, indices per 1 augendo, fit $= R f_7$ nec non f_1 per eandem commutationem $= R^7 f_1$, clarum est $f_1 f_7$ fieri, si indices per 1 augeantur, $= f_1 f_7$; unde sequitur, quod iam formula docet, coëfficientes omnes potestatum ipsius R in $f_1 f_7$ haud, si indices omnes augeantur, mutari. Eodem modo, quia $f_1 f_7$ valorem suum pro R^1, R^7 sive R^2, R^6 etc. substituto haud commutat, coëfficientes, sicut in formula apparet, ipsorum R et R^7 eosdem esse, nec non ipsorum R^2 et R^6 etc. intelligi potest. Iam ponamus:

$$p_0 p_1 = \alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3 + \varepsilon p_4 + \zeta p_5 + \eta p_6 + \vartheta p_7,$$

tum erit

$$-\Sigma p_0 p_1 = +(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta)$$

quippe quam summam coëfficientium esse $= 32$ in animadversione prima artic. huius ostenditur. Similiter sequitur esse:

$$\Sigma p_0 p_1 = -32 = \Sigma p_0 p_2 = \Sigma p_0 p_3 = \Sigma p_0 p_4,$$
$$\Sigma p_0 p_0 = 8.32 - 31,$$

quibus collectis fit:

$$f_1 f_7 = 8.32 - 31 - 32(R + R^2 + R^3 + R^4 + R^5 + R^6 + R^7),$$

sive cum

$$R^1 + R^2 + R^3 + R^4 + R^5 + R^6 + R^7 = -1$$

sit:

$$f_1 f_7 = 257; \text{ q. e. d.}$$

Hinc sequitur, $F^{III}(R)$ semper esse $= -257$. Unde derivare licet $F^{III} R^2$, $F^{III} R^3$ etc. esse $= 257$, una quantitate $F^{III} R^8$ excepta, ubi suppositio $R + R^2 +$ etc. $+ R^7 = -1$ falsa est; ibi enim fit $R^1 + R^2$ etc. $+ R^7 = 7$, simulac R^8 loco ipsius R substituatur, hanc ob rem $F^{III} R^8 = -1$. Inde ex prima aequationum (5.) sequuntur hae:

$$9.\quad \begin{cases} f_1.f = (F^{\text{I}}R)f_2, \\ f_2.f_2 = (F^{\text{I}}R^2)f_4, \\ f_3.f_3 = (F^{\text{I}}R^3)f_6, \\ f_4.f_4 = (F^{\text{I}}R^4)f_8 = -(F^{\text{I}}R^4), \\ f_5.f_5 = (F^{\text{I}}R^5)f_2, \\ f_6.f_6 = (F^{\text{I}}R^6)f_4, \\ f_7.f_7 = (F^{\text{I}}R^7)f_6, \\ f_8.f_8 = (F^{\text{I}}R^8)f_8 = -(F^{\text{I}}R^8), \end{cases}$$

ex quarum ultima sequitur:

$$F^{\text{I}}R^8 = f_8 = -1.$$

Ex secunda aequationum (5.) sequuntur hae:

$$10.\quad \begin{cases} f_1.f_3 = (F^{\text{II}}R).f_4, \\ f_2.f_6 = (F^{\text{II}}R^2).f_8 = -(F^{\text{II}}R^2), \\ f_3.f_1 = (F^{\text{II}}R^3).f_4, \\ f_4.f_4 = (F^{\text{II}}R^4).f_8 = -(F^{\text{II}}R^4), \\ f_5.f_7 = (F^{\text{II}}R^5).f_4, \\ f_6.f_2 = (F^{\text{II}}R^6).f_8 = -(F^{\text{II}}R^6), \\ f_7.f_5 = (F^{\text{II}}R^7).f_4, \\ f_8.f_8 = (F^{\text{II}}R^8).f_8 = -(F^{\text{II}}R^8), \end{cases}$$

unde derivatur esse:

$$F^{\text{II}}(R) = F^{\text{II}}(R^3),\quad F^{\text{II}}(R^5) = F^{\text{II}}(R^7),$$
$$F^{\text{II}}(R^2) = F^{\text{II}}(R^6),\quad F^{\text{II}}(R^8) = -1.$$

Ex aequatione (8.) denique sequuntur hae:

$$11.\quad \begin{cases} f_1.f_7 = 257, \\ f_2.f_6 = 257, \\ f_3.f_5 = 257, \\ f_4.f_4 = 257. \end{cases}$$

Aequationibus (11.) cum (9.) et (10.) collatis nanciscimur:

$$12.\quad \begin{cases} f_1f_1.f_7f_7 = (F^{\text{I}}R).(F^{\text{I}}R^7).f_2.f_6 \text{ sive } (F^{\text{I}}R).(F^{\text{I}}R^7) = 257, \\ f_2f_2.f_6f_6 = (F^{\text{I}}R^2).(F^{\text{I}}R^6).f_4.f_4 \text{ sive } (F^{\text{I}}R^2).(F^{\text{I}}R^6) = 257, \\ f_3f_3.f_5f_5 = (F^{\text{I}}R^3).(F^{\text{I}}R^5).f_6.f_2 \text{ sive } (F^{\text{I}}R^3).(F^{\text{I}}R^5) = 257, \\ F^{\text{I}}R^4 = -257, \end{cases}$$

$$13.\quad \begin{cases} f_1f_3.f_7f_5 = (F^{\text{II}}R).(F^{\text{II}}R^7).f_4f_4 \text{ sive } (F^{\text{II}}R).(F^{\text{II}}R^7) = 257, \\ F^{\text{II}}R^2 = -257,\quad F^{\text{II}}R^6 = -257,\quad F^{\text{II}}R^4 = -257, \\ f_1f_3.f_5f_7 = (F^{\text{II}}R^3).(F^{\text{II}}R^5).f_4f_4 \text{ sive } (F^{\text{II}}R^3).(F^{\text{II}}R^5) = 257, \end{cases}$$

Tum denique erit:

$$14.\quad \begin{cases} \dfrac{f_1 f_1 \cdot f_3 f_3}{f_2 f_6} = (F^{I} R).(F^{I} R^3) = (F^{II} R).(F^{II} R^3), \\ \text{sive:} \qquad (F^{I} R).(F^{I} R^3) = (F^{II} R)^2, \\ \text{nec non:} \qquad (F^{I} R^5).(F^{I} R^7) = (F^{II} R^5)^2. \end{cases}$$

Adiiciamus adhuc theorema memorabile de functionibus FR^x hoc:

Si functio FR^x talis est, quacum (FR^{8-x}) multiplicato, numerus 257 oritur, omnesque potestates ipsius R ad R, R^2, R^3, R^4 aequationum $R^0 + R^4 = 0$, $R^1 + R^5 = 0$, $R^2 + R^6 = 0$, $R^3 + R^7 = 0$ ope reducuntur, summa quadratorum coëfficientium quantitatum R^1, R^2, R^3, R^4 in functione FR^x erit $= 257$.

Demonstratio. Ponamus, si a_1, a_2, a_3, a_4 numeri integri sint,

$$FR^x = a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4,$$

tum erit:

$$FR^{8-x} = a_1 R^{-1} + a_2 R^{-2} + a_3 R^{-3} + a_4 R^{-4},$$

unde colligitur, cum $(FR^x).(FR^{8-x}) = 257$ sit:

$$257 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + A_1(R^1 + R^{-1}) + A_2(R^2 + R^{-2}) + A_3(R^3 + R^{-3}).$$

Quantitates $(R^1 + R^{-1})$ et $(R^3 + R^{-3})$ irrationales sunt, nec non $R^2 + R^{-2} = 0$, unde sequitur esse

$$15.\quad 257 = a_1 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Corollarium. Ex eadem causa est:

$$0 = 2(A_1 - A_3)\cos\frac{\pi}{4} \quad \text{sive} \quad A_1 = A_3,$$

sive:

$$16.\quad (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4) = (a_4 a_1).$$

Cum in utraque formula (6.) et (7.) coëfficientes ipsorum R^2 et R^6 iidem sint, sequitur, formulas has $F^{I}R$, $F^{II}R$ non minus quam inde derivatas $F^{I}R^3$, $F^{I}R^5$, $F^{I}R^7$, $F^{II}R^3$, $F^{II}R^5$, $F^{II}R^7$, quippe in quibus singulis semper coëfficientes illi aequales maneant, coëfficientem a_2 habere $= 0$; quo valore in (16.) substituto, fit: $a_3 = a_1$, sive: $F^{I}R$ haud mutatur loco ipsius R ubique R^3 substituto, i. e.

$$F^{I}R = F^{I}R^3,$$

similiter:

$$F^{I}R^5 = F^{I}R^7,$$
$$F^{II}R = F^{II}R^3,$$
$$F^{II}R^5 = F^{II}R^7,$$

quae aequationes aequationibus (14.) satisfaciunt.

Quae omnia cum ita a priori derivata sint, iam adhuc per calculum comprobentur. Quem ad finem functiones F^{I} et F^{II} ipsae determinentur.

Habemus aequationes (6.) et (7.), unde omnes quantitates F^{I} et F^{II} derivandae essent.

Iam ibi aequationes has adhibeamus:

$$1+R^4=0,\quad R+R^5=0,\quad R^2+R^6=0,\quad R^3+R^7=0,$$

quae cum, loco ipsius R, R^{4n+1} substituto, haud mutentur, valores inde prodientes:

$$F^{I}R = 15-4R-4R^3,$$
$$F^{II}R = 15-4R-4R^3,$$

non minus quantitates $(F^{I}R^3)$, $(F^{I}R^5)$, $(F^{I}R^7)$, $(F^{II}R^3)$, $(F^{II}R^5)$, $F^{II}R^7)$ suppeditabunt respective, quam aequationes (6.) et (7.), dummodo pro R substituatur respective R^3, R^5, R^7.

Valores vero functionum $F^{I}R^2$, $F^{I}R^6$, $F^{II}R^2$, $F^{II}R^6$ (6.) et (7.), derivantur loco ipsius R, R^2 et R^6 substituendo; id quod valde diminuitur negotium, si antea in (6.) et (7.) aequationes hae

$$1+R^2=0,\quad R+R^3=0,\quad R^2+R^4=0,\quad R^3+R^5=0 \text{ etc.}$$

adhibeantur, quippe quae loco R, R^2 sive R^6 substitutis haud commutantur.

Valores functionum $(F^{I}R^4)$ et $(F^{II}R^4)$, in aequationibus (6.) et (7.) $R=-1$ posito, emanant.

Valores denique $F^{I}R^8$ et $F^{II}R^8$ ex iisdem formulis, $R=1$ posito, oriuntur.

Inde prodeunt hi valores:

$$17.\quad \begin{cases} F^{I}R = -4R-4R^3-15R^4 = F^{I}R^3 = F^{II}R = F^{II}R^3, \\ F^{I}R^2 = 16R^2+R^4, \qquad F^{II}R^2 = -257, \\ F^{I}R^4 = -257, \qquad F^{II}R^4 = -257, \\ F^{I}R^5 = +4R+4R^3-15R^4 = F^{I}R^7 = F^{II}R^5 = F^{II}R^7, \\ F^{I}R^6 = -16R^2+R^4, \qquad F^{II}R^6 = -257. \\ F^{I}R^8 = -1, \qquad F^{II}R^8 = -1. \end{cases}$$

In his aequationibus calculo inventis omnia theoremata in aequationibus (11.), (12.), (13.), (14.), (15.) contenta se offerunt. Ita exempli gratia summa quadratorum coëfficientium in $F^{I}R$ est: $4^2+4^2+15^2=257$, in $F^{I}R^2$ est: $16^2+1^2=257$.

Quantitatum F^{I} et F^{II} tribus utimur ad determinandos functionum f_1, f_2 etc. f_7 valores; nimirum $(F^{I}R)$ $(F^{I}R^2)$ nec non $(F^{II}R)$ quam vero $=F^{I}R$ esse invenimus. Quae quantitates numerandae hanc formam induunt:

$F^1 R = \sqrt{(257)}(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) = F^1 R^3$, $F^1 R^2 = \sqrt{(257)}(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$,
$F^1 R^7 = \sqrt{(257)}(\cos\vartheta_1 - i\sin\vartheta_1) = F^1 R^7$, $F^1 R^6 = \sqrt{(257)}(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2)$,
quia $(F^1 R)(F^1 R^7) = 257$ nec non $F^1 R + F^1 R^7 =$ quantitas realis est,
et: $(F^1 R^2)(F^1 R^6) = 257$ nec non $F^1 R^2 + F^1 R^6 =$ quantitas realis est.
Unde revocatis aequationibus (4.) et (17.), invenimus:

$$\sqrt{(257)}\cos\vartheta_1 = 15, \qquad \sqrt{(257)}\sin\vartheta_1 = -8\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$\sqrt{(257)}\cos\vartheta_2 = -1, \qquad \sqrt{(257)}\sin\vartheta_2 = 16,$$

unde numerantur:

$$\vartheta_1 = 339^0\ 20'\ 14'', 48,$$
$$\vartheta_2 = 93^0\ 34'\ 34'', 80.$$

Ad quantitates f ipsas computandas, attrahantur aequationum (9.), (10.) et (11.) idoneae. Habemus enim:

$$18. \quad \begin{cases} f_4 = \dfrac{(f_2).(f_2)}{F^1 R^2}, & f_2 = \dfrac{(f_1).(f_1)}{F^1 R}, \\ f_6 = \dfrac{257}{f_2} & f_7 = \dfrac{257}{f_1}, \\ f_3 = \dfrac{F^1(R).f_4}{f_1} & f_5 = \dfrac{257}{f_3}, \end{cases}$$

tum denique:

$$(f_1)^8 = (F^1 R)^4 . f_2^4 = (F^1 R)^4 . (F^1 R^2)^2 . f_4^2 = 257 (F^1 R)^4 . (F^1 R^2)^2.$$

Quia (f_1) per aequationem octavi ordinis data est quantitas, octo valores diversos assumere potest, una vero supposita omnes ceterae quantitates f, cum per lineares functiones in aequationibus (18.) exprimantur, certis valoribus fruentur. Ex octo valoribus quantitatis f_1, quem eligas, perinde est, unde postéa dependebit quae nam fuerit illa radix toti calculo supposita r; quae erat $= \cos\dfrac{2\varkappa\pi}{257} + i\sin\dfrac{2\varkappa\pi}{257}$, ubi $\varkappa$ adhuc indeterminatum mansit. Ponamus igitur:

$$f_1 = -\sqrt[8]{(257 (F^1 R)^4 (F^1 R^2))}, \qquad f_7 = \frac{257}{f_1},$$

tum erit:

$$19. \quad \begin{cases} f_2 = +\sqrt[4]{(257 . F^1 R^2)}, & f_6 = \dfrac{257}{f_2}, \\ f_4 = +\sqrt[2]{(257)}, & \\ f_3 = -\dfrac{\sqrt[2]{(257 . (F^1 R)}}{\sqrt[8]{(257 (F^1 R)^4 . (F^1 R)^4}} & f_5 = \dfrac{257}{f_3}. \end{cases}$$

Inde vero etiam clarum est, functiones f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 has formas induere:

$$f_1 = \sqrt{(257)}\,(\cos w_1 + i \sin w_1), \qquad f_7 = \sqrt{(257)}\,(\cos w_1 - i \sin w_1),$$
$$f_2 = \sqrt{(257)}\,(\cos w_2 + i \sin w_2), \qquad f_6 = \sqrt{(257)}\,(\cos w_2 - i \sin w_2),$$
$$f_3 = \sqrt{(257)}\,(\cos w_3 + i \sin w_3), \qquad f_5 = \sqrt{(257)}\,(\cos w_3 - i \sin w_3),$$
$$f_4 = \sqrt{(257)}, \qquad f_8 = -1.$$

ubi anguli w hos valores accipiunt:

$$w_1 = \frac{2\vartheta_1 + \vartheta_2}{4} + \pi, \qquad w_2 = \frac{\vartheta_1}{2}, \qquad w_3 = \frac{2\vartheta_1 - \vartheta_2}{4} - \pi.$$

Ex datis valoribus quantitatum f, sequitur, aequationibus adhibitis:

$$R + R^2 + R^3 \ldots\ldots + R^8 = 0,$$
$$R^2 + R^4 + R^6 \ldots\ldots + R^{16} = 0,$$
etc.,

cum habeamus:

$$f_1 = p_0 + p_1 R + p_2 R^2 \text{ etc. } + p_7 R^7,$$
$$f_2 = p_0 + p_1 R^2 + p_2 R^4 \text{ etc. } + p_7 R^{2.7},$$
$$f_3 = p_0 + p_1 R^3 + p_2 R^6 \text{ etc. } + p_7 R^{3.7},$$
etc.
$$f_7 = p_0 + p_1 R^7 + p_2 R^{2.7} \text{ etc. } + p_7 R^{7.7},$$
$$f_8 = p_0 + p_1 R^8 + p_2 R^{2.8} \text{ etc. } + p_7 R^{7.8},$$

esse: $$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 8 p_0,$$

sive

20. $$8 p_0 = -1 + \sqrt{(257)} + 2\sqrt{(257)}\,(\cos w_1 + \cos w_2 + \cos w_3).$$

Prorsus simili ratione invenitur, esse:

$$\frac{f_1}{R^m} + \frac{f_2}{R^{2m}} + \frac{f_3}{R^{3m}} + R^{4m} f_4 + R^{3m} f_5 + R^{2m} f_6 + R^m f_7 = 8 p_m,$$

unde sequitur:

21. $$8 p_m = -1 \pm \sqrt{(257)} + 2\sqrt{(257)}\left[\cos\left(w_1 - m.\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(w_2 - m.\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(w_3 - \frac{3m\pi}{4}\right)\right],$$

superiori signo, si m numerus par, inferiori, si impar est, valente.

In sectione priori inventum est, radice r supposita $= \cos\frac{2\pi}{257} \pm i \sin\frac{2\pi}{257}$, (2, 1) esse $= 2\cos\frac{2\pi}{257}$, hanc ob rem hi valores:

$$(32,1) = +\,11{,}8604556, \qquad (32,3^4) = -\,2{,}6143817,$$
$$(32,3) = +\,0{,}2627706, \qquad (32,3^5) = +\,1{,}3214192,$$
$$(32,3^2) = +\,2{,}2657914, \qquad (32,3^6) = -\,3{,}9962556,$$
$$(32,3^3) = -\,6{,}3864173, \qquad (32,3^7) = -\,3{,}7133823$$

in ista suppositione computati, valent pro:

$$r = \cos\frac{2\pi}{257} \pm i\sin\frac{2\pi}{257}, \quad \text{aut} \quad r = \cos\frac{3^8.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{3^8.2\pi}{257}, \text{ aut}$$

$$r = \cos\frac{3^{16}.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{3^{16}.2\pi}{257} \text{ etc., aut } r = \cos\frac{3^{248}.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{3^{248}.2\pi}{257},$$

sive quod ex tabula secunda legi potest pro:

$$r = \cos\frac{2\pi}{257} \pm i\sin\frac{2\pi}{257}, \quad \text{aut} \quad r = \cos\frac{121.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{121.2\pi}{257}, \text{ aut}$$

$$r = \cos\frac{8.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{8.2\pi}{257} \text{ etc., aut } r = \cos\frac{17.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{17.2\pi}{257}.$$

Iam vero quaestio oritur, quinam valores pro r ponantur, ut, p_0, p_1 etc. p_m praescriptos valores habeant. Quae quaestio facillime ita solvitur. Inter octo quantitates p, p_0, quae per aequationem (20.) determinetur, maximum positivum valorem assequi facillime, adhibitis valoribus w_1, w_2 et w_3, diiudicari potest; hanc ob rem $p_0 = (32, 1)$ fiat necesse est, quod calculo comprobatur ita:

$$\cos(w_1+\pi) = -\cos\frac{2\vartheta_1+\vartheta_2}{4} = +0{,}97412293,$$

$$\cos w_2 = \cos\frac{\vartheta_2}{2} = +0{,}68469765,$$

$$\cos(w_3+\pi) = -\cos\frac{2\vartheta_1-\vartheta_2}{4} = +0{,}83170804,$$

unde fit

$$p_0 = 11{,}8604553.$$

Inde clarum fit, fore:

$$p_0 = (32, 1), \quad p_1 = (32, 3), \quad p_2 = (32, 3^2) \text{ etc. } \quad p_7 = (32, 3^7),$$

atque r iisdem valoribus suppositis ac antea frui.

Adiiciendum adhuc est, valorem p_m, qui est aggregatum sedecim angulorum tale:

$$8p_m = \begin{cases} 2\cos 81.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 44.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 123.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 95.\frac{2m\pi}{257} \\ 2\cos 35.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 73.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 23.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 70.\frac{2m\pi}{257} \\ 2\cos 11.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 67.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 88.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 22.\frac{2m\pi}{257} \\ 2\cos 46.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 117.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 111.\frac{2m\pi}{257} + 2\cos 92.\frac{2m\pi}{257} \end{cases}$$

geometrice per bisectionem anguli construi posse. Cum enim sit:

$$8p_m = -2 \pm \sqrt{(257)}$$

$$+ 2\sqrt{257}\left[\cos\left(w_1 - m.\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(w_2 - m.\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(w_3 - \frac{3m\pi}{4}\right)\right]$$

atque

$$w_1 = \frac{2\vartheta_1+\vartheta_2}{4} + \pi, \quad w_2 = \frac{\vartheta_2}{2}, \quad w_3 = \frac{2\vartheta_1-\vartheta_2}{4},$$

ubi anguli ϑ_1 et ϑ_2 determinantur aequationibus his:

$$\cos\vartheta_1=\frac{15}{\sqrt{(257)}},\quad \sin\vartheta_1=-\frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(257)}},\quad \cos\vartheta_2=\frac{-1}{\sqrt{(257)}},\quad \sin\vartheta_2=\frac{16}{\sqrt{(257)}}$$

primum anguli ϑ_1 et ϑ_2 construantur, deinde anguli w componantur, tum denique formula ipsius $8p_m$ per geometricas constructiones exprimi potest.

Haud denique erit inutile quomodo formula ipsius $8p_m$ cum formulis ex priori parte emanantibus cohaereat, ostendere.

Ex interpretatione signorum f hae aequationes identicae sequuntur:

$$f_8=\ p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_7\ =-1,$$
$$f_4=(p_0+p_2+p_4+p_6)-(p_1+p_3+p_5+p_7)=\ (128,1)-(128,3),$$
$$f_2+f_6=2((p_0+p_4)-(p_2+p_6))\ =\ 2((64,1)-(64,9)),$$
$$f_1+f_3+f_5+f_7=-4(p_0-p_4)\ =-4((32,1)-(32,81)),$$

quibus aequationibus apte inter se additis evadunt hae:

$$4(p_0+p_4)=-1+[(128,1)-(128,3)]+2[(64,1)-64,9)]$$
et $$8p_0=-1+[(128,1)-(128,3)]+2[(64,1)-(64,9]-4[(32,1)-(32,81)].$$

Ex articulo VI. vero sequitur:

$$(128,1)=\frac{-1+\sqrt{(257)}}{2},\quad (64,1)=\frac{(128,1)+\sqrt{((128,1)^2+64)}}{2},$$
$$(128,3)=\frac{-1-\sqrt{(257)}}{2},\quad (64,9)=\frac{(128,1)-\sqrt{((128,1)^2+64)}}{2},$$
$$(32,1)-(32,81)=\sqrt{[((64,1)^2+4)5+3(64,1)+(64,9)]},$$

unde accipimus:

$$4(p_0+p_4)=-1+\sqrt{(257)}+2[\sqrt{((128,1)^2+64)}],$$
et $$8p_0=-1+\sqrt{(257)}+2[\sqrt{((128,1)^2+64)}]-4\sqrt{[((64,1)^2+4)5+3(64,1)+(64,9)]},$$

quibus formulis comparatis cum his:

$$4(p_0+p_4)=-1+\sqrt{(257)}+2\sqrt{(257)}\cos w_2,$$
$$8p_0\ =-1+\sqrt{(257)}+2\sqrt{(257)}(\cos w_1+\cos w_2+\cos w_3),$$

fieri apparet:

$$\sqrt{((128,1)^2+64)}=\sqrt{(257)}\cos w_2\quad\text{et}$$
$$2\sqrt{[((64,1)^2+4)4+3(64,1)+(64,9)]}=\sqrt{(257)}(\cos w_1+\cos w_3).$$

Quod etiam calculo comprobatur.

Quae cum ita sint, formulas novas in hoc articulo inventas, nihil aliud esse, quam concinniores expressiones trigonometricas loco magis complicitarum formularum algebraicarum fungentes, exposuisse mihi videor.

IX.

Nihil impediret, quo minus prorsus simili calculo omnes sedecim valores (16.) tanquam aequationis sedecimi ordinis radices definiantur, nec

non duae et triginta periodi $(8,)$ tanquam aequationis 32ti ordinis radices etc. adeo denique 128 valores, $(2,)$ tanquam radices aequationis 128ti ordinis per formulas concinnas trigonometricas perhibeantur. Ne vero quid in dubio remaneat, generalem aequationes illas solvendi viam quam brevissime adumbremus.

Omnes has aequationes tales esse constat, ex quarum radicibus totidem functiones lineares, ac numerus radicum, constitui ac determinari possunt. Sit igitur $pm+1$ numerus primus datus, nec non pm radices aequationis:

$$X^{pm}+X^{pm-1}+X^{pm-2}+\text{etc.}+X+1=0,$$

in m diversa certa aggregata, quarum singulum quodque p terminos continet, segregentur. Tum haec aggregata radices fiunt aequationis resolubilis $m$ti ordinis, quae quomodo solvatur, ostendere velim.

Si R radix aequationis $X^m=1$, cuius $m$ta demum potestas fiat $=1$, supponatur, quippe quae formae erit,

$$R=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

ubi k et m numeri inter se primi sunt, si deinde:

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \dots\ p_{(m-1)}$$

m radices aequationis solvendae assumantur, illae aequationes lineares, de quibus sermo erat, fiunt:

$$\begin{aligned}
f_1 &= p_0+p_1.R+p_2R^2+\text{etc.}+p_{(m-1)}R^{m-1},\\
f_2 &= p_0+p_1.R^2+p_2R^4+\text{etc.}+p_{(m-1)}R^{2(m-1)},\\
f_3 &= p_0+p_1.R^3+p_2R^6+\text{etc.}+p_{(m-1)}R^{3(m-1)},\\
&\text{etc.}\\
f_m &= p_0+p_1R^m+p_2R^{2m}+\text{etc.}+p_{(m-1)}R^{m(m-1)}.
\end{aligned}$$

Quantitates

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \dots\ f_m,$$

ex indole propria aequationis solvendae determinabiles, multis theorematibus de ipsis functionibus f_1, f_2 etc. f_m introductis, per functiones trigonometricas angulorum $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, $\frac{6\pi}{m}$ exprimuntur. Quippe quorum theorematum primum, id quod simili ratione ac pro $m=8$, generaliter demonstratur est hoc:

$$f_{(n)}f_{(m-n)}=pm+1.$$

Valoribus quantitatum f_1, f_2 etc. f_m determinatis, hisque aequationibus identicis adhibitis:

$$R + R^2 + R^3 + \text{etc.} + R^m = 0,$$
$$R^2 + R^4 + R^6 + \text{etc.} + R^{2m} = 0,$$
$$R^3 + R^6 + R^9 + \text{etc.} + R^{3m} = 0,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$R^{m-1} + R^{2(m-1)} + R^{3(m-1)} + \text{etc.} + R^{m(m-1)} = 0,$$
$$R^m = R^{2m} = R^{3m} \text{ etc} = 1,$$

hae radices aequationis solvendae $m$ti ordinis emanant.

$$p_0 = \frac{1}{m}\{f_1 + f_2 + f_3 + \text{etc.} + f_{m-1} + f_m\}$$
$$p_1 = \frac{1}{m}\{R^{m-1}f_1 + R^{m-2}f_2 + R^{m-3}f_3 + \text{etc.} + Rf_{m-1} + f_m\}$$
$$p_2 = \frac{1}{m}\{R^{2(m-1)}f_1 + R^{2(m-2)}f_2 + R^{2(m-3)}f_3 + \text{etc.} + R^2f_{m-1} + f_m\}$$
$$\text{etc.}$$
$$p_7 = \frac{1}{m}\{R^{r(m-1)}f_1 + R^{r(m-2)}f_2 + R^{r(m-3)}f_3 + \text{etc.} + R^rf_{m-1} + f_m\}$$

In articulis praemissis casum, ubi $pm+1=257$, nec non $m=8$ est, explicatum invenis. Ceteri omnes casus eandem methodum sequuntur nec non in ultimo, ubi $m=128$ est, continentur; quippe quem casum in sequentibus articulis satis accurate expositum atque elaboratum invenire licet.

(Cont. seq. prox.)

13.

Bemerkungen über die Lambertsche Reihe

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\text{etc.}$$

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.)

Dafs diese Reihe, in welcher bekanntlich der Coefficient jeder einzelnen Potenz von x so viele Einheiten enthält, als der Exponent ganzzahlige Divisoren, die gröfste Aufmerksamkeit verdient, ist wohl keiner Frage unterworfen. Denn da die Exponenten die natürliche Reihe der ganzen Zahlen bilden, so erhält man hierdurch nicht blofs successive die Anzahl der Theiler jeder ganzen Zahl, sondern auch, was noch wichtiger ist: die Primzahlen erscheinen eine nach der andern, und zwar auf eine bestimmte Weise von den zusammengesetzten Zahlen geschieden, indem der Coefficient jeder Potenz, deren Exponent eine Primzahl, gleich 2, der Coefficient jeder anderen Potenz hingegen gröfser als 2 ist. Wäre es eine Möglichkeit, die Potenzen, deren Coefficienten gröfser als 2 sind, aus der ursprünglichen Reihe, so würde der Rest eine Function abgeben, durch deren Entwickelung man die Primzahlen nach einander, und nur diese erhielte. Gleichgültig, ob dies Ziel zu erreichen ist, oder nicht; auf jeden Fall scheint mir jeder Beitrag, der zur genaueren Erforschung der Natur unserer Reihe führen kann, dankenswerth. Einen solchen, und zwar einen ausgezeichnet schönen, hat bereits Herr Dr. Clausen in diesem Journal (3. Band, S. 95.) gegeben, indem er erwähnte, dafs sich die Lambertsche Reihe in die folgende:

$$x\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+x^9\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)+x^{16}\left(\frac{1+x^4}{1-x^4}\right)+\text{etc.}$$

verwandeln lasse. Da, so viel ich weifs, von dieser Umformung noch kein Beweis gegeben ist, so mag hier zuerst ein solcher mitgetheilt werden. Entwickelt man nämlich die einzelnen Glieder $\frac{x}{1-x}$, $\frac{x^2}{1-x^2}$, $\frac{x^3}{1-x^3}$ etc. durch blofse Division und setzt die Resultate unter einander, so erhält man

$$\begin{array}{l} x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\text{etc.} \\ +x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+\text{etc.} \\ +x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+x^{18}+\text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+x^{20}+x^{24}+\text{ etc.} \\ +x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25}+x^{30}+\text{ etc.} \\ +x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}+x^{30}+x^{36}+\text{ etc.} \\ +\text{ etc.} \end{array}$$

Nimmt man von diesem Quadrate die Glieder weg, die in der ersten Horizontalreihe, und die in der ersten Verticalreihe stehen, so ist die Summe derselben =

$$x+2x^2+2x^3+2x^4+\text{ etc.} = x\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Verfährt man mit dem übrigbleibenden Quadrate auf gleiche Weise, so ist die Summe der weggenommenen Glieder =

$$x^4+2x^6+2x^8+2x^{10}+\text{ etc.} = x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right).$$

Wiederholt man dasselbe Verfahren bei dem nunmehr übriggebliebenen Quadrate, so erhält man

$$x^9+2x^{12}+2x^{15}+2x^{18}+\text{ etc.} = x^9\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)$$

u. s. f. Da jedes Glied von der Form x^{mn}, wo m, n verschiedene Zahlen sind, sowohl als n^{tes} in der m^{ten} Horizontalreihe, als auch als m^{tes} in der n^{ten} Verticalreihe erscheint, und aus demselben Grunde in der Diagonale, deren eine Spitze x ist, nur solche Glieder stehen können, deren Exponenten die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe bilden, so hat man, nachdem die angegebene Operation $n-1$ mal vorgenommen worden, das n^{te} mal hinwegzunehmen;

$$\begin{array}{l} \quad x^{nn}+x^{(n+1)n}+x^{(n+2)n}+\text{ etc.} \\ +x^{n(n+1)} \\ +x^{n(n+2)} \\ +\text{ etc.} \end{array}$$

$= x^{nn}[1+2x^n+2x^{2n}+\text{ etc.}] = x^{nn}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)$, was zu beweisen war.

Beiläufig mag noch bemerkt werden, dafs dieselbe Reihe in eine unendliche Anzahl begrenzter oder unbegrenzter Reihen zerlegt werden kann, deren Exponenten arithmetische Reihen der zweiten Ordnung bilden, und die man daher schicklich geometrische Reihen der zweiten Ordnung nennen könnte. Nimmt man nemlich von der obigen Tafel zuerst x, dann die beiden x^2, dann die mit ihnen parallel liegenden Glieder x^3, x^4, x^3, hierauf die abermals auf einer Parallele stehenden x^4, x^6, x^6, x^4 weg, und fährt auf gleiche Weise fort, so ist die ursprüngliche Lambertsche Reihe

auf folgende Art zu schreiben:

$$\begin{aligned}
&x\\
&+2x^2\\
&+x^3(2+x)\\
&+x^4(2+2x^2)\\
&+x^5(2+2x^3+x^4)\\
&+x^6(2+2x^4+2x^6)\\
&+x^7(2+2x^5+2x^8+x^9)\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&+x^{2n-1}(2+2x^{2n-3}+2x^{4n-8}+2x^{6n-15}+\ldots+2x^{n(n-2)}+x^{(n-1)(n-1)})\\
&+x^{2n}\;(2+2x^{2n-2}+2x^{4n-6}+2x^{6n-12}+\ldots+2x^{n(n-1)-2}+2x^{n(n-1)})\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nimmt man hingegen zuerst die in der Diagonale stehenden, dann die in den beiden ihr nächsten Parallelen liegenden (gleichen), dann die auf den beiden nächstfolgenden Parallelen befindlichen Glieder u. s. f., so erhält man:

$$\begin{aligned}
&x+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+\text{etc.}\\
&+2x^2+2x^6+2x^{12}+2x^{20}+2x^{30}+\text{etc.}\\
&+2x^3+2x^8+2x^{15}+2x^{24}+2x^{35}+\text{etc.}\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&+2x^n+2x^{2n+2}+2x^{3n+6}+2x^{4n+12}+2x^{5n+20}+\text{etc.}
\end{aligned}$$

So viel von diesen Anordnungen.

Es sey nunmehr

$$1.\quad \varphi x=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\text{etc.}$$
$$=F_1x+F_2x^2+F_3x^3+\text{etc.}=\sum_1^\infty{}_r F_r x^r,$$

so zeigt, wie erwähnt, F_r die Anzahl der Divisoren von r an, und wenn folglich

$$r=l^\lambda m^\mu n^\nu\ldots.$$

ist, wo l, m, n, ... verschiedene Primzahlen bezeichnen, so ist

$$F_r=(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)\ldots.$$

Sind ferner $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \ldots. \zeta^{p-1}$ die Wurzeln der Gleichung $x^p-1=0$, so erhält man, wenn in (1.) nach einander ζx, $\zeta^2 x$, $\zeta^3 x$, ... für x gesetzt, und die Resultate zu (1.) addirt werden:

$$2.\quad \varphi x+\varphi(\zeta x)+\varphi(\zeta^2 x)+\varphi(\zeta^3 x)+\ldots.+\varphi(\zeta^{p-1}x)$$
$$=p[F_p x+F_{2p}x^2+F_{3p}x^3+\text{etc.}]=p\sum_1^\infty{}_h F_{hp}x^{hp}.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung läfst sich aber jedesmal durch eine begrenzte Anzahl von Functionen φ aus-

drücken, deren Argumente Potenzen von x^p sind. Dies soll hier gezeigt werden. Ist nämlich

Erstens p **eine Primzahl**, so bemerke man, dafs alle Werthe, die h erhalten kann, in solche zerfallen, die nicht durch p theilbar sind, und in solche, die durch p getheilt werden können. Es stelle a jeden in die erste, bp jeden in die zweite Classe gehörenden Werth von h vor, so ist klar, dafs b jede ganze Zahl bedeuten kann, und dafs

$$\sum_{1}^{\infty}{}_h F_{hp}\, x^{hp} = \sum_a F_{ap}\, x^{ap} + \sum_{1}^{\infty}{}_b F_{bpp}\, x^{bpp}$$

ist, wo das erste Summenzeichen des zweiten Theils dieser Gleichung sich auf jeden ganzen, durch p nicht theilbaren Werth von a bezieht. Nun hat aber jedes a die Form $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots.$, wo A, B, C, ... von einander und von p verschiedene Primzahlen anzeigen; folglich ist

$$F_{ap} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.(\ldots+1)\ldots. = 2F_a.$$

Jedes b hingegen hat die Form $A^\alpha A^\beta C^\gamma \ldots. p^\pi \ldots.$ (wo π auch $=0$ sein kann); demnach ist $F_{bpp} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.(\pi+3)\ldots. = 2(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.(\pi+2)\ldots.-(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.(\pi+1)\ldots. = 2F_{bp}-F_b$. Demnach ist

$$\sum_{1}^{\infty}{}_h F_{hp}\, x^{hp} = 2\sum_a F_a\, x^{ap} + 2\sum_{1}^{\infty}{}_b F_{bp}\, x^{bpp} - \sum_{1}^{\infty}{}_b F_b\, x^{b.pp},$$

d. h. weil in dem zweiten Theile dieser Gleichung statt $\sum_{1}^{\infty}{}_b$ auch $\sum_{1}^{\infty}{}_{bp}$ gesetzt werden kann, da p eine Constante ist, und dann das zweite Glied ganz dasselbe ausdrückt als das erste, nur dafs dieses für alle durch p nicht theilbaren, jenes für alle durch p theilbaren Werthe von h gilt, so ist

$$\sum_{1}^{p}{}_h F_{hp}\, x^{hp} = 2\sum_{1}^{\infty}{}_h F_h\, x^{hp} - \sum_{1}^{\infty}{}_b F_b\, x^{b.pp} = 2\sum_{1}^{\infty}{}_r F_r\, x^{rp} - 2\sum_{1}^{\infty}{}_r F_r\, x^{r.pp},$$

demnach, wenn in (1.) nach einander x^p und x^{pp} statt x gesetzt wird,

3. $$\varphi x + \varphi(\zeta x) + \varphi(\zeta^2 x) + \varphi(\zeta^3 x) \ldots. + \varphi(\zeta^{p-1} x) = 2p\varphi(x^p) - p\varphi(x^{pp}).$$

Hieraus folgt also z. B.

für $p=1$, $\varphi x = 2\varphi x - \varphi x$,

für $p=2$, $\varphi x + \varphi(-x) = 4\varphi(x^2) - 2\varphi(x^4)$,

für $p=3$, $\varphi x + \varphi\left(\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}x\right) + \varphi\left(\frac{(-1-i\sqrt{3})}{2}x\right) = 6\varphi(x^3) - 3\varphi(x^9)$

u. s. f.

Die Gleichung $\varphi(-x) = -\varphi x + 4\varphi(x^2) - 2\varphi(x^4)$ giebt zugleich an, wie negative Argumente auf positive zu reduciren sind.

Es sei **Zweitens** p **eine beliebige Potenz einer Primzahl** l, also $p = l^\lambda$, so kann man fast ganz auf dieselbe Weise wie vorher schlie-

sen. Es zerfallen nemlich gegenwärtig die Werthe, welche dem h in der Gleichung (2.) beizulegen sind, in solche, die durch l getheilt einen Rest übrig lassen, und in solche, die durch l theilbar sind. Stellt abermals a jeden in die erste, $b\,l$ jeden in die zweite Classe gehörenden Werth von h vor, so hat man

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_h F_{hp}\, x^{hp} = \Sigma_a F_{ap}\, x^{ap} + \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_b F_{blp}\, x^{blp}.$$

Nun hat aber jedes a die Form $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$, wo $A, B, C, \ldots$ von einander und von l verschiedene Primzahlen anzeigen; folglich ist

$$F_{ap} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+1)\ldots = (\lambda+1)F_a.$$

Ferner hat jedes b die Form $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots l^\varrho \ldots$ (wo ϱ auch $=0$ sein kann); demnach ist $F_{blp} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+\varrho+2)\ldots$, d. h. wenn man bemerkt, dafs $\lambda+\varrho+2 = (\lambda+1)(\varrho+2) - \lambda(\varrho+1)$, $F_{blp} = (\lambda+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+2)\ldots - \lambda(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+1)\ldots = (\lambda+1)F_{bl} - \lambda F_b$. Folglich hat man

$$\begin{aligned}\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_h F_{hp}\, x^{hp} &= (\lambda+1)\, \Sigma_a F_a\, x^{ap} + (\lambda+1)\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_b F_{bl}\, x^{bl.p} - \lambda \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_b F_b\, x^{b.lp}\\ &= (\lambda+1)\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_h F_h\, x^{hp} - \lambda \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_h F_h\, x^{h.lp},\end{aligned}$$

woraus folgt, dafs, wenn $p = l^\lambda$,

4. $\varphi x + \varphi(\zeta x) + \varphi(\zeta^2 x) + \ldots + \varphi(\zeta^{p-1} x) = (\lambda+1)p\,\varphi(x^p) - \lambda p\,\varphi(x^{lp})$.

Ist $\lambda = 1$, so geht, wie nothwendig, (4.) in (3.) über.

Hieraus hat man z. B. für $l = \lambda = 2$, $p = 4$,

$$\varphi x + \varphi(ix) + \varphi(-x) + \varphi(-ix) = 12\varphi(x^4) - 8\varphi(x^8),$$

welches specielle Resultat auch aus der obigen Gleichung

$$\varphi x + \varphi(-x) = 4\varphi(x^2) - 2\varphi(x^4)$$

herzuleiten war. Denn setzt man in dieselbe ix statt x, so hat man

$$\varphi(ix) + \varphi(-ix) = 4\varphi(-x^2) - 2\varphi(x^4);$$

setzt man hingegen x^2 statt x, so ergiebt sich

$$4\varphi(x^2) + 4\varphi(-x^2) = 16\varphi(x^4) - 8\varphi(x^8),$$

und die Summe dieser drei Gleichungen ist

$$\varphi x + \varphi(ix) + \varphi(-x) + \varphi(-ix) = 12\varphi(x^4) - 8\varphi(x^8),$$

wie oben.

Es sei Drittens p ein Product beliebiger Potenzen zweier verschiedenen Primzahlen l, m, also $p = l^\lambda m^\mu$. Dann theilen sich alle Werthe, die h erhalten kann, in solche ein, die 1) weder durch l noch durch m, 2) durch l, aber nicht durch m, 3) durch m, aber nicht durch l, 4) durch l und durch m theilbar sind. Es stelle a jeden in die erste, $b\,l$ jeden in die zweite, $c\,m$ jeden in die dritte, und $d\,l\,m$ jeden in die vierte Classe gehörenden Werth von

h vor, so ist offenbar

$$\sum_{1}^{\infty}{}_h F_{hp} x^{hp} = \Sigma_a F_{ap} x^{ap} + \Sigma_b F_{blp} x^{blp} + \Sigma_c F_{cmp} x^{cmp} + \sum_{1}^{\infty}{}_d F_{dlmp} x^{dlmp}.$$

Nun hat aber jedes a die Form $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$, wo $A, B, C, \ldots$ von einander und von l und m verschiedene Primzahlen anzeigen; folglich ist

$$F_{ap} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+1)(\mu+1)\ldots = (\lambda+1)(\mu+1)F_a.$$

Ferner hat jedes b die Form $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots l^\varrho \ldots$, wo $A, B, C, \ldots$ von einander und von m verschiedene Primzahlen bezeichnen, und ϱ auch $=0$ sein kann. Folglich ist

$$F_{blp} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+\varrho+2)(\mu+1)\ldots$$
$$= (\lambda+1)(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+2)\ldots - \lambda(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+1)\ldots$$
$$= (\lambda+1)(\mu+1)F_{bl} - \lambda(\mu+1)F_b.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$F_{cmp} = (\lambda+1)(\mu+1)F_{cm} - \mu(\lambda+1)F_c.$$

Endlich hat jedes d die Form $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots l^\varrho m^\sigma \ldots$ Folglich ist

$$F_{dlmp} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\lambda+\varrho+2)(\mu+\sigma+2)\ldots$$

Bemerkt man aber, dafs

$$l+\varrho+2 = (\lambda+1)(\varrho+2) - \lambda(\varrho+1),$$
$$\mu+\sigma+2 = (\mu+1)(\sigma+2) - \mu(\sigma+1),$$

so sieht man, dafs F_{dlmp} unter folgende Form gesetzt werden kann:

$$= (\lambda+1)(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+2)(\sigma+2)\ldots - \lambda(\mu+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+1)(\sigma+2)\ldots$$
$$- \mu(\lambda+1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+2)(\sigma+1) + \lambda\mu(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\varrho+1)(\sigma+1)\ldots$$
$$= (\lambda+1)(\mu+1)F_{dlm} - \lambda(\mu+1)F_{dm} - \mu(\lambda+1)F_{dl} + \lambda\mu F_d.$$

Folglich hat man

$$\sum_{1}^{\infty}{}_h F_{hp} x^{hp} = (\lambda+1)(\mu+1)\left[\Sigma_a F_a x^{ap} + \Sigma_b F_{bl} x^{bl.p} + \Sigma_c F_{cm} x^{cm.p} + \sum_{1}^{\infty}{}_d F_{dlm} x^{dlm.p}\right]$$
$$- \lambda(\mu+1)\left[\Sigma_b F_b x^{b.lp} + \sum_{1}^{\infty}{}_d F_{dm} x^{dm.lp}\right]$$
$$- \mu(\lambda+1)\left[\Sigma_c F_c x^{c.mp} + \sum_{1}^{\infty}{}_{dl} F_{dl} x^{dl.mp}\right]$$
$$+ \lambda\mu . \sum_{1}^{\infty}{}_d F_d x^{d.lmp}.$$

Aber die in der ersten Klammer stehenden Glieder bedeuten alle dasselbe (wie man augenblicklich sieht, wenn man statt Σ_b, Σ_c, $\sum_{1}^{\infty}{}_d$ resp. Σ_{bl}, Σ_{cm}, $\sum_{1}^{\infty}{}_{dlm}$ setzt, was erlaubt ist): nemlich dafs $\Sigma_h F_h x^{hp}$ genommen werden soll, und zwar erstens für alle Zahlen der ersten, dann der zweiten, dann der dritten und endlich der vierten Classe, d. h. für alle ganzen Werthe von h. Dieselbe Bewandnifs hat es mit den in $\lambda(\mu+1)$ und in $\mu(\lambda+1)$ multiplicirten Summen, und folglich hat man

$$\ldots x^{hp} = (\lambda+1)(\mu+1)\sum_{1}^{\infty}{}_r F_r x^{rp} - \lambda(\mu+1)\sum_{1}^{\infty}{}_r F_r x^{r.lp} - \mu(\lambda+1)\sum_{1}^{\infty}{}_r F_r x^{rmp} + \lambda\mu\sum_{1}^{\infty}{}_r F_r x^{rlmp},$$

folglich ist, wenn $p=l^\lambda m^\mu$:

$$5.\quad \varphi x+\varphi(\zeta x)+\varphi(\zeta^2 x)+\ldots\ldots+\varphi(\zeta^{p-1}x)$$
$$=(\lambda+1)(\mu+1)p\varphi(x^p)-\lambda(\mu+1)p\varphi(x^{lp})-\mu(\lambda+1)p\varphi(x^{mp})+\lambda\mu p\varphi(x^{lmp}).$$

Ist **Viertens** p ein Product beliebiger Potenzen dreier verschiedenen Primzahlen l, m, n, also $p=l^\lambda m^\mu n^\nu$, so erhält man ganz auf demselben Wege:

$$6.\quad \varphi x+\varphi(\zeta x)+\varphi(\zeta^2 x)+\ldots\ldots+\varphi(\zeta^{p-1}x)=(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)p\varphi(x^p)$$
$$-\lambda(\mu+1)(\nu+1)p\varphi(x^{lp})-\mu(\lambda+1)(\nu+1)p\varphi(x^{mp})-\nu(\lambda+1)(\mu+1)p\varphi(x^{np})$$
$$+\mu\nu(\lambda+1)p\varphi(x^{mnp})+\nu\lambda(\mu+1)p\varphi(x^{nlp})+\lambda\mu(\nu+1)p\varphi(x^{lmp})-\lambda\mu\nu p\varphi(x^{lmnp}).$$

Das Gesetz liegt nun so klar am Tage, daſs man es augenblicklich allgemein aussprechen kann:

Ist nemlich $p=l^\lambda m^\mu n^\nu\ldots\ldots$, wo $l, m, n, \ldots\ldots$ verschiedene Primzahlen sind, so bilde man die beiden Producte:

$$(\lambda+1-\lambda L)(\mu+1-\mu M)(\nu+1-\nu N)\ldots\ldots=\alpha-\beta L+\gamma LM-\delta LMN+\text{etc.}$$
$$-\beta_1 M+\gamma_1 LN$$
$$-\beta_2 N+\gamma_2 MN$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$(1+lL)(1+mM)(1+nN)\ldots\ldots=1-b\,L+c\,LM-dLMN+\text{etc.}$$
$$-b_1 M+c_1 LN$$
$$-b_2 N+c_2 MN$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo $L, M, N, \ldots\ldots$ unbestimmte Gröſsen sind. Dann ist

$$\varphi x+\varphi(\zeta x)+\varphi(\zeta^2 x)+\ldots\ldots+\varphi(\zeta^{p-1}x)=\alpha p\varphi(x^p)-\beta p\varphi(x^{bp})+\gamma p\varphi(x^{cp})-\delta p\varphi(x^{dp})+\text{etc.}$$
$$-\beta_1 p\varphi(x^{b_1 p})+\gamma_1 p\varphi(x^{c_1 p})$$
$$-\beta_2 p\varphi(x^{b_2 p})+\gamma_2 p\varphi(x^{c_2 p})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

welches die vollständige Auflösung der uns vorgesetzten Aufgabe ist.

Hieraus ergiebt sich zugleich, daſs, wenn man

$$\varphi x+\varphi(\zeta x)+\varphi(\zeta^2 x)+\ldots\ldots+\varphi(\zeta^{p-1}x)=\psi(p,x)$$

setzt, und r eine keinen Factor von p bildende Primzahl, ϱ hingegen eine beliebige ganze Zahl ist, man

$$\psi(pr^\varrho,x)=r^\varrho\,[(\varrho+1)\psi(x^{r^\varrho})-\varrho\psi(x^{r^{\varrho+1}})]$$

habe, eine Gleichung welche sich auf einem Wege, der dem oben eingeschlagenen ähnlich ist, auch direct beweisen lieſse.

Sind $\eta, \eta^3, \eta^5, \ldots\ldots \eta^{2p-1}$ die Wurzeln der Gleichung $x^p+1=0$, so übersieht man leicht, daſs

$$\varphi(\eta x)+\varphi(\eta^3 x)+\varphi(\eta^5 x)+\ldots\ldots+\varphi(\eta^{2p-1}x)=\psi(2p,x)-\psi(p,x),$$

so daſs diese Summe durch die obige mitgefunden ist.

14.

Mémoire sur la théorie des nombres.

(Suite du mémoire No. 3. dans le cahier précédent.)

(Par Mr. G. Libri de Florence.)

Soit proposé, par exemple, de trouver le nombre N des solutions entières positives et moindres que c, de la congruence

$$ax+b\equiv 0 \pmod{c},$$

la formule (24.) se changera, dans ce cas, dans la suivante

$$26.\quad \frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\left(1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots\ldots+\cos 2u(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots\ldots+\cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}\right),$$

qui exprimera le nombre N cherché.

Si l'on considère le terme général de cette série, on aura l'équation

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\cos 2u(ax+b)\frac{\pi}{c}=\frac{\sin 2u\left(b+ac-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}-\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2c\sin\frac{ua\pi}{c}},$$

dans le second membre de laquelle le numérateur est toujours zéro, mais dont le dénominateur ne peut se réduire à zéro, que lorsque a et c ont un diviseur commun plus grand que l'unité, puisque u est toujours plus petit que c. Il résulte de là que si a et c sont premiers entre eux, tous les termes de la série (26.) s'évanouissent, excepté le premier dont la valeur se réduit à

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}1=\frac{c}{c}=1.$$

Mais si a et c ont un facteur commun g, on supposera $a=mg$; $c=ng$; et en faisant $u=n$, on obtiendra

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\cos 2n(ax+b)\frac{\pi}{c}=\frac{\sin 2n\left(b+ac-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}-\sin 2n\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2c\sin\frac{na\pi}{c}}$$

$$=\frac{\sin 2\left(b+ang-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{g}-\sin 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{g}}{2ng\sin\frac{a\pi}{g}}.$$

Cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$, en vertu de l'hypothèse $a=mg$. On devra donc différentier le numérateur et le dénominateur par rapport à a, pour avoir une valeur déterminée, et l'on trouvera après les réductions:

$$\frac{\sin 2\left(b+ang-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{g}-\sin 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{g}}{2ng\sin\frac{a\pi}{g}}=\cos\frac{2b\pi}{g}.$$

Si au lieu de prendre $u=n$, on fait en général $u=en$, e étant un nombre entier quelconque, on trouve

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c}\cos en(ax+b)\frac{\pi}{c}=\cos\frac{2eb\pi}{g};$$

et comme le nombre n est compris $g-1$ fois dans $c-1$, on pourra faire successivement $e=0, 1, 2, 3, \ldots\, g-1$; et la valeur de l'intégrale (26.) sera exprimée (dans le cas actuel où l'on suppose que a et c ont un commun diviseur g) par la série

$$1+\cos\frac{2b\pi}{g}+\cos\frac{4b\pi}{g}\ldots+\cos\frac{2(g-1)b\pi}{g},$$

dont la somme

$$\frac{\sin 2\left(b-\frac{b}{2g}\right)\pi+\sin\frac{b\pi}{g}}{2\sin\frac{b\pi}{g}}$$

a pour valeur g, lorsque $\frac{b}{g}$ est un nombre entier, et qui se réduit à zéro dans le cas contraire.

De là résulte

1°. Que la congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. c), a toujours une solution entière et plus petite que c, lorsque a et c n'ont d'autres diviseurs communs que l'unité.

2°. Que si a et c ont un commun diviseur g différent de l'unité, qui ne divise point b, cette congruence n'admet aucune solution entière.

3°. Qu'enfin si $\frac{b}{g}$ est un nombre entier, on trouvera pour x un nombre g de valeurs entières plus petites que c, qui satisfont à la congruence proposée.

Maintenant si l'on fait $\varphi=ax+b$, et $m=c$, dans l'intégrale (25.) on trouvera que la formule

27. $$\sum_{x=0}^{x=c}x\left(1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots+\cos 2u(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots+\cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}\right),$$

exprimera la somme des valeurs de x, entières et moindres que c, qui satisfont à la congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. c), lorsqu'elle est résoluble, et que lorsqu'elle ne l'est pas, cette intégrale se réduit à zéro.

Nous avons démontré que si a et c ont un facteur commun différent de l'unité, et qui ne divise pas b, la congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. c) n'admet aucune solution entière; et comme, si ce facteur commun divise aussi b, on peut toujours le supprimer, il sera permis, dans ce cas, de supposer que a et c sont premiers entre eux; et alors on sera assuré qu'il existe toujours une valeur entière de x, comprise entre zéro et c, qui satisfait à la congruence proposée; mais comme il n'existe qu'une seule de ces valeurs, comprise entre les limites que nous venons d'indiquer, la formule (27.), qui exprime la somme des racines de la congruence

$$ax+b\equiv 0 \quad (\text{mod. } c),$$

aura pour valeur la plus petite de ces racines entières et positives.

Actuellement pour trouver cette valeur de x, on considèrera le terme général de l'intégrale (27.), et on aura

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} x\cos 2u(ax+b)\frac{\pi}{c} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{(c-1)\sin 2u\left(b+ca-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}+\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2c\sin\frac{ua\pi}{c}}\\ +\dfrac{\cos 2u\left(ca+b-a\right)\frac{\pi}{c}-\cos 2u(b-a)\frac{\pi}{c}}{c\left(2\sin\frac{ua\pi}{c}\right)^2}\end{array}\right\},$$

où il faudra faire successivement $u=1, 2, 3, \ldots\ldots c-1$; et ajouter au résultat le premier terme de la série (27.), qui est

$$\frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} x = \frac{c(c-1)}{2c} = \frac{c-1}{2},$$

Puisque a et c sont premiers entre eux, et que u est plus petit que c, il s'en suit que le dénominateur $2c\sin\frac{ua\pi}{c}$ ne pourra jamais s'évanouir; on obtiendra par conséquent, en faisant les réductions nécessaires:

$$\frac{(c-1)\sin 2u\left(ac+b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}+\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2c\sin\frac{ua\pi}{c}}+\frac{\cos 2u\left(ac+b-a\right)\frac{\pi}{c}-\cos 2u(b-a)\frac{\pi}{c}}{c\left(2\sin\frac{ua\pi}{c}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2\sin\frac{ua\pi}{c}};$$

et partant:

$$28.\quad \frac{1}{c}\sum_{x=0}^{x=c} x\left(1+\cos 2(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots\ldots+\cos 2u(ax+b)\frac{\pi}{c}\ldots\ldots+\cos 2(c-1)(ax+b)\frac{\pi}{c}\right)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c-1}{2}+\dfrac{\sin 2\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2\sin\frac{a\pi}{c}}+\dfrac{\sin 4\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2\sin\frac{2a\pi}{c}}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad+\dfrac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2\sin\frac{ua\pi}{c}}\ldots\ldots+\dfrac{\sin 2(c-1)\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{2\sin(c-1)\frac{a\pi}{c}}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{c-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\frac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{ua\pi}{c}}=\alpha.$$

Cette formule très-simple donne pour α la plus petite valeur de x qui satisfasse à la congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. c), en nombres entiers et positifs: mais toutes les valeurs entières de x sont données par l'équation

$$29.\quad x=\frac{c-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\frac{\sin 2u\left(b-\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{c}}{\sin\frac{ua\pi}{c}}+cz,$$

dans laquelle z est un nombre entier quelconque.

Il faut observer ici que la congruence

$$ax+b\equiv 0\quad(\text{mod. } c),$$

équivaut à l'équation du premier degré à deux inconnues

$$ax+b=cy;$$

et que la formule (29.) donnera toutes les valeurs de x qui résolvent cette équation.

Soit proposé, par exemple, de résoudre en nombres entiers l'équation $3x+1=4y$; en la comparant à l'équation générale $ax+e=cy$, on aura $a=3$, $b=1$, $c=4$; et par conséquent

$$\alpha=\frac{4-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=4}\frac{\sin 2u\left(1-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{3u\pi}{4}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=4}\frac{\sin\frac{u\pi}{4}}{\sin\frac{3u\pi}{4}},$$

c'est à dire

$$\alpha=\frac{3}{2}-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{3\pi}{4}}-\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{2\sin\frac{6\pi}{4}}-\frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{2\sin\frac{9\pi}{4}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1;$$

et toutes les valeurs de x, qui résolvent l'équation $3x+1=4y$, seront données par l'équation $x=1+4z$, comme on le sait d'ailleurs.

La valeur de α peut en général se calculer à l'aide des tables trigonométriques. Il est vrai que par ce moyen on n'obtiendra, le plus souvent, que des valeurs fractionnaires approchées, mais comme par supposition x ne peut avoir que des valeurs entières, on en trouvera la valeur exacte en substituant à cette valeur approchée, le nombre entier le plus voisin.

On peut observer que puisqu'on a

$$\frac{\sin(2b-a)\frac{u\pi}{c}}{\sin\frac{au\pi}{c}} = \frac{\sin\frac{2bu\pi}{c}\cos\frac{au\pi}{c} - \cos\frac{2bu\pi}{c}\sin\frac{au\pi}{c}}{\sin\frac{au\pi}{c}}$$

$$= \sin\frac{2bu\pi}{c}\cot\frac{au\pi}{c} - \cos\frac{2bu\pi}{c};$$

et que d'ailleurs

$$\sum_{u=1}^{u=c}\cos\frac{2bu\pi}{c} = -1;$$

on pourra écrire

$$\alpha = \frac{c-1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{u=c}\sin\frac{2bu\pi}{c}\cot\frac{au\pi}{c} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(c + \sum_{u=1}^{u=c}\sin\frac{2bu\pi}{c}\cot\frac{au\pi}{a}\right);$$

et cette expression servira, aussi bien que la précédente, à résoudre la congruence proposée.

Il serait aisé d'appliquer ces principes aux conguences du premier degré à plusieurs inconnues: mais nous allons passer de préférence aux congruences du second degré: et à cet effet nous rappellerons quelques propriétés élémentaires des résidus quadratiques, que nons pourrions déduire de nos formules générales, mais dont nous omettons les démonstration à cause de leur simplicité.

1°. Si n est un nombre premier, en élevant successivement au carré tous les nombres 1, 2, 3 .... $n-1$; et divisant chaque carré par n, on aura $\frac{n-1}{2}$ restes différens (que M. Gauss a nommés résidus quadratiques de n) répétés chacun deux fois: et il restera, dans la série des nombres inférieurs à n, un nombre $\frac{n-1}{2}$ de non-résidus quadratiques.

2°. Si l'on fait $n=2p+1$, et que l'on représente par

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_u,\ \ldots\ldots\ a_p,$$

les p résidus quadratiques de n, et par

$$b_1, \; b_2, \; b_3, \; \ldots\ldots \; b_u, \; \ldots\ldots \; b_p,$$

les p non-résidus quadratiques, on aura les équations

$$\sum_{x=1}^{x=n} \cos\frac{2x^2\pi}{n} = 2\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n}; \quad \sum_{x=1}^{x=n} \sin\frac{2x^2\pi}{n} = 2\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_u\pi}{n};$$

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2a_u\pi}{n} + \cos 2\frac{b_u\pi}{n}\right) = \sum_{y=1}^{y=n} \cos\frac{2y\pi}{n}; \quad \sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2a_u\pi}{n} + \sin\frac{2b_u\pi}{n}\right) = \sum_{y=1}^{y=n} \sin\frac{2y\pi}{n}.$$

3°. En multipliant successivement un résidu quadratique quelconque a_r, par tous les autres, on aura la série

$$a_r a_1, \; a_r a_2, \; a_r a_3, \; \ldots\ldots \; a_r a_p,$$

qui fournira de nouveau, en divisant tous ses termes par n, p restes différens, qui seront tous les résidus quadratiques de n disposés dans un ordre quelconque; d'où l'on déduira

$$30. \quad \begin{cases} \sum_{x=1}^{x=n} \cos\frac{2a_r x^2\pi}{n} = 2\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_r a_u\pi}{n} = 2\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n}; \\ \sum_{x=1}^{x=n} \sin\frac{2a_r x^2\pi}{n} = 2\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_r a_u\pi}{n} = 2\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_u\pi}{n}. \end{cases}$$

4°. En multipliant le résidu quadratique a_r, successivement par tous les non-résidus quadratiques

$$b_1, \; b_2, \; b_3, \; \ldots\ldots \; b_u, \; \ldots\ldots \; b_p,$$

on aura de nouveau, après avoir divisé tous les produits par n, p restes différens, qui seront tous les non-résidus quadratiques de n, et on trouvera

$$31. \quad \begin{cases} \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_r b_u\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_u\pi}{n}; \\ \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_r b_u\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_u\pi}{n}. \end{cases}$$

5°. En multipliant le non-résidu quadratique b_r, successivement par tous les résidus quadratiques

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots\ldots \; a_u, \; \ldots\ldots \; a_p,$$

et divisant tous les produits par n, on aura pour restes tous les non-résidus quadratiques; et par conséquent on obtiendra

$$32. \quad \begin{cases} \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_r a_u\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_u\pi}{n}; \\ \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_r a_u\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_u\pi}{n}. \end{cases}$$

6°. Enfin en multipliant successivement un non-résidu quadratique quelconque b_r, par tous les non-résidus quadratiques

$$b_1, \; b_2, \; b_3, \; \ldots\ldots \; b_u, \; \ldots\ldots \; b_p,$$

on aura pour restes, après avoir divisé chaque produit par n, tous les résidus quadratiques, et partant on trouvera

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_r b_u\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_n\pi}{n};$$

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_r b_u\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}.$$

Maintenant si l'on représente par N le nombre des solutions entières et moindres que n, de la congruence

$$x^2+c\equiv 0 \quad (\text{mod. } n),$$

dans laquelle n est un nombre premier, on sait par ce que nous avons démontré précédemment, que N ne peut qu'être égale à zéro ou à 2, et en partant de la formule (24.), on trouvera

$$nN=\sum_{x=0}^{x=n}\left(1+\cos 2(x^2+c)\frac{\pi}{n}+\cos 4(x^2+c)\frac{\pi}{n}\ldots\ldots+\cos 2(n-1)(x^2+c)\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\sum_{x=0}^{x=n}\sum_{y=0}^{y=n}\cos 2y(x^2+c)\frac{\pi}{n}=n+\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2yc\pi}{n}+\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{y=1}^{y=n}\cos 2y(x^2+c)\frac{\pi}{n}$$

$$=n+\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2yc\pi}{n}+\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{y=1}^{y=n}\left(\cos\frac{2yx^2\pi}{n}\cos\frac{2yc\pi}{n}-\sin\frac{2yx^2\pi}{n}\sin\frac{2yc\pi}{n}\right).$$

Si l'on substitue dans cette formule les valeurs de

$$\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2yx^2\pi}{n}\cos\frac{2yc\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2a_u x^2\pi}{n}\cos\frac{2ca_u\pi}{n}+\cos\frac{2b_u x^2\pi}{n}\cos\frac{2cb_u\pi}{n}\right),$$

$$\sum_{y=1}^{y=n}\sin\frac{2yx^2\pi}{n}\sin\frac{2yc\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2a_u x^2\pi}{n}\sin\frac{2ca_u\pi}{n}+\sin\frac{2b_u x^2\pi}{n}\sin\frac{2cb_u\pi}{n}\right),$$

on obtiendra

$$nN=n+\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2yc\pi}{n}+\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\left\{\begin{matrix}\cos\frac{2a_u x^2\pi}{n}\cos\frac{2ca_u\pi}{n}+\cos\frac{2b_u x^2\pi}{n}\cos\frac{2cb_u\pi}{n}\\ -\sin\frac{2a_u x^2\pi}{n}\sin\frac{2ca_u\pi}{n}-\sin\frac{2b_u x^2\pi}{n}\sin\frac{2cb_u\pi}{n}\end{matrix}\right\};$$

ou bien, en séparant les intégrales,

$$nN=\left\{\begin{matrix}n+\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2yc\pi}{n}+\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2ca_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{x=n}\cos\frac{2a_u x^2\pi}{n}\right)+\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2b_u\pi}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\cos\frac{2b_u x^2\pi}{n}\right)\\ -\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2ca_u\pi}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sin\frac{2a_u x^2\pi}{n}\right)-\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2cb_n\pi}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sin\frac{2b_u x^2\pi}{n}\right)\end{matrix}\right\}$$

et cette équation, à l'aide des équations (30.), (31.), (32.), se transformera dans la suivante

3. $$nN=\left\{\begin{matrix}n+\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2cy\pi}{n}+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2ca_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2cb_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)\\ -2\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2ca_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)-2\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2cb_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Mais comme les quantités

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n},\quad \sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n},$$

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n},\quad \sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n},$$

qui sont des intégrales définies, deviennent indépendantes de u et égales à des constantes, on pourra les transporter en dehors de la première intégration dans l'équation (33.), et on aura

$$34.\quad nN = \begin{cases} n+\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2cy\pi}{n}+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}.\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2ca_u\pi}{n}+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}.\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2cb_u\pi}{n} \\ -2\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}.\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2ca_u\pi}{n}-2\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}.\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2cb_u\pi}{n}, \end{cases}$$

et cette équation devra exister en même tems que les suivantes

$$35.\quad \begin{cases} \sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2a_u\pi}{n}+\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)=\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2y\pi}{n}=\sum_{y=1}^{y=n}\cos\frac{2cy\pi}{n}=-1, \\ \sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\sin\frac{2a_u\pi}{n}+\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)=\sum_{y=1}^{y=n}\sin\frac{2y\pi}{n}=0. \end{cases}$$

A présent supposons $c=\pm1$; $n=4m+1$; et chacune des congruences

$$x^2+1\equiv 0\ (\text{mod. } n);\quad x^2-1\equiv 0\ (\text{mod. } n)$$

aura deux solutions: par conséquent N sera égale à 2, et l'équation (34.) se transformera dans la suivante

$$2n=\begin{cases} n-1+2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2+2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2 \\ \qquad\mp 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2\mp 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2 \end{cases}$$

d'où l'on tirera

$$\frac{n+1}{2}=\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2+\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2;$$

$$\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2+\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2=0;$$

et puisque, par les équations (35.), l'on a

$$\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2=\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+1\right)^2;$$

$$\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2=\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2;$$

on trouvera

$$n+1=4\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2+4\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+2;$$

et partant

$$n = \left(2\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n} + 1\right)^2;$$

d'où l'on déduira les équations

$$36.\quad \begin{cases} \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}; & \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_u\pi}{n} = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{n}; \\ \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_u\pi}{n} = 0; & \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_u\pi}{n} = 0. \end{cases}$$

Lorsque n est un nombre premier de la forme $4m+3$, si l'on fait $c = \pm 1$, la congruence $x^2 - 1 \equiv 0$ (mod. n) aura deux solutions, tandis que l'autre $x^2 + 1 \equiv 0$ (mod. n) ne sera pas résoluble; alors on aura les deux équations

$$2n = \begin{cases} n + 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2 \\ \quad + 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2 \end{cases};$$

$$0 = \begin{cases} n + 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2 \\ \quad - 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2 - 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2 \end{cases};$$

qui, étant combinées avec les équations (35.), donnent

$$37.\quad \begin{cases} \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2a_u\pi}{n} = -\frac{1}{2}; & \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2b_u\pi}{n} = -\frac{1}{2}; \\ \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2a_u\pi}{n} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{n}, & \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2b_u\pi}{n} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{n}. \end{cases}$$

Ces intégrales définies ont été données pour la première fois par M. Gauss dans ses Recherches Arithmétiques; et il les a trouvées en partant de sa théorie de la division du cercle en parties égales. Cet illustre géomètre a repris le même sujet dans un mémoire particulier, où il les a démontrées de nouveau. Mais les deux démonstrations de M. Gauss, qui sont les seules connues jusqu'ici, quoique tres-ingénieuses, nous paraissent moins directes que celle que nous venons d'exposer, qui se déduit tout simplement de la formule fondamentale (24.), avec beaucoup d'autres résultats. Cependant comme les équations (36.) et (37.) sont la base de tout ce que l'on sait sur les congruences du second degré, nous allons reprendre la démonstration que nous avons donnée, pour la rendre plus simple et plus claire.

On sait que lorsque $n=2p+1$ est un nombre premier de la forme $4m+1$, les congruences

$$x^2+1\equiv 0 \pmod{n},\quad x^2-1\equiv 0 \pmod{n},$$

seront résolubles toutes deux, et auront chacune deux solutions: alors par la formule (24.) on obtiendra l'équation

$$2n=\sum_{x=0}^{x=n}\left\{\begin{array}{l}\left(\cos\frac{0\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{0\pi}{n}\right)^{x^2\pm1}+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{x^2\pm1}\ldots\ldots\ldots\ldots\\+\left(\cos\frac{2t\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2t\pi}{n}\right)^{x^2\pm1}\ldots+\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)^{x^2\pm1}\end{array}\right\};$$

et par conséquent l'autre

$$2n=\left\{\begin{array}{l}\left(\cos\frac{0\pi}{n}\pm\sqrt{(-1)}\sin\frac{0\pi}{n}\right)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{0x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{0x^2\pi}{n}\right)\\+\left(\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{n}\right)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2x^2\pi}{n}\right)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\+\left(\cos\frac{2t\pi}{n}\pm\sqrt{(-1)}\sin\frac{2t\pi}{n}\right)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2tx^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2tx^2\pi}{n}\right)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\+\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\pm\sqrt{(-1)}\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2(n-1)x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2(n-1)x^2\pi}{n}\right).\end{array}\right.$$

Si l'on effectue les multiplications indiquées dans cette équation, en observant que les imaginaires doivent se détruire entre eux, on trouvera

$$2n=\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{0\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{0x^2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2x^2\pi}{n}\ldots+\cos\frac{2t\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2tx^2\pi}{n}\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2(n\cdot}{}\\\pm\left(\sin\frac{0\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{0x^2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{2x^2\pi}{n}\ldots+\sin\frac{2t\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{2tx^2\pi}{n}\ldots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{2(n-}{}\right.\end{array}\right.$$

et partant

$$38.\quad\left\{\begin{array}{l}2n=n+\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2x^2\pi}{n}\ldots+\cos\frac{2t\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2tx^2\pi}{n}\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2(n-1)x^2}{n}\\0=0+\sin\frac{2\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{2x^2\pi}{n}\ldots+\sin\frac{2t\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{2tx^2\pi}{n}\ldots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\sin\frac{2(n-1)x^2}{n}\end{array}\right.$$

Il faut observer ici que t doit prendre successivement toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$, dont la moitié sont des résidus quadratiques du nombre n et l'autre moitié des non-résidus quadratiques du même nombre: si l'on suppose donc t égal à un résidu quadratique quelconque r, on aura

$$\cos\frac{2t\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2tx^2\pi}{n} = \cos\frac{2a_r\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2a_rx^2\pi}{n}$$

$$= \cos\frac{2a_r\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2x^2\pi}{n} = \cos\frac{2a_r\pi}{n}\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right);$$

et l'on trouvera de même, lorsque t est un non-résidu quadratique égal à b_r,

$$\cos\frac{2b_r\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2b_rx^2\pi}{n} = \cos\frac{2b_r\pi}{n}\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right).$$

On voit pourtant que la valeur de

$$\cos\frac{2t\pi}{n}\sum_{x=0}^{x=n}\cos\frac{2tx^2\pi}{n},$$

ne saurait être que l'une de celles-ci:

$$\cos\frac{2a_r\pi}{n}\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right); \quad \cos\frac{2b_r\pi}{n}\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right);$$

selon que t est un résidu quadratique ou un non-résidu quadratique de n; et comme parmi les nombres 1, 2, 3, ... $n-1$, représentés par t, il y en a p qui sont résidus quadratiques de n, et autant qui ne le sont pas, on pourra les réunir en deux groupes dans les équations (38.), et on aura les équations

$$39. \quad \begin{cases} n = \begin{cases} \left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2a_1\pi}{n}+\cos\frac{2a_2\pi}{n}\dots+\cos\frac{2a_p\pi}{n}\right) \\ +\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2b_1\pi}{n}+\cos\frac{2b_2\pi}{n}\dots+\cos\frac{2b_p\pi}{n}\right) \end{cases} \\ 0 = \begin{cases} 2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2a_1\pi}{n}+\sin\frac{2a_2\pi}{n}\dots+\sin\frac{2a_p\pi}{n}\right) \\ +2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2b_1\pi}{n}+\sin\frac{2b_2\pi}{n}\dots+\sin\frac{2b_p\pi}{n}\right). \end{cases} \end{cases}$$

Mais comme l'on a

$$\cos\frac{2a_1\pi}{n}+\cos\frac{2a_2\pi}{n}\dots+\cos\frac{2a_p\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n};$$

$$\cos\frac{2b_1\pi}{n}+\cos\frac{2b_2\pi}{n}\dots+\cos\frac{2b_p\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n};$$

$$\sin\frac{2b_1\pi}{n}+\sin\frac{2a_2\pi}{n}\dots+\sin\frac{2a_p\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n};$$

$$\sin\frac{2b_1\pi}{n}+\sin\frac{2b_2\pi}{n}\dots+\sin\frac{2b_p\pi}{n} = \sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n};$$

les deux équations (39.) deviendront

$$n=\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n};$$

$$0=2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2+2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2;$$

et puisque l'on a aussi

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}=-1;\quad \sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}+\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}=0;$$

on trouvera, en éliminant entre les quatre équations précédentes:

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{n};\quad \sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}=-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{n};$$

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}=0.$$

Si n était de la forme $4m+3$, on aurait à la place des équations (38.), les deux autres

$$n=\begin{cases}\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\\ +2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2+2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2\end{cases}$$

$$0=\begin{cases}\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u x}{n}\\ -2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)^2-2\left(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)^2,\end{cases}$$

qui étant combinées avec les équations (35.) donneraient

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}=-\frac{1}{2};$$

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{n};\quad \sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}=\mp\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Ces dernières équations coïncident avec celles que nous avions trouvées précédemment.

Il résulte de l'analyse précédente, qu'étant proposée la congruence

$$x^2+c\equiv 0 \pmod{n},$$

(dans laquelle n est un nombre premier égal à $2p+1$), si l'on représente par N le nombre de ses solutions, on aura

$$nN=\begin{cases}n+\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2ca_u\pi}{n}+\left(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\right)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2cb_u\pi}{n}\\ -2\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}.\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2ca_u\pi}{n}-2\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}.\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2cb_u\pi}{n}.\end{cases}$$

Mais comme, lorsque n est de la forme $4m+1$, on a

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}=\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}=0,$$

on trouvera, dans ce cas,

$$N=1+\frac{1}{n}\Big(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}\Big)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2ca_u\pi}{n}+\frac{1}{n}\Big(1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}\Big)\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2cb_u\pi}{n};$$

et la valeur de N restera la même quand on changera $+c$ en $-c$. Donc si la congruence

$$x^2+c\equiv 0 \pmod{n},$$

(dans laquelle n est un nombre premier de la forme $4m+1$) est résoluble, celle-ci

$$y^2-c\equiv 0 \pmod{n}$$

le sera de même; et si l'une d'elles n'est pas résoluble, l'autre ne le sera pas non plus.

Si $n=2p+1$, est un nombre premier de la forme $4m+3$, on aura

$$1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}=1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}=0;$$

et le nombre N des solutions de la congruence

$$x^2+c\equiv 0 \pmod{n}$$

sera donné par l'équation

40. $$nN=n-2\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2ca_u\pi}{n}-2\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2cb_u\pi}{n};$$

qui se réduira, lorsque c est un résidu quadratique de n, à l'autre

$$nN=n-2\Big(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\Big)^2-2\Big(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\Big)^2=n-\frac{n}{2}-\frac{n}{2}=0.$$

Si l'on change $+c$ en $-c$ dans l'équation (40.), on trouvera que le nombre N des solutions de la congruence

$$y^2-c\equiv 0 \pmod{p},$$

sera exprimé, lorsque c est un résidu quadratique de n, par l'équation

$$nN=n+2\Big(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\Big)^2+2\Big(\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\Big)^2=n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=2n.$$

On déduit de là, que lorsque n est un nombre premier de la forme $4m+3$, l'une des deux congruences

$$x^2+c\equiv 0 \pmod{n};\quad y^2-c\equiv 0 \pmod{n}$$

sera toujours résoluble, mais qu'on ne pourra jamais les résoudre toutes deux à la fois.

En partant des équations (36.) et (37.), on trouve, qu'en indiquant toujours par a_r un résidu quadratique quelconque du nombre premier $n=2p+1$, et par b_r un non-résidu quadratique quelconque du même nombre, on aura, lorsque n est de la forme $4m+1$,

$$\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2a_r x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_r x^2\pi}{n}\right)=1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+2\sqrt{(-1)}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}$$
$$=1+2\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=\pm\sqrt{n};$$

$$\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2b_r x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_r x^2\pi}{n}\right)=1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}+2\sqrt{(-1)}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}$$
$$=1+2\left(-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=\mp\sqrt{n};$$

tandis que lorsque n est de la forme $4m+3$, on trouvera

$$\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2a_r x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_r x^2\pi}{n}\right)=1+2\sum_{u=1}^{v=p+1}\cos\frac{2a_u\pi}{n}+2\sqrt{(-1)}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2a_u\pi}{n}$$
$$=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{(-1)}\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=\pm\sqrt{(-n)};$$

$$\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2b_r x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_r x^2\pi}{n}\right)=1+2\sum_{u=1}^{u=p+1}\cos\frac{2b_u\pi}{n}+2\sqrt{(-1)}\sum_{u=1}^{u=p+1}\sin\frac{2b_u\pi}{n}$$
$$=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{(-1)}\left(\mp\frac{1}{2}\sqrt{n}\right)=\mp\sqrt{(-n)};$$

de sorte que l'on obtiendra en général les équations

$$\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2a_r x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_r x^2\pi}{n}\right)=\pm\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)};$$
$$\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2b_r x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_r x^2\pi}{n}\right)=\mp\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}.$$

Maintenant soit proposé de trouver le nombre N des solutions entières et moindres que n, de la congruence

$$x^2+ay^2+b\equiv 0 \pmod{n},$$

dans laquelle n est un nombre premier, et a, b, sont des nombres entiers non divisibles par n; il est clair que par la formule (24.) on obtiendra l'équation

$$N=\sum_{x=0}^{x=n}\sum_{y=0}^{y=n}\left(1+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{x^2+ay^2+b}\dots+\left(\cos 2(n-1)\frac{\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin 2(n-1)\frac{\pi}{n}\right)^{x^2+}\right.$$
$$+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2b\pi}{n}\Big)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2x^2\pi}{n}\right)\sum_{y=0}^{y=n}\left(\cos\frac{2ay^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2ay^2\pi}{n}\right)$$
$$+\sqrt{(-1)}\sin\frac{4b\pi}{n}\Big)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{4x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{4x^2\pi}{n}\right)\sum_{y=0}^{y=n}\left(\cos\frac{4ay^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{4ay^2\pi}{n}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{b\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin 2(n-1)\frac{b\pi}{n}\Big)\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos 2(n-1)\frac{x^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin 2(n-1)\frac{x^2\pi}{n}\right)\sum_{y=0}^{y=n}\left(\cos 2(n-1)\frac{ay^2\pi}{n}+\sqrt{\right.$$

et la valeur de N dépendra des nombres a et b.

Supposons d'abord que a et b soient tous les deux des résidus quadratiques de n, et nous aurons, en substituant dans l'équation précédente les valeurs déjà trouvées,

$$nN = \left\{ \begin{array}{l} n^2 + \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right)\left(\pm\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right)\left(\pm\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right) \\ \quad + \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right)\left(\mp\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right)\left(\mp\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)}\right) \end{array} \right\}$$

$$= n^2 - n(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Lorsque a et b sont tous les deux non-résidus quadratiques de n, on obtiendra

$$nN = n^2 + n(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Lorsque a est un résidu quadratique de n, et b un non-résidu quadratique du même nombre, on aura

$$nN = n^2 - n(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Et enfin lorsque a est un non-résidu quadratique de n, et b un résidu quadratique du même nombre, on trouvera

$$nN = n^2 + n(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Il résulte de là, que la congruence

$$x^2 + ay^2 + b \equiv 0 \pmod{n},$$

dans laquelle n est un nombre premier, aura toujours un nombre $n \pm 1$ de solutions.

Lagrange a démontré pour la première fois que la congruence

$$x^2 + ay^2 + b \equiv 0 \pmod{n},$$

était toujours résoluble, lorsque le nombre premier n ne divisait ni a ni b. Cet illustre géomètre est parti de ce théorème pour démontrer qu'un nombre entier quelconque est toujours la somme de quatre carrés en nombres entiers: mais sa méthode ne saurait servir à déterminer le nombre des solutions de la congruence proposée, comme nous l'avons fait en partant de notre formule fondamentale (24.). Il est clair que l'on pourrait appliquer les mêmes principes aux congruences du second degré, qui renferment un plus grand nombre d'inconnues. Mais nous allons nous occuper de préférence de la résolution des équations à deux termes.

On a vu que lorsque $n = 2p + 1$ est un nombre premier de la forme $4m + 1$, on trouve

$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2t^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2t^2\pi}{n}\right)^{a_u} = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{n};$$
$$\sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2t^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2t^2\pi}{n}\right)^{b_u} = -\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n};$$

en indiquant toujours par a_u un résidu quadratique quelconque de n, par b_u un non-résidu quadratique de n, et par t un nombre entier non divisible par n. Si l'on fait maintenant

$$\cos\frac{2t^2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2t^2\pi}{n} = r^{t^2},$$

r exprimant la racine

$$x = \cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{n}$$

de l'équation

$$X = \frac{x^n-1}{x-1} = 0,$$

on aura, par ce qui précède:

41. $X_1 = x^{a_1}+x^{a_2}\ldots\ldots+x^{a_p}+\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n}=0;$

et cette équation, qui sera satisfaite par la valeur $x=r$, le sera aussi par toutes les autres valeurs

$$x = r^{2^2};\quad x = r^{3^2};\ldots\ldots x = r^{(n-1)^2};$$

dont le nombre se réduira à la moitié, puisque $r^{e^2}=r^{(n-e)^2}$. Mais comme ces racines résolvent l'équation $X=0$, elles seront communes aux deux équations $X=0$, $X_1=0$. Les autres racines qui résolvent l'équation $X=0$, sans résoudre l'équation $X_1=0$, seront de la forme

$$x = r^{b_1};\quad x = r^{b_2};\ldots\ldots x = r^{b_p},$$

et ne pourront pas résoudre l'équation $X_1=0$; car si l'une d'elles, r^{b_1} par exemple, pouvait résoudre cette équation, comme on a toujours

$$r^{b_1 a_u} = r^{b_t},$$

en substituant cette racine supposée $x=r^{b_t}$, dans l'équation $X_1=0$, elle deviendrait de la forme

$$r^{b_1}+r^{b_2}\ldots\ldots+r^{b_p}+\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n}=0;$$

mais cette équation est absurde, puisque l'on a

$$r^{b_1}+r^{b_2}\ldots\ldots+r^{b_p}+\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{n}=0.$$

Donc les deux équations $X=0$, $X_1=0$, auront les p racines communes

$$r^{a_1},\ r^{a_2},\ \ldots\ldots r^{a_p};$$

et en cherchant le plus grand commun diviseur Δ entre X et X_1, on aura

l'équation $\Delta = 0$, qui sera du degré $\frac{n-1}{2}$, et qui contiendra toutes les racines de la forme $x = r^{a_t}$.

Si $n = 2p + 1$ était de la forme $4m + 3$, au lieu de l'équation (41.) on aurait trouvé l'autre

$$X_2 = x^{a_1} + x^{a_2} \ldots . x^{a_p} + \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(-n)} = 0;$$

et en cherchant le plus grand diviseur commun entre

$$\text{X} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0, \quad \text{et } \text{X}_2 = 0,$$

on obtiendrait l'équation qui a p racines de la forme

$$x = r^{a_1}, \quad x = r^{a_2}, \ldots . x = r^{a_p},$$

et l'équation $\text{X} = 0$ serait encore décomposée en deux autres du degré $\frac{n-1}{2}$.

Il faut remarquer ici que lorsque n est un nombre premier de la forme $4m + 1$, les coefficiens des diverses puissances de x dans l'équation $\Delta = 0$, sont des fonctions de $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$ en général, tandis que les coefficiens des puissances correspondantes dans l'équation $\frac{\text{X}}{\Delta} = \Delta_1 = 0$, sont des fonctions semblables de $-\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{n}$. En effet, si l'on fait

$$\Delta = x^p + A_1 x^{p-1} \ldots . + A_p = 0;$$
$$\Delta_1 = x^p + B_1 x^{p-1} \ldots . + B_p = 0;$$

les coefficiens $A_1, A_2, \ldots . A_p$, pourront s'exprimer exclusivement par la somme des puissances des racines de l'équation $\Delta = 0$, somme que nous indiquerons en général par P_s; et les coefficiens $B_1, B_2, \ldots . B_p$, s'exprimeront de la même manière par la somme des puissances des racines de l'équation $\Delta_1 = 0$, somme que nous indiquerons en général par P_r; et comme, lorsque r n'est pas un multiple de n, on a toujours

$$P_r = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}; \quad P_r + \text{P}_r = -1; \quad \text{P}_r = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

il n'y aura d'autre différence entre P_r et P_r, que dans le signe de $\frac{1}{2}\sqrt{n}$; par conséquent si l'on désigne par Y la somme de tous les termes de l'équation $\Delta = 0$, qui ne contiennent pas $\sqrt{n}$, et par $Z\sqrt{n}$ la somme de tous ceux qui contiennent $\sqrt{n}$, on aura

$$\Delta = Y + Z\sqrt{n}; \quad \Delta_1 = Y - Z\sqrt{n};$$

et partant

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \Delta\Delta_1 = Y^2 - nZ^2.$$

Si n était de la forme $4m+3$, on trouverait

$$X = Y^2 + nZ^2;$$

et en général on obtiendra

$$X = Y^2 - nZ^2(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

n étant un nombre premier quelconque, et Y, Z, étant des fonctions entières et rationnelles de x. On trouvera aisément, par la comparaison des coefficiens dans l'équation

$$\triangle\triangle_1 = \frac{x^n-1}{x-1},$$

que les coefficiens numériques des diverses puissances de x dans les équations $\triangle = 0$, $\triangle_1 = 0$, ne peuvent admettre d'autre diviseur que le nombre 2; et l'on déduira de là que l'équation

$$\frac{4(x^n-1)}{x-1} = Y^2 \pm nZ^2$$

(dans laquelle Y et Z sont deux polynomes en x entiers et rationnels, à coefficiens entiers) aura toujours lieu.

Pour donner une application de ce théorème à la théorie des congruences, nous observerons que puisque la congruence

$$x^a - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

a toujours a solutions, lorsque n est un nombre premier de la forme $ar+1$; et puisque, si a est un nombre premier impair on a aussi

$$4(x^a-1) = (x-1)(Y^2 \pm aZ^2),$$

il s'ensuit que $\mp a$ est résidu quadratique de $ar+1$, où il faut prendre le signe $\pm$, si a est de la forme $4m+1$, et le signe $-$, si a est de la forme $4m+3$. On déduit aussi de ce qui précède que lorsque a est un nombre premier, on peut toujours résoudre l'équation

$$(4a)^s = x^2 \pm ay^2$$

en nombres entiers, quel que soit l'exposant s, pourvu qu'il reste toujours entier et positif, dans laquelle il faut prendre le signe $+$, si a est de la forme $4m+3$, et le signe $-$, lorsque a est de la forme $4m+1$. On trouve de même que l'équation

$$5^a = x^2 \pm ay^2 + 1$$

est toujours résoluble en nombres entiers, lorsque a est un nombre premier quelconque; et il serait facile de trouver un grand nombre de propositions de la même nature.

$$A = \sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos\frac{2x^2\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2x^2\pi}{n}\right) = \pm\sqrt{\left(n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\right)},$$

trouvée précédemment, on n'a pas déterminé le signe du radical; cependant en observant que l'on a

$$A = (2\sqrt{(-1)})^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{6\pi}{n}\sin\frac{10\pi}{n}\ldots\ldots\sin 2(n-2)\frac{\pi}{n},$$

et en cherchant combien de sinus positifs et de sinus négatifs il y aura dans le second membre de cette équation, on trouvera que, quelle que soit la forme du nombre premier n, il faut toujours prendre le radical avec le signe $+$ dans la valeur de A. Maintenant en faisant $n = 2p+1$, et en exprimant toujours par a_u un résidu quadratique quelconque du nombre premier n, et par b_u un non-résidu quadratique du même nombre, on aura les deux équations

42. $$\begin{cases} \sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2a_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\pm n)}; \\ \sum_{u=1}^{u=p+1}\left(\cos\frac{2b_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\pm n)}; \end{cases}$$

dans les seconds membres desquelles il faut prendre le signe $+$, lorsque $n = 4m+1$, et le signe $-$, lorsque $n = 4m+3$.

Dans l'équation

$$\frac{4(x^n-1)}{x-1} = Y^2 \pm nZ^2$$

il y a plusieurs manières de trouver les coefficiens de x dans les polynomes Y et Z; et ce manières sont tout à fait indépendantes, comme l'on sait, de la considération des résidus quadratiques. Maintenant, parmi les deux équations

$$Y + Z\sqrt{(\pm n)} = 0; \quad Y - Z\sqrt{(\pm n)} = 0,$$

que nous avons déjà trouvées, il y en a toujours une qui a toutes ses racines de la forme

$$x = \cos\frac{2a_r\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_r\pi}{n},$$

en prenant pour a_r successivement tous les résidus quadratiques de n; tandis que l'autre de ces deux équations aura ses racines de la forme

$$x = \cos\frac{2b_r\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_r\pi}{n},$$

en prenant successivement pour b_r tous les non-résidus quadratiques de n.

Il résulte de là une méthode directe pour savoir si un nombre quelconque est résidu quadratique, ou non-résidu quadratique d'un nombre premier donné.

En effet si l'on ordonne l'équation

$$\tfrac{1}{2}Y + \tfrac{1}{2}Z\sqrt{n} = 0,$$

par les puissances descendantes de x, on pourra, par les formules connues, trouver la somme des puissances de ses racines; alors en appellant P_a la somme des puissances a^{mes} des racines de cette équation, on aura en général $P_a = P_1$, si a est un résidu quadratique de n, et $P_a = 1 - P_1$ dans le cas contraire.

On doit remarquer ici que comme les coefficiens de x, dans les polynomes Y et Z, se déterminent d'après la forme de n, et non d'après sa valeur numérique, on pourra transporter à tous les nombres premiers d'une forme donnée, les théorèmes qu'on aura trouvés par induction pour des petits nombres. Cette proposition, qui est de la plus haute importance, mériterait de longs développemens que nous réservons pour un travail particulier. On en peut déduire des conséquences fort singulières sur la manière de vérifier les *résultats de l'observation dans l'analyse pure*, en suivant la route tracée par Euler dans cette branche de l'algèbre, route qui a été quittée trop tôt par les géomètres. On pourrait tirer aussi de là la démonstration de la loi de réciprocité énoncée d'abord par M. Legendre; mais comme M. Gaus a déjà donné cette démonstration, en partant des équations (42.), nous ne nous arrêterons pas plus long temps sur ce sujet, puisque ce qui précède renferme toute la théorie des congruences du second degré, déduite de la seule équation fondamentale (24.). Mais en partant de cette même équation nous allons reprendre la résolution générale des équations à deux termes: en commençant par énoncer quelques propositions sur les résidus de tous les degrés, dont nous omettons les démonstrations qui sont très faciles à retrouver.

(La suite dans le cahier prochain.)

15.

Observatio arithmetica de numero classium divisorum quadraticorum formae $yy+Azz$, designante A numerum primum formae $4n+3$.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. math. Regiom.)

Notum est, divisores numerorum, qui forma $yy+Azz$ continentur, sub formis quadraticis exhiberi posse $ayy+byz+czz$, in quibus $4ac-bb=A$, quoties b impar, sive $ac-\frac{bb}{4}=A$, quoties b par, easque formas semper revocari posse ad tales, in quibus b ipsis a et c minor est, quae formae *reductae* vocantur; formas reductas autem alias in alias transformari non posse. Unde formas omnes $ayy+byz+czz$, quas divisores numeri $yy+Azz$ induere possunt, in varias classes discerpere licet, ita ut quaevis classis omnes amplectatur formas, quae in eandem *reductam* transformari possunt; quarum igitur classium idem est numerus atque formarum reductarum.

Statuamus A esse numerum primum formae $4n+3$, inveni legem singularem, per quam classium illarum sive formarum reductarum numerum exprimere licet. Definimus autem eo casu formas reductas ita, ut pro n pari statuatur b impar, pro n impari sit b par, uti a Cl. Legendre factum est in tab. V. *Theoriae numerorum*. Sit enim P summa residuorum quadraticorum numeri primi A, Q summa non-residuorum, ipsis residuis et non-residuis in numeris minimis positivis exhibitis; inveni numerum illum, quem per N denotemus, dari per formulam:

$$2N-1=\frac{Q-P}{A}.$$

Sit e. g. $A=23$, erunt formae reductae (Leg. *Téorie des nombres, Tab.* V.):

$$yy+23zz, \quad 3yy+2yz+8zz,$$

ideoque $N=2$; fit porro

$$P = 1+2+3+4+6+8+9+12+13+16+18 = 92,$$
$$Q = 5+7+10+11+14+15+17+19+20+21+22 = 161,$$

ideoque

$$2N-1=\frac{161-92}{23}=3,$$

uti fieri debet.

Eorum in usum, qui theorema antecedens exemplis probare volunt, adjungam e tabula V. *Theoriae numerorum* Cl. Legendre formas reductas pro numeris primis formae $4n+3$ usque ad 103.

A	N		A	N	
7	1	$yy+7zz$	67	1	$yy+yz+17zz$
11	1	$yy+yz+3zz$	71	4	$yy+71zz$
19	1	$yy+yz+5zz$			$3yy+2yz+24zz$
23	2	$yy+23zz$			$9yy+2yz+8zz$
		$3yy+2yz+8zz$			$5yy+4yz+15zz$
31	2	$yy+31zz$	79	3	$yy+79zz$
		$5yy+4yz+7zz$			$5yy+2yz+16zz$
43	1	$yy+yz+11zz$			$11yy+6yz+8zz$
47	3	$yy+47zz$	83	2	$yy+yz+21zz$
		$3yy+2yz+16zz$			$3yy+yz+7zz$
		$7yy+6yz+8zz$	103	3	$yy+103zz$
59	2	$yy+yz+15zz$			$13yy+2yz+8zz$
		$3yy+yz+5zz$			$7yy+6yz+16zz$.

Nec non addam tabulam pro residuis quadraticis numeri primi A, inde ab $A=19$ usque ad $A=103$; moduli A in facie positi; in margine sunt residui in valoribus minimis exhibiti, quorum signum + aut — in tabula appositum est.

	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83	103
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	—	+	+	—	+	—	—	+	+	—	+
3	—	+	—	—	+	+	—	+	—	+	—
4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	—	+	—	—	+	—	+	+	—	—
6	+	+	—	+	+	—	+	+	—	—	—
7	+	—	+	—	+	+	—	—	—	+	+
8	—	+	+	—	+	—	—	+	+	—	+
9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
10	.	—	+	+	—	—	+	+	+	+	—
11	.	—	—	+	—	—	—	—	+	+	—
12	.	.	—	—	+	+	—	+	—	+	—
13	.	.	—	+	—	—	—	—	+	—	+
14	.	.	+	+	+	—	+	—	—	—	+
15	.	.	—	+	—	+	+	+	—	—	+
16	.	.	.	+	+	+	+	+	+	+	+
17	.	.	.	+	+	+	+	—	—	+	+

	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83	103
18	.	.	.	—	+	—	—	+	+	—	+
19	.	.	.	—	—	+	+	+	+	—	+
20	.	.	.	—	—	+	—	+	+	—	—
21	.	.	.	+	+	+	+	—	+	+	—
22	.	.	.	.	—	+	+	—	+	—	—
23	.	.	.	.	—	—	+	—	+	+	+
24	.	.	.	.	.	—	+	+	—	—	—
25	.	.	.	.	.	+	+	+	+	+	+
26	.	.	.	.	.	+	+	—	+	+	+
27	.	.	.	.	.	+	—	+	—	+	—
28	.	.	.	.	.	+	—	—	—	+	+
29	.	.	.	.	.	+	+	+	—	+	+
30	.	.	.	.	.	.	—	+	—	+	+
31			.	.	.	.	—	—	+	+	—
32	.	.	.	.	.	.	—	+	+	—	+
33	.	.	.	.	.	.	+	—	—	+	+
34	.	.	.	.	.	.	.	—	—	—	+

	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83	103
35	.	.	.	.	.	.	.	—	—	—	—
36	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+
37	.	.	.	.	.	.	.	.	—	+	—
38	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+	+
39	.	.	.	.	.	.	.	.	—	—	—
40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	—
41	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+	+
42	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
43	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
44	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
46	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
47	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
48	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—
49	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+
51	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—

Ut invenias numerum P, quae est summa residuorum quadraticorum numeri primi A, in valoribus minimis positivis exhibitorum, pro quolibet A primum summandi sunt numeri in serie verticali positi usque ad $\frac{A-1}{2}$, singulis tributis signis $+$ aut $-$, quae in tabula apposita sunt; sit ea summa SA; sit deinde numerus residuorum, quae signum habent negativum, m; patet, fore

$$P = A[m+S];$$

nam ut residua minima signo negativo affecta valores minimos positivos obtineant, singulis addendus est A.

Fit porro $P+Q$ aequale summae numerorum usque ad $A-1$, sive

$$P+Q = A\frac{(A-1)}{2},$$

unde

$$2N-1 = \frac{A-1}{2} - 2(m+S),$$

sive posito $A = 4n+3$:

$$N = n+1-m-S.$$

Observo, numerum $n+1-S$ semper parem esse. Sit enim summa residuorum, quae signum habent negativum, $-T$, erit $AS+2T$ aequale summae numerorum usque ad $\frac{A-1}{2}$, sive

$$(4n+3)S+2T = \frac{(A-1)(A+1)}{8} = (2n+1)(n+1),$$

unde videmus, numeros S et $n+1$ simul aut pares aut impares esse, quod probari debuit. Unde etiam, cum sit $N+m = n+1-S$, facile patet, ipsos m, N simul aut pares aut impares esse. Quod exemplis facile probatur; valores enim ipsorum N, m erunt, ut e tabulis antecedentibus patet:

A	7.	11.	19.	23.	31.	43.	47.	59.	67.	71.	79.	83.	103.
m	1.	1.	3.	4.	6.	9.	9.	10.	15.	14.	17.	16.	23.
N	1.	1.	1.	2.	2.	1.	3.	2.	1.	4.	3.	2.	3.

Numerum N etiam pro numeris primis A satis magnis sine negotio computari, notum est. Quoties enim n par, ponuntur pro b numeri omnes impares $< \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)}$, quoties n impar, ponuntur pro b numeri omnes pares $< \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)}$; et pro singulis b discerpitur aut $\frac{A+bb}{4}$ aut $A+\frac{bb}{4}$ in factores a, c, e quibus ii tantum eliguntur, qui ipso b non minores sunt; quo facto N erit numerus valorum, qui ipsis a, b, c conveniunt, casibus non numeratis, qui e commutatione ipsorum a, c proveniunt.

Per computationem numeri N obtines solutionem problematis eleganti, a Cl. Lejeune-Dirichlet olim in hoc *Diario propositi* (Vol. III. p. 407.), videlicet determinandi casus, quibus productum $1.2.3.4\ldots.\left(\frac{A-1}{2}\right)$, per A divisum, relinquat $+1$ aut -1 residuum. Alterum notum est fieri, quoties numerus residuorum quadraticorum minimorum ipsius A, quae signo negativo affecta sunt, est par; alterum, quo idem numerus impar est; sive reiectis multiplis numeri primi A, est:

$$1.2.3.4\ldots\ldots\left(\frac{A-1}{2}\right) = (-1)^m.$$

Unde etiam e lege antecedentibus proposita, reiectis multiplis ipsius A, fit

$$1.2.3.4\ldots\ldots\left(\frac{A-1}{2}\right) = (-1)^N.$$

Regiom. 13. Julii 1823.

P. S. In exemplis antecedentibus omissus est valor $A = 3$, quippe qui est exceptionis casus.

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,500	1,653 3487 66	4341 87	1,653 2415 73	4344 02	9,999 8828 07	2 15
4,501	1,653 7829 53	4341 88	1,653 6759 75	4344 01	9,999 8930 22	2 13
02	54 2171 41	4341 88	54 1103 76	4344 02	8932 35	2 14
03	54 6513 29	4341 88	54 5447 78	4344 01	8934 49	2 13
04	55 0855 17	4341 88	54 9791 79	4344 00	8936 62	2 13
05	55 5197 05	4341 88	55 4135 79	4344 01	8938 74	2 13
4,506	1,655 9538 93	4341 89	1,655 8479 80	4344 00	9,999 8940 87	2 11
07	56 3880 82	4341 89	56 2823 80	4344 00	8942 98	2 11
08	56 8222 71	4341 89	56 7167 80	4344 00	8945 09	2 11
09	57 2564 60	4341 89	57 1511 80	4344 00	8947 20	2 11
10	57 6906 49	4341 90	57 5855 80	4344 00	8949 31	2 11
4,511	1,658 1246 39	4341 90	1,658 0199 80	4343 99	9,999 8951 41	2 10
12	58 5590 28	4341 90	58 4543 79	4343 99	8953 51	2 09
13	58 9932 18	4341 90	58 8887 78	4343 99	8955 60	2 08
14	59 4274 09	4341 90	59 3231 77	4343 98	8957 68	2 08
15	59 8615 99	4341 91	59 7575 75	4343 99	8959 76	2 08
4,516	1,660 2957 90	4341 91	1,660 1919 74	4343 98	9,999 8961 84	2 08
17	60 7299 80	4341 91	60 6263 72	4343 98	8963 92	2 07
18	61 1641 71	4341 91	61 0607 70	4343 97	8965 99	2 06
19	61 5983 63	4341 91	61 4951 67	4343 98	8968 05	2 06
20	62 0325 54	4341 92	61 9295 65	4343 97	8970 11	2 05
4,521	1,662 4667 46	4341 92	1,662 3639 62	4343 97	9,999 8972 16	2 05
22	62 9009 38	4341 92	62 7983 59	4343 97	8974 21	2 05
23	63 3351 30	4341 92	63 2327 56	4343 97	8976 26	2 05
24	63 7693 22	4341 92	63 6671 53	4343 97	8978 31	2 05
25	64 2035 14	4341 92	64 1015 50	4343 96	8980 36	2 03
4,526	1,664 6377 07	4341 93	1,664 5359 46	4343 96	9,999 8982 39	2 03
27	65 0719 00	4341 93	64 9703 42	4343 96	8984 42	2 03
28	65 5060 93	4341 93	65 4047 38	4343 96	8986 45	2 03
29	65 9402 86	4341 93	65 8391 34	4343 96	8988 48	2 03
30	66 3744 79	4341 93	66 2735 30	4343 95	8990 51	2 01
4,531	1,666 8086 73	4341 94	1,666 7079 25	4343 96	9,999 8992 52	2 01
32	67 2428 67	4341 94	67 1423 20	4343 95	8994 53	2 01
33	67 6770 61	4341 94	67 5767 15	4343 95	8996 54	2 01
34	68 1112 55	4341 94	68 0111 10	4343 94	8998 55	2 00
35	68 5454 49	4341 95	68 4455 04	4343 95	9000 65	2 00
4,536	1,668 9796 44	4341 95	1,668 8798 99	4343 94	9,999 9002 55	1 99
37	69 4138 39	4341 95	69 3142 93	4343 94	9004 54	1 99
38	69 8480 34	4341 95	69 7486 87	4343 93	9006 53	1 98
39	70 2822 29	4341 96	70 1830 80	4343 94	9008 51	1 98
40	70 7164 25	4341 96	70 6174 74	4343 93	9010 49	1 97
4,541	1,671 1506 21	4341 96	1,671 0518 67	4343 93	9,999 9012 46	1 97
42	71 5848 17	4341 96	71 4862 60	4343 93	9014 43	1 97
43	72 0190 13	4341 96	71 9206 53	4343 93	9016 40	1 97
44	72 4532 09	4341 97	72 3550 46	4343 92	9018 37	1 97
45	72 8874 05	4341 97	72 7894 38	4343 93	9020 33	1 96
4,546	1,673 3216 02	4341 97	1,673 2238 31	4343 92	9,999 9022 29	1 95
47	73 7557 99	4341 97	73 6582 23	4343 92	9024 24	1 95
48	74 1899 96	4341 97	74 0926 15	4343 92	9026 19	1 95
49	74 6241 93	4341 97	74 5270 07	4343 91	9028 14	1 93
50	75 0583 91		74 9613 98		9030 07	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,550	1,675 0583 91	4341 98	1,674 9613 98	4343 91	9,9999 030 07	1 95
4,551	1,675 4925 88	4341 98	1,675 3957 90	4343 91	9,9999 032 02	1 93
52	75 9267 86	4341 98	75 8301 81	4343 91	033 96	1 93
53	76 3609 84	4341 98	76 2645 72	4343 91	035 88	1 93
54	76 7951 82	4341 98	76 6989 63	4343 90	037 81	1 92
55	77 2293 81	4341 98	77 1333 53	4343 91	039 73	1 92
4,556	1,677 6635 79	4341 99	1,677 5677 44	4343 90	9,9999 041 65	1 91
57	78 0977 78	4341 99	78 0021 34	4343 90	043 56	1 91
58	78 5319 77	4341 99	78 4365 24	4343 90	045 47	1 91
59	78 9661 76	4341 99	78 8709 14	4343 90	047 38	1 91
60	79 4003 75	4342 00	79 3053 04	4343 90	049 29	1 90
4,561	1,679 8345 74	4342 00	1,679 7396 93	4343 80	9,9999 051 19	1 89
62	80 2687 74	4342 00	80 1740 82	4343 89	053 08	1 89
63	80 7029 74	4342 00	80 6084 71	4343 89	054 97	1 89
64	81 1371 74	4342 00	81 0428 60	4343 89	056 86	1 88
65	81 5713 75	4342 00	81 4772 49	4343 89	058 74	1 88
4,566	1,682 0065 75	4342 01	1,681 9116 37	4343 89	9,9999 060 62	1 88
67	82 4397 76	4342 01	82 3460 26	4343 89	062 50	1 87
68	82 8739 77	4342 01	82 7804 14	4343 88	064 37	1 87
69	83 3081 78	4342 01	83 2148 02	4343 88	066 24	1 87
70	83 7423 79	4342 01	83 6491 90	4343 87	068 11	1 86
4,571	1,684 1765 80	4342 02	1,684 0835 77	4343 88	9,9999 069 97	1 86
72	84 6107 82	4342 02	84 5179 65	4343 87	071 83	1 85
73	85 0449 84	4342 02	84 9523 52	4343 87	073 68	1 85
74	85 4791 86	4342 02	85 3867 39	4343 87	075 53	1 85
75	85 9133 88	4342 02	85 8211 26	4343 87	077 38	1 85
4,576	1,686 3475 90	4342 02	1,686 2555 13	4343 86	9,9999 079 23	1 84
77	86 7817 92	4342 03	86 6898 99	4343 86	081 07	1 83
78	87 2159 95	4342 03	87 1242 85	4343 87	082 90	1 84
79	87 6501 98	4342 03	87 5586 72	4343 85	084 74	1 82
80	88 0844 01	4342 03	87 9930 57	4343 86	086 56	1 83
4,581	1,688 5186 04	4342 04	1,688 4274 43	4343 86	9,9999 088 39	1 82
82	88 9528 08	4342 04	88 8618 29	4343 85	090 21	1 82
83	89 3870 11	4342 04	89 2962 14	4343 85	092 03	1 81
84	89 8212 15	4342 04	89 7305 99	4343 85	093 84	1 81
85	90 2554 19	4342 04	90 1649 84	4343 85	095 65	1 81
4,586	1,690 6899 23	4342 04	1,690 5993 69	4343 84	9,9999 097 46	1 80
87	91 1238 28	4342 06	91 0337 53	4343 85	099 26	1 80
88	91 5580 32	4342 05	91 4681 38	4343 84	101 06	1 7
89	91 9922 37	4342 05	91 9025 22	4343 84	102 85	1 7
90	92 4264 42	4342 05	92 3369 06	4343 84	104 64	1
4,591	1,692 8606 47	4342 05	1,692 7712 90	4343 84	9,9999 106 43	1
92	93 2948 52	4342 05	93 2056 74	4343 83	108 22	1
93	93 7290 57	4342 06	93 6400 57	4343 84	110 00	
94	94 1632 63	4342 06	94 0744 41	4343 83	111 78	
95	94 5974 68	4342 06	94 5088 24	4343 83	113 56	
4,596	1,695 0316 74	4342 06	1,694 9432 07	4343 83	9,9999 115 33	
97	95 4658 80	4342 06	95 3775 90	4343 83	117 10	
	95 9000 87	4342 06	95 8119 73	4343 83	118 86	
	[illegible]342 93	4342 07	96 2463 56	4343 82	120 63	
			96 6807 38		122 38	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,600	1,696 7685 00	4342 07	1,696 6807 38	4343 82	9,9999 122 38	1 76
4,601	1,697 2027 07	4342 07	1,697 1151 20	4343 82	9,9999 124 13	1 76
02	97 6369 14	4342 07	97 5495 02	4343 82	125 88	1 76
03	98 0711 21	4342 07	97 9838 84	4343 81	127 63	1 74
04	98 5053 28	4342 08	98 4182 65	4343 82	129 37	1 74
05	98 9395 36	4342 08	98 8526 47	4343 81	131 11	1 73
4,606	1,699 3737 44	4342 08	1,699 2870 28	4343 81	9,9999 132 84	1 73
07	99 8079 52	4342 08	99 7214 09	4343 81	134 57	1 73
08	1,700 2421 60	4342 08	1,700 1557 90	4343 81	136 30	1 73
09	00 6763 68	4342 08	00 5901 71	4343 80	138 03	1 72
10	01 1105 76	4342 09	01 0245 51	4343 81	139 75	1 72
4,611	1,701 5447 85	4342 09	1,701 4589 32	4343 80	9,9999 141 47	1 71
12	01 9789 94	4342 09	01 8933 12	4343 80	143 18	1 72
13	02 4132 02	4342 09	02 3276 92	4343 80	144 90	1 71
14	02 8474 11	4342 09	02 7620 72	4343 80	146 61	1 70
15	03 2816 21	4342 09	03 1964 52	4343 79	148 31	1 70
4,616	1,703 7158 30	4342 09	1,703 6308 31	4343 80	9,9999 150 01	1 71
17	04 1500 39	4342 10	04 0652 11	4343 79	151 72	1 69
18	04 5842 49	4342 10	04 4995 90	4343 79	153 41	1 69
19	05 0184 59	4342 10	04 9339 69	4343 79	155 10	1 69
20	05 4526 69	4342 10	05 3683 48	4343 79	156 79	1 69
4,621	1,705 8868 79	4342 11	1,705 8027 27	4343 79	9,9999 158 48	1 68
22	06 3210 90	4342 11	06 2371 06	4343 78	160 16	1 68
23	06 7553 00	4342 11	06 6714 84	4343 78	161 84	1 67
24	07 1895 11	4342 11	07 1058 62	4343 78	163 51	1 67
25	07 6237 22	4342 11	07 5402 40	4343 78	165 18	1 67
4,626	1,708 0579 33	4342 11	1,707 9746 18	4343 78	9,9999 166 85	1 67
27	08 4921 44	4342 11	08 4089 96	4343 77	168 52	1 65
28	08 9263 56	4342 12	08 8433 73	4343 78	170 17	1 67
29	09 3605 67	4342 12	09 2777 51	4343 77	171 84	1 65
30	09 7947 79	4342 12	09 7121 28	4343 77	173 49	1 65
4,631	1,710 2289 91	4342 12	1,710 1465 05	4343 77	9,9999 175 14	1 65
32	10 6632 03	4342 12	10 5808 82	4343 77	176 79	1 65
33	11 0974 15	4342 12	11 0152 59	4343 76	178 44	1 65
34	11 5316 28	4342 13	11 4496 35	4343 77	180 08	1 64
35	11 9658 40	4342 13	11 8840 12	4343 76	181 72	1 63
4,636	1,712 4000 53	4342 13	1,712 3183 88	4343 76	9,9999 183 35	1 63
37	12 8342 66	4342 13	12 7527 64	4343 76	184 98	1 63
38	13 2684 79	4342 13	13 1871 40	4343 76	186 61	1 63
39	13 7026 92	4342 13	13 6215 16	4343 75	188 24	1 62
40	14 1369 05	4342 14	14 0558 91	4343 76	189 86	1 62
4,641	1,714 5711 19	4342 14	1,714 4902 67	4343 75	9,9999 191 48	1 61
42	15 0053 33	4342 14	14 9246 42	4343 75	193 09	1 61
43	15 4395 47	4342 14	15 3590 17	4343 75	194 70	1 61
44	15 8737 61	4342 14	15 7933 92	4343 75	196 31	1 61
45	16 3079 75	4342 14	16 2277 67	4343 74	197 92	1 60
4.646	1,716 7421 90	4342 14	1,716 6621 41	4343 75	9,9999 199 52	1 60
47	17 1764 04	4342 15	17 0965 16	4343 74	201 12	1 59
48	17 6106 19	4342 15	17 5308 90	4343 74	202 71	1 59
49	18 0448 34	4342 15	17 9652 64	4343 74	204 30	1 59
50	18 4790 49		18 3996 38		205 89	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,650	1,718 4790 49	4342 15	1,718 3996 38	4343 74	9,9999 205 89	1 59
4,651	1,718 9132 64	4342 15	1,718 8340 12	4343 74	9,9999 207 48	1 59
52	19 3474 79	4342 15	19 2683 86	4343 73	209 07	1 58
53	19 7816 94	4342 16	19 7027 59	4343 74	210 65	1 58
54	20 2159 10	4342 16	20 1371 33	4343 73	212 23	1 57
55	20 6501 26	4342 16	20 5715 06	4343 73	213 80	1 57
4,656	1,721 0843 42	4342 16	1,721 0058 79	4343 73	9,9999 215 37	1 57
57	21 5185 58	4342 16	21 4402 52	4343 72	216 94	1 56
58	21 9527 74	4342 16	21 8746 24	4343 73	218 50	1 56
59	22 3869 90	4342 17	22 3089 97	4343 72	220 06	1 56
60	22 8212 07	4342 17	22 7433 69	4343 73	221 62	1 56
4,661	1,723 2554 24	4342 17	1,723 1777 42	4343 72	9,9999 223 18	1 56
62	23 6896 41	4342 17	23 6121 14	4343 72	224 73	1 55
63	24 1238 58	4342 17	24 0464 86	4343 71	226 28	1 54
64	24 5580 75	4342 17	24 4808 57	4343 72	227 82	1 54
65	24 9922 93	4342 17	24 9152 29	4343 72	229 36	1 55
4,666	1,725 4265 10	4342 18	1,725 3496 01	4343 71	9,9999 230 91	1 53
67	25 8607 29	4342 18	25 7839 72	4343 71	232 44	1 53
68	26 2949 46	4342 18	26 2183 43	4343 71	233 97	1 53
69	26 7291 64	4342 18	26 6527 14	4343 71	235 50	1 53
70	27 1633 82	4342 18	27 0870 86	4343 71	237 03	1 53
4,671	1,727 5976 [illegible]	4342 18	1,727 5214 56	4343 70	9,9999 238 56	1 52
72	28 0318 18	4342 19	27 9558 26	4343 71	240 08	1 52
73	28 4660 37	4342 19	28 3901 97	4343 70	241 60	1 52
74	28 9002 56	4342 19	28 8245 67	4343 70	243 11	1 51
75	29 3344 75	4342 19	29 2589 37	4343 70	244 62	1 51
4,676	1,729 7686 94	4342 19	1,729 6933 07	4343 70	9,9999 246 13	1 51
77	30 2029 13	4342 19	30 1276 77	4343 70	247 64	1 51
78	30 6371 32	4342 19	30 5620 47	4343 69	249 15	1 50
79	31 0713 51	4342 19	30 9964 16	4343 69	250 65	1 49
80	31 5055 71	4342 20	31 4307 85	4343 69	252 14	1 49
4,681	1,731 9397 91	4342 20	1,731 8651 54	4343 69	9,9999 253 63	1 50
82	32 3740 11	4342 20	32 2995 24	4343 69	255 13	1 49
83	32 8082 31	4342 20	32 7338 92	4343 69	256 61	1 49
84	33 2424 51	4342 20	33 1682 61	4343 69	258 10	1 49
85	33 6766 71	4342 20	33 6026 30	4343 68	259 59	1 48
4,686	1,734 1108 92	4342 21	1,734 0369 98	4343 69	9,9999 261 07	1 48
87	34 5451 12	4342 21	34 4713 67	4343 68	262 55	1 47
88	34 9793 33	4342 21	34 9057 35	4343 68	264 02	1 47
89	35 4135 54	4342 21	35 3401 03	4343 68	265 49	1 46
90	35 8477 75	4342 21	35 7744 71	4343 67	266 95	1 46
4,691	1,736 2819 97	4342 21	1,736 2088 38	4343 68	9,9999 268 41	1 46
92	36 7162 18	4342 22	36 6432 06	4343 67	269 87	1 46
93	37 1504 40	4342 22	37 0775 73	4343 68	271 33	1 46
94	37 5846 61	4342 22	37 5119 41	4343 67	272 79	1 46
95	38 0188 83	4342 22	37 9463 08	4343 67	274 25	1 45
4,696	1,738 4531 05	4342 22	1,738 3806 75	4343 67	9,9999 275 70	1 45
97	38 8873 27	4342 22	38 8150 42	4343 66	277 15	1 44
98	39 3215 50	4342 22	39 2494 08	4343 67	278 59	1 44
99	39 7557 72	4342 22	39 6837 75	4343 66	280 03	1 44
4,700	40 1899 94		40 1181 41		281 47	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,700	1,740 1899 94	4342 23	1,740 1181 41	4343 66	9,9999 281 47	1 43
4,701	1,740 6242 17	4342 23	1,740 5525 07	4343 67	9,9999 282 90	1 44
02	41 0584 40	4342 23	40 9868 74	4343 66	284 34	1 44
03	41 4926 63	4342 23	41 4212 40	4343 65	285 77	1 43
04	41 9268 86	4342 23	41 8556 05	4343 66	287 19	1 42
05	42 3611 10	4342 23	42 2899 71	4343 66	288 61	1 43
4,706	1,742 7953 33	4342 24	1,742 7243 37	4343 65	9,9999 290 04	1 41
07	43 2295 57	4342 24	43 1587 02	4343 65	291 45	1 41
08	43 6637 80	4342 24	43 5930 67	4343 66	292 87	1 42
09	44 0980 04	4342 24	44 0274 33	4343 65	294 29	1 42
10	44 5322 28	4342 24	44 4617 97	4343 66	295 69	1 40
4,711	1,744 9664 52	4342 24	1,744 8961 62	4343 65	9,9999 297 10	1 41
12	45 4006 76	4342 24	45 3305 27	4343 65	298 51	1 41
13	45 8349 01	4342 25	45 7648 92	4343 64	299 91	1 40
14	46 2691 25	4342 25	46 1992 56	4343 64	301 31	1 40
15	46 7033 50	4342 25	46 6336 20	4343 64	302 70	1 39
4,716	1,747 1375 75	4342 25	1,747 0679 84	4343 64	9,9999 304 09	1 39
17	47 5718 00	4342 25	47 5023 48	4343 64	305 48	1 39
18	48 0060 25	4342 25	47 9367 12	4343 64	306 87	1 39
19	48 4402 50	4342 25	48 3710 76	4343 64	308 26	1 39
20	48 8744 75	4342 26	48 8054 40	4343 63	309 65	1 37
4,721	1,749 3087 01	4342 26	1,749 2398 03	4343 63	9,9990 311 02	1 37
22	49 7429 27	4342 26	49 6741 66	4343 64	312 39	1 38
23	50 1771 53	4342 26	50 1085 30	4343 63	313 77	1 37
24	50 6113 79	4342 26	50 5428 93	4343 62	315 14	1 36
25	51 0456 05	4342 26	50 9772 55	4343 63	316 50	1 37
4,726	1,751 4798 31	4342 26	1,751 4116 18	4343 63	9,9999 317 87	1 37
27	51 9140 57	4342 27	51 8459 81	4343 62	319 24	1 36
28	52 3482 84	4342 27	52 2803 43	4343 63	320 60	1 36
29	52 7825 10	4342 27	52 7147 06	4343 62	321 96	1 35
30	53 2167 37	4342 27	53 1490 68	4343 62	323 31	1 35
4,731	1,753 6509 64	4342 27	1,753 5834 30	4343 62	9,9999 324 66	1 35
32	54 0851 91	4342 27	54 0177 92	4343 62	326 01	1 35
33	54 5194 18	4342 27	54 4521 54	4343 62	327 36	1 34
34	54 9536 46	4342 27	54 8865 16	4343 61	328 70	1 34
35	55 3878 73	4342 28	55 3208 77	4343 62	330 04	1 34
4,736	1,755 8221 01	4342 28	1,755 7552 39	4343 61	9,9999 331 38	1 34
37	56 2563 28	4342 28	56 1896 [illegible]	4343 61	332 72	1 33
38	56 6905 56	4342 28	56 6239 61	4343 61	334 05	1 33
39	57 1247 84	4342 28	57 0583 22	4343 61	335 38	1 33
40	57 5590 12	4342 28	57 4926 83	4343 61	336 71	1 33
4,741	1,757 9932 40	4342 28	1,757 9270 44	4343 60	9,9990 338 04	1 32
42	58 4274 68	4342 28	58 3614 04	4343 61	339 36	1 32
43	58 8616 97	4342 29	58 7957 65	4343 60	340 68	1 32
44	59 2959 25	4342 29	59 2301 25	4343 60	342 00	1 31
45	59 7301 54	4342 29	59 6644 85	4343 60	343 31	1 31
4,746	1,760 1643 83	4342 29	1,760 0988 45	4343 60	9,9999 344 62	1 31
47	60 5986 12	4342 29	60 5332 05	4343 60	345 93	1 31
48	61 0328 41	4342 29	60 9675 65	4343 60	347 24	1 31
49	61 4670 70	4342 29	61 4019 25	4343 59	348 55	1 30
50	61 9012 99		61 8362 84		349 85	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,750	1,761 9012 99	4342 30	1,761 8362 84	4343 60	9,9999 349 86	1 30
4,751	1,762 3355 29	4342 30	1,762 2706 44	4343 59	9,9999 351 16	1 29
52	62 7697 59	4342 30	62 7050 03	4343 59	352 44	1 30
53	63 2039 88	4342 30	63 1393 62	4343 59	353 74	1 29
54	63 6382 18	4342 30	63 5737 21	4343 59	355 03	1 29
55	64 0724 48	4342 30	64 0080 80	4343 59	356 32	1 28
4,756	1,764 5066 79	4342 30	1,764 4424 39	4343 59	9,9999 357 60	1 29
57	64 9409 09	4342 31	64 8767 98	4343 58	358 89	1 27
58	65 3751 40	4342 31	65 3111 56	4343 59	360 16	1 29
59	65 8093 70	4342 31	65 7455 15	4343 58	361 45	1 27
60	66 2436 01	4342 31	66 1798 73	4343 58	362 72	1 27
4,761	1,766 6778 32	4342 31	1,766 6142 31	4343 58	9,9999 363 99	1 27
62	67 1120 63	4342 31	67 0485 89	4343 58	365 26	1 27
63	67 5462 94	4342 31	67 4829 47	4343 58	366 53	1 27
64	67 9805 25	4342 31	67 9173 05	4343 57	367 80	1 26
65	68 4147 56	4342 31	68 3516 62	4343 58	369 06	1 27
4,766	1,768 8489 87	4342 32	1,768 7860 20	4343 57	9,9999 370 33	1 25
67	69 2832 19	4342 32	69 2203 77	4343 58	371 58	1 26
68	69 7174 51	4342 32	69 6547 35	4343 57	372 84	1 25
69	70 1516 83	4342 32	70 0890 92	4343 57	374 09	1 25
70	70 5859 15	4342 32	70 5234 49	4343 57	375 34	1 25
4,771	1,771 0201 47	4342 32	1,770 9578 06	4343 56	9,9999 376 59	1 24
72	71 4543 79	4342 32	71 3921 62	4343 57	377 83	1 24
73	71 8886 12	4342 32	71 8265 19	4343 57	379 07	1 25
74	72 3228 44	4342 33	72 2608 76	4343 56	380 32	1 23
75	72 7570 77	4342 33	72 6952 32	4343 56	381 55	1 24
4,776	1,773 1913 09	4342 33	1,773 1295 88	4343 56	9,9999 382 79	1 23
77	73 6255 42	4342 33	73 5639 44	4343 56	384 02	1 23
78	74 0597 75	4342 33	73 9983 00	4343 56	385 25	1 23
79	74 4940 08	4342 33	74 4326 56	4343 56	386 48	1 23
80	74 9282 41	4342 33	74 8670 12	4343 56	387 71	1 22
4,781	1,775 3624 75	4342 33	1,775 3013 68	4343 55	9,9999 388 93	1 22
82	75 7967 08	4342 34	75 7357 23	4343 56	390 15	1 22
83	76 2309 42	4342 34	76 1700 79	4343 55	391 37	1 22
84	76 6651 75	4342 34	76 6044 34	4343 55	392 59	1 21
85	77 0994 09	4342 34	77 0387 89	4343 55	393 80	1 21
4,786	1,777 5336 43	4342 34	1,777 4731 44	4343 55	9,9999 395 01	1 21
87	77 9678 77	4342 34	77 9074 99	4343 55	396 22	1 21
88	78 4021 11	4342 34	78 3418 54	4343 55	397 43	1 21
89	78 8363 45	4342 34	78 7762 09	4343 54	398 64	1 20
90	79 2705 80	4342 34	79 2105 63	4343 55	399 84	1 20
4,791	1,779 7048 14	4342 35	1,779 6449 18	4343 54	9,9999 401 04	1 19
92	80 1390 49	4342 35	80 0792 72	4343 54	402 23	1 19
93	80 5732 84	4342 35	80 5136 26	4343 54	403 42	1 19
94	81 0075 19	4342 35	80 9479 80	4343 54	404 61	1 19
95	81 4417 54	4342 35	81 3823 34	4343 54	405 80	1 19
4,796	1,781 8759 89	4342 35	1,781 8166 89	4343 54	9,9999 406 99	1 19
97	82 3102 24	4342 35	82 2510 42	4343 54	408 18	1 19
98	82 7444 59	4342 36	82 6853 96	4343 53	409 37	1 17
99	83 1786 95	4342 36	83 1197 49	4343 53	410 54	1 17
4,800	83 6129 31		83 5541 02		411 71	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,800	1,783 6129 31	4342 36	1,783 5541 02	4343 54	9,9999 411 71	1 19
4,801	1,784 0471 66	4342 36	1,783 9884 56	4343 53	9,9999 412 90	1 17
02	84 4814 02	4342 36	84 4228 09	4343 53	414 07	1 17
03	84 9156 38	4342 36	84 8571 62	4343 53	415 24	1 17
04	85 3498 74	4342 36	85 2915 15	4343 52	416 41	1 16
05	85 7841 10	4342 36	85 7258 67	4343 53	417 57	1 16
4,806	1,786 2183 47	4342 36	1,786 1602 20	4343 53	9,9999 418 73	1 17
07	86 6525 83	4342 36	86 5945 73	4343 52	419 90	1 16
08	87 0868 19	4342 37	87 0289 25	4343 52	421 06	1 15
09	87 5210 56	4342 37	87 4632 77	4343 53	422 21	1 16
10	87 9552 93	4342 37	87 8976 30	4343 52	423 37	1 15
4,811	1,788 3895 30	4342 37	1,788 3319 82	4343 52	9,9999 424 52	1 15
12	88 8237 67	4342 37	88 7663 34	4343 52	425 67	1 15
13	89 2580 04	4342 37	89 2006 86	4343 51	426 82	1 14
14	89 6922 41	4342 37	89 6350 37	4343 52	427 96	1 15
15	90 1264 78	4342 37	90 0693 89	4343 51	429 11	1 14
4,816	1,790 5607 16	4342 38	1,790 5037 40	4343 51	9,9999 430 25	1 14
17	90 9949 53	4342 38	90 9380 92	4343 51	431 39	1 13
18	91 4291 91	4342 38	91 3724 43	4343 51	432 52	1 13
19	91 8634 29	4342 38	91 8067 94	4343 51	433 65	1 13
20	92 2976 67	4342 38	92 2411 45	4343 51	434 78	1 13
4,821	1,792 7319 05	4342 38	1,792 6754 96	4343 51	9,9999 435 91	1 13
22	93 1661 43	4342 38	93 1098 47	4343 51	437 04	1 12
23	93 6003 82	4342 39	93 5441 98	4343 51	438 16	1 12
24	94 0346 20	4342 39	93 9785 49	4343 50	439 28	1 12
25	94 4688 59	4342 39	94 4128 99	4343 51	440 40	1 12
4,826	1,794 9030 97	4342 39	1,794 8472 50	4343 50	9,9999 441 52	1 12
27	95 3373 36	4342 39	95 2816 00	4343 50	442 64	1 11
28	95 7715 75	4342 39	7159 50	4343 50	443 75	1 11
29	96 2058 14	4342 39	96 1503 00	4343 50	444 86	1 11
30	96 6400 53	4342 39	96 5846 50	4343 50	445 97	1 11
4,831	1,797 0742 92	4342 39	1,797 0190 00	4343 50	9,9999 447 08	1 11
32	97 5085 31	4342 39	97 4533 50	4343 49	448 19	1 10
33	97 9427 70	4342 39	97 8876 99	4343 50	449 29	1 10
34	98 3770 10	4342 40	98 3220 49	4343 49	460 39	1 10
35	98 8112 49	4342 40	98 7563 98	4343 50	451 49	1 10
4,836	1,799 2454 89	4342 40	1,799 1907 48	4343 49	9,9999 452 59	1 09
37	99 6797 29	4342 40	99 6250 97	4343 49	453 68	1 09
38	1,800 1139 69	4342 40	1,800 0594 46	4343 49	454 77	1 09
39	00 5482 09	4342 40	00 4937 95	4343 48	455 86	1 08
40	00 9824 49	4342 40	00 9281 43	4343 40	456 94	1 09
4,841	1,801 4166 89	4342 40	1,801 3624 92	4343 49	9,9999 458 03	1 09
42	01 8509 29	4342 41	01 7968 41	4343 48	459 12	1 07
43	02 2851 70	4342 41	02 2311 89	4343 48	460 19	1 07
44	02 7194 11	4342 40	02 6655 37	4343 49	461 26	1 09
45	03 1536 51	4342 41	03 0998 86	4343 48	462 35	1 07
4,846	1,803 5878 92	4342 41	1,803 5342 34	4343 48	9,9999 463 42	1 07
47	04 0221 33	4342 41	03 9686 82	4343 49	464 49	1 07
48	04 4563 74	4342 41	04 4029 30	4343 48	465 56	1 07
49	04 8906 15	4342 41	04 8372 78	4343 48	466 63	1 07
50	05 3248 56		05 2716 26		467 70	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,850	1,805 3248 56	4342 41	1,806 2716 26	4343 47	9,9999 467 70	1 06
4,851	1,805 7690 97	4342 41	1,806 7059 73	4343 48	9,9999 468 76	1 06
52	06 1933 39	4342 41	06 1403 21	4343 48	469 82	1 07
53	06 6275 80	4342 42	06 5746 69	4343 47	470 [illegible]	1 05
54	07 0618 22	4342 42	07 0090 16	4343 47	471 94	1 05
55	07 4960 64	4342 41	07 4433 63	4343 47	472 99	1 06
4,856	1,807 9303 05	4342 42	1,807 8777 10	4343 47	9,9999 474 05	1 06
57	08 3645 47	4342 42	08 3120 57	4343 47	475 10	1 05
58	08 7987 89	4342 42	08 7464 04	4343 47	476 15	1 05
59	09 2330 31	4342 42	09 1807 51	4343 47	477 20	1 04
60	09 6672 74	4342 42	09 6150 98	4343 46	478 24	1 05
4,861	1,810 1015 16	4342 42	1,810 0494 44	4343 47	9,9999 479 28	1 04
62	10 5357 58	4342 43	10 4837 91	4343 46	480 32	1 04
63	10 9700 01	4342 43	10 9181 37	4343 46	481 36	1 04
64	11 4042 44	4342 42	11 3524 83	4343 47	482 40	1 04
65	11 8384 86	4342 43	11 7868 30	4343 46	483 44	1 03
4,866	1,812 2727 29	4342 43	1,812 2211 76	4343 46	9,9999 484 47	1 03
67	12 7069 72	4342 43	12 6555 22	4343 46	485 50	1 03
68	13 1412 15	4342 43	13 0898 68	4343 46	486 53	1 02
69	13 5754 59	4342 43	13 5242 13	4343 46	487 55	1 02
70	14 0097 02	4342 48	13 9585 59	4343 46	488 57	1 02
4,871	1,814 4439 46	4342 44	1,814 3929 05	4343 45	9,9999 489 59	1 02
72	14 8781 89	4342 44	14 8272 50	4343 46	490 61	1 02
73	15 3124 32	4342 44	15 2615 96	4343 46	491 63	1 02
74	15 7466 76	4342 44	15 6959 41	4343 45	492 65	1 01
75	16 1809 20	4342 44	16 1302 86	4343 45	493 66	1 01
4,876	1,816 6151 64	4342 44	1,816 5646 31	4343 45	9,9999 494 67	1 01
77	17 0494 08	4342 44	16 9989 76	4343 45	495 68	1 01
78	17 4836 52	4342 44	17 4333 21	4343 45	496 69	1 01
79	17 9178 96	4342 44	17 8676 66	4343 44	497 70	1 00
80	18 3521 40	4342 44	18 3020 10	4343 44	498 70	1 00
4,881	1,818 7863 85	4342 45	1,818 7363 55	4343 45	9,9999 499 70	1 00
82	19 2206 29	4342 45	19 1706 99	4343 44	500 70	0 99
83	19 6548 74	4342 45	19 6050 43	4343 45	501 69	1 00
84	20 0891 19	4342 44	20 0393 88	4343 44	502 69	1 00
85	20 5233 63	4342 45	20 4737 32	4343 44	503 69	0 99
4,886	1,820 9576 08	4342 45	1,820 9080 76	4343 44	9,9999 504 [illegible]	0 99
87	21 3918 53	4342 45	21 3424 20	4343 44	505 67	0 99
88	21 8260 98	4342 45	21 7767 64	4343 44	506 66	0 98
89	22 2603 44	4342 45	22 2111 08	4343 43	507 64	0 98
90	22 6945 89	4342 45	22 6454 51	4343 44	508 62	0 98
4,891	1,823 1288 34	4342 45	1,823 0797 95	4343 43	9,9999 509 60	0 98
92	23 5630 80	4342 46	23 5141 38	4343 44	510 58	0 98
93	23 9973 25	4342 46	23 9484 82	4343 43	511 56	0 98
94	24 4315 71	4342 46	24 3828 25	4343 43	512 54	0 97
95	24 8658 17	4342 46	24 8171 68	4343 43	513 51	0 97
4,896	1,825 3000 63	4342 46	1,825 2515 11	4343 43	9,9999 514 48	0 97
97	25 7343 09	4342 46	25 6858 54	4343 43	515 45	0 97
98	26 1685 55	4342 46	26 1201 97	4343 43	516 42	0 97
99	26 6028 01	4342 46	26 5545 40	4343 43	517 39	0 97
4,900	27 0370 47		26 9888 83		518 36	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,900	1,827 0370 47	4342 46	1,826 9888 83	4343 42	9,9999 518 36	0 96
4,901	1,827 4712 94	4342 46	1,827 4232 25	4343 43	9,9999 519 32	0 96
02	27 9055 40	4342 47	27 8575 68	4343 42	520 28	0 95
03	28 3397 87	4342 47	28 2919 10	4343 42	521 23	0 95
04	28 7740 34	4342 46	28 7262 52	4343 42	522 18	0 96
05	29 2082 80	4342 47	29 1605 94	4343 42	523 14	0 96
4,906	1,829 6425 27	4342 47	1,829 5949 36	4343 42	9,9999 524 09	0 95
07	30 0767 74	4342 47	30 0292 78	4343 42	525 04	0 95
08	30 5110 21	4342 47	30 4636 20	4343 42	525 99	0 95
09	30 9452 68	4342 48	30 8979 62	4343 42	526 94	0 94
10	31 3795 16	4342 47	31 3323 04	4343 41	527 88	0 94
4,911	1,831 8137 63	4342 47	1,831 7666 45	4343 42	9,9999 528 82	0 95
12	32 2480 10	4342 48	32 2009 87	4343 42	529 77	0 94
13	32 6822 58	4342 47	32 6353 29	4343 41	530 71	0 94
14	33 1165 05	4342 48	33 0696 70	4343 41	531 65	0 93
15	33 5507 53	4342 48	33 5040 11	4343 42	532 58	0 94
4,916	1,833 9850 01	4342 48	1,833 9383 53	4343 41	9,9999 533 52	0 93
17	34 4192 49	4342 48	34 3726 94	4343 41	534 45	0 93
18	34 8534 97	4342 48	34 8070 35	4343 41	535 38	0 93
19	35 2877 45	4342 48	35 2413 76	4343 41	536 31	0 93
20	35 7219 93	4342 48	35 6757 17	4343 41	537 24	0 92
4,921	1,836 1562 41	4342 48	1,836 1100 57	4343 42	9,9999 538 16	0 93
22	36 5904 89	4342 49	36 5443 98	4343 41	539 09	0 91
23	37 0247 38	4342 49	36 9787 38	4343 41	540 00	0 92
24	37 4589 87	4342 48	37 4130 79	4343 40	540 92	0 92
25	37 8932 35	4342 49	37 8474 19	4343 40	541 84	0 92
4,926	1,838 3274 84	4342 49	1,838 2817 59	4343 40	9,9999 542 75	0 91
27	38 7617 33	4342 49	38 7160 99	4343 41	543 66	0 92
28	39 1959 82	4342 49	39 1504 40	4343 40	544 58	0 91
29	39 6302 31	4342 49	39 5847 80	4343 39	545 49	0 90
30	40 0644 80	4342 49	40 0191 19	4343 40	546 39	0 91
4,931	1,840 4987 29	4342 48	1,840 4534 59	4343 40	9,9999 547 30	0 91
32	40 9329 78	4342 50	40 8877 99	4343 40	548 21	0 90
33	41 3672 28	4342 49	41 3221 39	4343 39	549 11	0 90
34	41 8014 77	4342 50	41 7564 78	4343 40	550 01	0 90
35	42 2357 27	4342 49	42 1908 18	4343 39	550 91	0 90
4,936	1,842 6699 76	4342 50	1,842 6251 57	4343 39	9,9999 551 81	0 89
37	43 1042 26	4342 50	43 0594 96	4343 39	552 70	0 89
38	43 5384 76	4342 50	43 4938 35	4343 40	553 59	0 90
39	43 9727 25	4342 50	43 9281 75	4343 39	554 49	0 90
40	44 4069 75	4342 50	44 3625 14	4343 39	555 39	0 89
4,941	1,844 8412 25	4342 51	1,844 7968 53	4343 38	9,9999 556 28	0 88
42	45 2754 76	4342 50	45 2311 91	4343 39	557 16	0 88
43	45 7097 26	4342 50	45 6655 30	4343 39	558 04	0 89
44	46 1439 76	4342 51	46 0998 69	4343 38	558 93	0 88
45	46 5782 27	4342 50	46 5342 07	4343 39	559 81	0 88
4,946	1,847 0124 77	4342 51	1,946 9685 46	4343 38	9,9999 560 69	0 87
47	47 4467 28	4342 51	47 4028 84	4343 38	561 56	0 87
48	47 8809 79	4342 50	47 8372 22	4343 38	562 43	0 88
49	48 3152 29	4342 51	48 2715 60	4343 39	563 31	0 88
50	48 7494 80		48 7058 99		564 19	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
4,950	1,848 7494 80	4342 51	1,848 7068 99	4343 38	9,9999 564 19	0 87
4,951	1,849 1837 31	4342 51	1,849 1402 37	4343 37	9,9999 565 06	0 86
52	49 6179 82	4342 51	49 5745 74	4343 38	565 92	0 87
53	50 0522 33	4342 51	50 0089 12	4343 38	566 79	0 87
54	50 4864 84	4342 52	50 4432 50	4343 38	567 66	0 86
55	50 9207 36	4342 51	50 8775 88	4343 37	568 52	0 86
4,956	1,851 3549 87	4342 51	1,851 3119 25	4343 38	9,9999 569 38	0 87
57	51 7992 38	4342 52	51 7462 63	4343 37	570 25	0 85
58	52 2234 90	4342 52	52 1806 00	4343 38	571 10	0 86
59	52 6577 42	4342 51	52 6149 38	4343 38	571 96	0 86
60	53 0919 93	4342 52	53 0492 75	4343 37	572 82	0 85
4,961	1,853 5262 45	4342 52	1,853 4836 12	4343 37	9,9999 573 67	0 85
62	53 9604 97	4342 52	53 9179 49	4343 37	574 52	0 85
63	54 3947 49	4342 52	54 3522 86	4343 37	575 37	0 85
64	54 8290 01	4342 52	54 7866 23	4343 37	576 22	0 85
65	55 2632 53	4342 52	55 2209 60	4343 36	577 07	0 84
4,966	1,855 6975 06	4342 53	1,855 6552 96	4343 37	9,9999 577 91	0 84
67	56 1317 58	4342 52	56 0896 33	4343 36	578 75	0 84
68	56 5660 10	4342 53	56 5239 69	4343 37	579 59	0 84
69	57 0002 63	4342 52	56 9583 06	4343 36	580 43	0 84
70	57 4345 15	4342 53	57 3926 42	4343 37	581 27	0 84
4,971	1,857 8687 68	4342 53	1,857 8269 79	4343 36	9,9999 582 11	0 83
72	58 3030 21	4342 52	58 2613 15	4343 36	582 94	0 84
73	58 7372 73	4342 53	58 6956 51	4343 36	583 78	0 83
74	59 1715 26	4342 53	59 1299 87	4343 36	584 61	0 83
75	59 6057 79	4342 53	59 5643 23	4343 36	585 44	0 83
4,976	1,860 0400 32	4342 53	1,859 9986 59	4343 36	9,9959 586 27	0 83
77	60 4742 85	4342 54	60 4329 95	4343 36	587 10	0 82
78	60 9085 39	4342 53	60 8673 31	4343 35	587 92	0 82
79	61 3427 92	4342 53	61 3016 66	4343 30	588 74	0 83
80	61 7770 45	4342 54	61 7360 02	4343 36	589 57	0 82
4,981	1,862 2112 99	4342 53	1,862 1703 38	4343 35	9,9999 590 39	0 82
82	62 6455 52	4342 54	62 6046 73	4343 35	591 21	0 81
83	63 0798 06	4342 54	63 0390 08	4343 36	592 02	0 82
84	63 5140 60	4342 54	63 4733 44	4343 35	592 84	0 81
85	63 9483 14	4342 54	63 9076 79	4343 35	593 65	0 81
4,986	1,864 3825 68	4342 54	1,864 3420 14	4343 35	9,9999 594 46	0 81
87	64 8168 22	4342 54	64 7763 49	4343 35	595 27	0 81
88	65 2510 76	4342 54	65 2106 84	4343 34	596 08	0 80
89	65 6853 30	4342 54	65 6450 18	4343 35	596 88	0 81
90	66 1195 84	4342 54	66 0793 53	4343 35	597 69	0 81
4,991	1,866 5538 38	4342 55	1,866 5136 88	4343 34	9,9999 598 50	0 80
92	66 9880 93	4342 54	66 9480 22	4343 35	599 30	0 80
93	67 4223 47	4342 55	67 3823 57	4343 34	600 10	0 80
94	67 8566 02	4342 54	67 8166 91	4343 35	600 90	0 80
95	68 2908 56	4342 55	68 2510 26	4343 34	601 70	0 79
4,996	1,868 7251 11	4342 55	1,868 6853 60	4343 34	9,9999 [illegible] 49	0 79
97	69 1593 66	4342 54	69 1196 94	4343 34	603 28	0 80
98	69 5936 20	4342 55	69 5540 28	4343 34	604 08	0 79
99	70 0278 75	4342 55	69 9883 62	4343 34	604 87	0 79
5,000	70 4621 30		70 4226 96		605 66	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
5,00	1,870 4621 303	43425 545	1,870 4226 965	43433 352	9,9999 605 662	7 807
5,01	1,874 8046 848	43425 621	1,874 7660 317	43433 276	9,9999 613 469	7 653
02	1,879 1472 469	25 697	1,879 1093 593	33 199	621 124	7 502
03	1,883 4898 166	25 772	1,883 4526 792	33 125	628 626	7 353
04	1,887 8323 938	25 844	1,887 7959 917	33 053	635 979	7 209
05	1,892 1749 782	25 916	1,892 1392 970	32 981	643 188	7 065
5,06	1,896 5175 698	43425 986	1,896 4825 951	43432 911	9,9999 650 253	6 925
07	1,900 8601 683	26 055	1,900 8258 862	32 842	657 179	6 787
08	1,905 2027 738	26 121	1,905 1691 704	32 776	663 966	6 655
09	1,909 5453 859	26 187	1,909 5124 480	32 709	670 621	6 522
10	1,913 8880 046	26 252	1,913 8557 189	32 645	677 143	6 393
5,11	1,918 2306 298	43426 315	1,918 1989 834	43432 581	9,9999 683 536	6 266
12	1,922 5732 613	26 377	1,922 5422 415	32 520	689 802	6 143
13	1,926 9158 990	26 438	1,926 8854 935	32 458	695 945	6 020
14	1,931 2585 428	26 498	1,931 2287 393	32 399	701 965	5 901
15	1,935 6011 926	26 556	1,935 5719 792	32 341	707 866	5 785
5,16	1,939 9438 482	43426 613	1,939 9152 133	43432 283	9,9999 713 651	5 670
17	1,944 2865 095	26 669	1,944 2584 416	32 227	719 321	5 558
18	1,948 6291 764	26 725	1,948 6016 643	32 172	724 879	5 447
19	1,952 9718 489	26 778	1,952 9448 815	32 119	730 326	5 341
20	1,957 3145 267	26 831	1,957 2880 934	32 065	735 667	5 234
5,21	1,961 6572 098	43426 883	1,961 6312 999	43432 014	9,9999 740 901	5 131
22	1,965 9998 981	26 934	1,965 9745 013	32 962	746 032	5 028
23	1,970 3425 915	26 984	1,970 3176 975	32 913	751 060	4 929
24	1,974 6852 899	27 032	1,974 6608 888	32 864	755 989	4 832
25	1,979 0279 931	27 080	1,979 0040 752	32 817	760 821	4 737
5,26	1,983 3707 011	43427 127	1,983 3472 569	43431 769	9,9999 765 558	4 642
27	1,987 7134 138	27 173	1,987 6904 338	31 723	770 200	4 550
28	1,992 0561 311	27 219	1,992 0336 061	31 679	774 750	4 460
29	1,996 3988 530	27 262	1,996 3767 740	31 634	779 210	4 372
30	2,000 7415 792	27 305	2,000 7199 374	31 591	783 582	4 286
5,31	2,005 0843 097	43427 348	2,005 0630 965	43431 549	9,9999 787 868	4 201
32	2,009 4270 445	27 390	2,009 4062 514	31 507	792 069	4 117
33	2,013 7697 835	27 430	2,013 7494 021	31 466	796 186	4 036
34	2,018 1125 265	27 471	2,018 0925 487	31 426	800 222	3 955
35	2,022 4552 736	27 509	2,022 4356 913	31 387	804 177	3 878
5,36	2,026 7980 245	43427 548	2,026 7788 300	43431 348	9,9999 808 055	3 800
37	2,031 1407 793	27 585	2,031 1219 648	31 311	811 855	3 726
38	2,035 4835 378	27 623	2,035 4650 959	31 274	815 581	3 651
39	2,039 8263 001	27 658	2,039 8082 233	31 238	819 232	3 580
40	2,044 1690 659	27 694	2,044 1513 471	31 203	822 812	3 509
5,41	2,048 5118 353	43427 729	2,048 4944 674	43431 168	9,9999 826 321	3 439
42	2,052 8546 082	27 763	2,052 8375 842	31 133	829 760	3 370
43	2,057 1973 845	27 796	2,057 1806 976	31 101	833 130	3 305
44	2,061 5401 641	27 829	2,061 5238 076	31 067	836 435	3 238
45	2,065 8829 470	27 860	2,065 8669 143	31 036	839 673	3 176
5,46	2,070 2257 330	43427 893	2,070 2100 179	43431 004	9,9999 842 849	3 111
47	2,074 5685 223	27 923	2,074 5531 183	30 973	845 960	3 050
48	2,078 9113 146	27 953	2,078 8962 156	30 943	849 010	2 990
49	2,083 2541 099	27 983	2,083 2393 099	30 924	852 000	2 931
50	2,087 5969 082		2,087 5824 013		854 931	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
5.50	2,087 5909 082	43428 012	2,087 5824 013	43430 884	9,9999 854 931	2 872
5.51	2,091 9397 094	43428 040	2,091 9254 897	43430 857	9,9999 857 803	2 817
52	2,096 2825 134	28 069	2,096 2685 754	30 828	860 620	2 759
53	2,100 6253 203	28 095	2,100 6116 582	30 801	863 379	2 706
54	2,104 9681 298	28 123	2,104 9547 383	30 774	866 085	2 651
55	2,109 3109 421	28 148	2,109 2978 157	30 747	868 736	2 599
5.56	2,113 6537 569	43428 178	2,113 6408 904	43430 723	9,9999 871 335	2 547
57	2,117 9965 746	28 198	2,117 9839 627	30 696	873 882	2 498
58	2,122 3393 943	28 224	2,122 3270 323	30 672	876 380	2 448
59	2,126 6822 167	28 249	2,126 6700 995	30 648	878 828	2 399
60	2,131 0250 416	28 272	2,131 0131 643	30 624	881 227	2 352
5,61	2,135 3678 688	43428 296	2,135 3562 267	43430 601	9,9999 883 579	2 306
62	2,139 7106 984	28 318	2,139 6992 868	30 578	885 884	2 260
63	2,144 0535 302	28 341	2,144 0423 446	30 556	888 144	2 215
64	2,148 3963 643	28 363	2,148 3854 002	30 534	890 359	2 171
65	2,152 7392 006	28 384	2,152 7284 536	30 512	892 530	2 128
5,66	2,157 0820 390	43428 405	2,157 0715 048	43430 491	9,9999 894 658	2 086
67	2,161 4248 795	28 426	2,161 4145 539	30 471	896 744	2 045
68	2,165 7677 221	28 446	2,165 7576 010	30 450	898 789	2 004
69	2,170 1105 667	28 466	2,170 1006 460	30 430	900 793	1 964
70	2,174 4534 133	28 485	2,174 4436 890	30 411	902 757	1 926
5,71	2,178 7962 618	43428 505	2,178 7867 301	43430 392	9,9999 904 683	1 887
72	2,183 1391 123	28 523	2,183 1297 693	30 373	906 570	1 850
73	2,187 4819 646	28 542	2,187 4728 066	30 355	908 420	1 813
74	2,191 8248 188	28 559	2,191 8158 421	30 337	910 233	1 778
75	2,196 1676 747	28 577	2,196 1588 758	30 320	912 011	1 743
5,76	2,200 5105 324	43428 594	2,200 5019 078	43430 302	9,9999 913 754	1 708
77	2,204 8533 918	28 612	2,204 8449 380	30 285	915 462	1 673
78	2,209 1962 530	28 627	2,209 1879 666	30 268	917 135	1 641
79	2,213 5391 157	28 644	2,213 5309 933	30 253	918 776	1 609
80	2,217 8819 801	28 660	2,217 8740 186	30 236	920 385	1 576
5,81	2,222 2248 461	43428 676	2,222 2170 422	43430 221	9,9999 921 961	1 545
82	2,226 5677 137	28 691	2,226 5600 643	30 206	923 506	1 515
83	2,230 9105 828	28 706	2,230 9030 849	30 190	925 021	1 484
84	2,235 2534 534	28 720	2,235 2461 039	30 176	926 505	1 456
85	2,239 5963 254	28 735	2,239 5891 215	30 160	927 961	1 426
5,86	2,243 9391 989	43428 749	2,243 9321 376	43430 148	9,9999 929 387	1 398
87	2,248 2820 738	28 763	2,248 2751 524	30 133	930 786	1 370
88	2,252 6249 501	28 777	2,252 6181 657	30 120	932 156	1 343
89	2,256 9678 278	28 790	2,256 9611 777	30 107	933 499	1 317
90	2,261 3107 068	28 802	2,261 3041 884	30 093	934 816	1 291
5,91	2,265 6535 870	43428 816	2,265 6471 977	43430 081	9,9999 936 107	1 265
92	2,269 9964 686	28 828	2,269 9902 058	30 068	937 372	1 240
93	2,274 3393 514	28 841	2,274 3332 126	30 056	938 612	1 215
94	2,278 6822 355	28 852	2,278 6762 182	30 044	939 827	1 192
95	2,283 0251 207	28 864	2,283 0192 226	30 032	941 019	1 168
5,96	2,287 3680 071	43428 876	2,287 3622 258	43430 021	9,9999 942 187	1 145
97	2,291 7108 947	28 887	2,291 7052 279	30 009	943 332	1 122
98	2,296 0537 834	28 898	2,296 0482 288	29 998	944 454	1 100
99	2,300 3966 732	28 910	2,300 3912 286	29 988	945 554	1 078
6,00	2,304 7395 642		2,304 7342 274		946 632	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
6,00	2,304 7395 642	43428 919	2,304 7342 274	43429 976	9,99999 46 632	1 057
6,01	2,309 0824 561	43428 931	2,309 0772 250	43429 966	9,99999 47 689	1 035
02	2,313 4253 492	28 940	2,313 4202 216	29 956	48 724	1 016
03	2,317 7682 432	28 951	2,317 7632 172	29 946	49 740	0 996
04	2,322 1111 383	28 960	2,322 1062 118	29 936	50 736	0 975
05	2,326 4540 343	28 970	2,326 4492 054	29 926	51 711	0 956
6,06	2,330 7969 313	43428 980	2,330 7921 980	43429 917	9,99990 52 667	0 937
07	2,335 1398 293	28 989	2,335 1351 897	29 908	53 604	0 919
08	2,339 4827 282	28 998	2,339 4781 805	29 898	54 523	0 900
09	2,343 8256 280	29 007	2,343 8211 703	29 890	55 423	0 883
10	2,348 1685 287	29 015	2,348 1641 593	29 880	56 306	0 865
6,11	2,352 5114 302	43429 024	2,352 5071 473	43429 872	9,99990 57 171	0 848
12	2,356 8543 326	29 033	2,356 8501 345	29 864	58 019	0 831
13	2,361 1972 359	29 041	2,361 1931 209	29 856	58 850	0 816
14	2,365 5401 400	29 048	2,365 5361 065	29 847	59 665	0 799
15	2,369 8830 457	29 057	2,369 8790 912	29 840	60 464	0 783
6,16	2,374 2259 505	43429 065	2,374 2220 752	43429 832	9,99999 61 247	0 767
17	2,378 5688 570	29 072	2,378 5650 584	29 824	62 014	0 752
18	2,382 9117 642	29 079	2,382 9080 408	29 817	62 766	0 738
19	2,387 2546 721	29 087	2,387 2510 225	29 810	63 504	0 723
20	2,391 5975 808	29 094	2,391 5940 035	29 802	64 227	0 708
6,21	2,395 9404 902	43429 101	2,395 9369 837	429 795	9,99999 64 935	0 694
22	2,400 2834 003	29 108	2,400 2799 632	29 789	65 629	0 681
23	2,404 6263 111	29 115	2,404 6229 421	29 782	66 310	0 667
24	2,408 9692 226	29 121	2,408 9659 203	29 775	66 977	0 654
25	2,413 3121 347	29 128	2,413 3088 978	29 768	67 631	0 640
6,26	2,417 6550 475	43429 134	2,417 6518 746	43429 763	9,99090 68 271	0 629
27	2,421 9979 609	29 140	2,421 9948 509	29 756	68 900	0 616
28	2,426 3408 749	29 146	2,426 3378 265	29 750	69 516	0 604
29	2,430 6837 895	29 153	2,430 6808 015	29 744	70 120	0 591
30	2,435 0267 048	29 158	2,435 0237 759	29 738	70 711	0 580
6,31	2,439 3696 206	43429 164	2,439 3667 497	43429 732	9,99999 71 291	0 568
32	2,443 7125 370	29 169	2,443 7097 229	29 727	71 859	0 558
33	2,448 0554 539	29 175	2,448 0526 966	29 722	72 417	0 547
34	2,452 3983 714	29 181	2,452 3956 678	29 716	72 964	0 534
35	2,456 7412 895	29 186	2,456 7386 393	29 711	73 498	0 525
6,36	2,461 0842 081	43429 191	2,461 0816 104	43429 706	9,09999 74 023	0 514
37	2,465 4271 272	29 196	2,465 4245 809	29 701	74 537	0 505
38	2,469 7700 468	29 201	2,469 7675 510	29 695	75 042	0 494
39	2,474 1129 669	29 206	2,474 1105 205	29 690	75 536	0 484
40	2,478 4558 875	29 211	2,478 4534 895	29 686	76 020	0 475
6,41	2,482 7988 086	43429 215	2,482 7964 581	43429 681	9,99999 76 495	0 466
42	2,487 1417 301	29 221	2,487 1394 262	29 676	76 961	0 456
43	2,491 4846 521	29 225	2,491 4823 938	29 672	77 417	0 447
44	2,495 8275 746	29 229	2,495 8253 610	29 667	77 864	0 438
45	2,500 1704 975	29 233	2,500 1683 277	29 663	78 302	0 430
6,46	2,504 5134 208	43429 238	2,504 5112 940	43429 659	9,90999 78 732	0 421
47	2,508 8563 446	29 242	2,508 8542 599	29 655	79 153	0 413
48	2,513 1992 688	29 246	2,513 1972 254	29 650	79 566	0 404
49	2,517 5411 934	29 250	2,517 5401 904	29 647	79 970	0 397
50	2,521 8851 184		2,521 8831 551		80 367	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
6,50	2,521 8851 184	43429 253	2,521 8831 551	43429 642	9,99999 80 367	389
6,51	2,526 2280 437	43429 258	2,526 2261 893	43429 639	9,99999 80 756	381
52	2,530 5709 695	29 261	2,530 5690 832	29 635	81 137	374
53	2,534 9138 956	29 266	2,534 9120 467	29 631	81 511	365
54	2,539 2568 222	29 268	2,539 2250 098	29 628	81 876	360
55	2,543 5997 490	29 273	2,543 5979 726	29 624	82 236	351
6,56	2,547 9426 763	43429 275	2,547 9409 350	43429 620	9,99999 82 587	345
57	2,552 2856 038	29 280	2,552 2838 970	29 618	82 932	338
58	2,556 6285 318	29 282	2,556 6268 588	29 613	83 270	331
59	2,560 9714 600	29 286	2,560 9698 201	29 611	83 601	325
60	2,565 3143 886	29 289	2,565 3127 812	29 607	83 926	318
6,61	2,569 6573 175	43429 292	2,569 6557 419	43429 604	9,99999 84 244	312
62	2,574 0002 467	29 296	2,573 9987 023	29 602	84 556	306
63	2,578 3431 763	29 298	2,578 3416 625	29 598	84 862	300
64	2,582 6861 061	29 301	2,582 6846 223	29 595	85 162	294
65	2,587 0290 362	29 304	2,587 0275 818	29 592	85 456	288
6,66	2,591 3719 666	43429 307	25,91 3705 410	43429 589	9,99999 85 744	282
67	2,595 7148 973	29 310	2,595 7134 999	29 587	86 026	277
68	2,600 0578 283	29 313	2,600 0564 586	29 583	86 303	270
69	2,604 4007 596	29 315	2,604 3994 169	29 582	86 573	267
70	2,608 7436 911	29 318	2,608 7423 751	29 578	86 840	260
6,71	2,613 0866 229	43429 320	2,613 0853 329	43429 576	9,99999 87 100	256
72	2,617 4295 549	29 323	2,617 4282 905	29 573	87 356	250
73	2,621 7724 872	29 326	2,621 7712 478	29 571	87 606	245
74	2,626 1154 198	29 328	2,626 1142 049	29 569	87 851	241
75	2,630 4583 526	29 330	2,630 4571 618	29 566	88 092	236
6,76	2,634 8012 856	43429 333	2,634 8001 184	43429 564	9,99999 88 328	231
77	2,639 1442 189	29 335	2,639 1430 748	29 561	88 559	226
78	2,643 4871 524	29 337	2,643 4860 309	29 559	88 785	222
79	2,647 8300 861	29 339	2,647 8289 868	29 557	89 007	218
80	2,652 1730 200	29 342	2,652 1719 425	29 555	89 225	213
6,81	2,656 5159 542	43429 343	2,656 5148 980	43429 553	9,99999 89 438	210
82	2,660 8588 885	29 346	2,660 8579 533	29 551	89 648	205
83	2,665 2018 231	29 348	2,665 2008 084	29 548	89 853	200
84	2,669 5447 579	29 349	2,669 5437 632	29 547	90 053	198
85	2,673 8876 928	29 352	2,673 8867 179	29 545	90 251	193
6,86	2,678 2306 280	43429 354	2,678 2296 724	43429 543	9,99999 90 444	189
87	2,682 5735 634	29 355	2,682 5726 267	29 540	90 633	185
88	2,686 9164 989	29 357	2,686 9155 807	29 540	90 818	183
89	2,691 2594 346	29 360	2,691 2585 347	29 537	91 001	177
90	2,695 6023 706	29 360	2,695 6014 984	29 536	91 178	175
6,91	2,699 9453 066	43429 363	2,699 9444 419	43429 534	9,99999 91 353	171
92	2,704 2882 429	29 364	2,704 2873 953	29 532	91 524	168
93	2,708 6311 793	29 366	2,708 6303 485	29 531	91 692	165
94	2,712 9741 159	29 368	2,712 9733 016	29 529	91 857	161
95	2,717 3170 527	29 369	2,717 3162 545	29 527	92 018	158
6,96	2,721 6599 896	43429 371	2,721 6592 072	43429 525	9,99999 92 176	154
97	2,726 0029 267	29 372	2,726 0021 597	29 524	92 330	152
98	2,730 3458 639	29 374	2,730 3451 121	29 523	92 482	149
99	2,734 6888 013	29 375	2,734 6880 644	29 521	92 631	146
7,00	2,739 0317 388		2,739 0310 166		92 777	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
7,00	2,739 0317 368	43429 376	2,739 0310 165	43429 520	9,999 999 2 777	144
7,01	2,743 3746 764	43429 379	2,743 3739 686	43429 518	9,999 999 2 921	139
02	2,747 7176 143	29 379	2,747 7169 203	29 517	3 060	138
03	2,752 0605 522	29 381	2,752 0598 720	29 516	3 198	135
04	2,756 4034 903	29 382	2,756 4028 236	29 514	3 333	132
05	2,760 7464 285	29 384	2,760 7457 750	29 513	3 465	129
7,06	2,765 0893 669	43429 384	2,765 0887 263	43429 512	9,999 999 3 594	127
07	2,769 4323 053	29 386	2,769 4316 774	29 511	3 721	125
08	2,773 7752 439	29 386	2,773 7746 285	29 509	3 846	121
09	2,778 1181 827	29 388	2,778 1175 794	29 508	3 967	120
10	2,782 4611 215	29 390	2,782 4605 302	29 507	4 087	117
7,11	2,786 8040 605	43429 391	2,782 8034 809	43429 505	9,999 999 4 204	114
12	2,791 1469 996	29 392	2,791 1464 314	29 506	4 318	113
13	2,795 4899 388	29 393	2,795 4893 819	29 503	4 431	110
14	2,799 8328 781	29 394	2,799 8323 322	29 502	4 541	108
15	2,804 1758 175	29 395	2,804 1752 824	29 501	4 549	106
7,16	2,808 5187 570	43429 396	2,808 5182 325	43429 500	9,999 999 4 755	104
17	2,812 8616 966	29 398	2,812 8611 825	29 500	4 859	102
18	2,817 2046 364	29 398	2,817 2041 325	29 498	4 961	100
19	2,821 5475 762	29 399	2,821 5470 823	29 497	5 061	98
20	2,825 8905 161	29 400	2,825 8900 320	29 496	5 159	96
7,21	2,830 2334 561	43429 402	2,830 2329 816	43429 496	9,999 999 5 255	93
22	2,834 5763 963	29 402	2,834 5759 311	29 494	5 348	92
23	2,838 9193 365	29 403	2,838 9188 806	29 493	5 440	90
24	2,843 2620 768	29 404	2,843 2618 298	29 493	5 530	89
25	2,847 6052 172	29 405	2,847 6047 791	29 492	5 619	87
7,26	2,851 9481 577	43429 405	2,851 9477 283	43429 490	9,999 999 5 706	85
27	2,856 2910 982	29 407	2,856 2906 773	29 490	5 791	83
28	2,860 6340 389	29 407	2,860 6336 263	29 489	5 874	82
29	2,864 9769 796	29 408	2,864 9765 752	29 488	5 956	80
30	2,869 3199 204	29 409	2,869 3196 240	29 488	6 036	79
7,31	2,873 6628 613	43429 410	2,873 6624 728	43429 487	9,999 999 6 115	77
32	2,878 0058 023	29 410	2,878 0054 215	29 485	6 192	75
33	2,882 3487 433	29 412	2,882 3483 700	29 485	6 267	73
34	2,886 6916 845	29 412	2,886 6913 185	29 485	6 340	73
35	2,891 0346 257	29 412	2,891 0342 670	29 484	6 413	72
7,36	2,895 3775 669	43429 414	2,895 3772 154	43429 483	9,999 999 6 485	69
37	2,899 7205 083	29 414	2,899 7201 637	29 482	6 554	68
38	2,904 0634 497	29 414	2,904 0631 119	29 482	6 622	68
39	2,908 4063 911	29 416	2,908 4060 601	29 481	6 690	65
40	2,912 7493 327	29 416	2,912 7490 082	29 480	6 755	64
7,41	2,917 0922 743	43429 417	2,917 0919 562	43429 480	9,999 999 6 819	63
42	2,921 4352 160	29 417	2,921 4349 042	29 479	6 882	62
43	2,925 7781 577	29 418	2,925 7778 521	29 478	6 944	60
44	2,930 1210 995	29 418	2,930 1207 999	29 478	7 004	60
45	2,934 4640 413	29 419	2,934 4637 477	29 477	7 064	58
7,46	2,938 8069 832	43429 420	2,938 8066 954	43429 477	9,999 999 7 122	57
47	2,943 1499 252	29 420	2,943 1496 431	29 476	7 179	56
48	2,947 4928 672	29 421	2,947 4925 907	29 476	7 235	55
49	2,951 8358 093	29 422	2,951 8355 383	29 475	7 290	55
50	2,956 1787 515		2,956 1784 858		7 343	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
7,50	2,956 1787 515	43429 422	2,956 1784 868	43429 474	9,999 999 7 343	52
7,51	2,960 5216 937	43429 422	2,960 5214 332	43429 474	9,999 999 7 395	52
52	2,964 8646 369	29 423	2,964 8643 806	29 474	7 444	51
53	2,969 2075 782	29 423	2,969 2073 280	29 472	7 498	49
54	2,973 5505 205	29 424	2,973 5502 752	29 473	7 547	49
55	2,977 8934 629	29 425	2,977 8932 225	29 472	7 596	47
7,56	2,982 2364 054	43429 424	2,982 2361 697	43429 471	9,999 999 7 643	47
57	2,986 5793 478	29 426	2,986 5791 168	29 472	7 690	46
58	2,990 9222 904	29 426	2,990 9220 640	29 470	7 736	44
59	2,995 2652 330	29 426	2,995 2650 110	29 470	7 780	44
60	2,999 6081 756	29 426	2,999 6079 580	29 470	7 824	44
7,61	3,003 9511 182	43429 428	3,003 9509 050	43429 469	9,999 999 7 868	41
62	3,008 2940 610	29 427	3,008 2938 519	29 469	7 909	42
63	3,012 6370 037	29 428	3,012 6367 988	29 469	7 951	41
64	3,016 9799 465	29 428	3,016 9797 457	29 468	7 992	40
65	3,021 3228 893	29 429	3,021 3226 925	29 467	8 032	38
7,66	3,025 6658 322	43429 429	3,025 6656 392	43429 468	9,999 999 8 070	39
67	3,030 0087 751	29 429	3,030 0084 860	29 467	8 109	38
68	3,034 3517 180	29 430	3,034 3514 327	29 466	8 147	36
69	3,038 6946 610	29 430	3,038 6943 793	29 466	8 183	36
70	3,043 0376 040	29 431	3,043 0373 259	29 466	8 219	35
7,71	3,047 3806 471	43429 431	3,047 3802 725	43429 466	9,999 999 8 254	35
72	3,051 7234 902	29 432	3,051 7232 191	29 465	8 289	33
73	3,056 0664 334	29 431	3,056 0661 656	29 465	8 322	34
74	3,060 4093 765	29 432	3,060 4091 121	29 464	8 356	32
75	3,064 7523 197	29 432	3,064 7520 585	29 464	8 388	32
7,76	3,069 0952 629	43429 432	3,069 0950 049	43429 464	9,999 999 8 420	32
77	3,073 4382 061	29 433	3,073 4379 513	29 464	8 452	31
78	3,077 7811 494	29 433	3,077 7808 977	29 463	8 483	30
79	3,082 1240 927	29 434	3,082 1238 440	29 463	8 513	29
80	3,086 4670 361	29 434	3,086 4668 903	29 462	8 542	28
7,81	3,090 8099 795	43429 434	3,090 8098 365	43429 463	9,999 999 8 670	29
82	3,095 1529 229	29 434	3,095 1527 828	29 462	8 599	28
83	3,099 4058 663	29 435	3,099 4957 290	29 461	8 627	26
84	3,103 8388 098	29 434	3,103 8386 751	29 462	8 653	28
85	3,108 1817 532	29 435	3,108 1816 213	29 461	8 681	26
7,86	3,112 5246 967	43429 436	3,112 5245 674	43429 461	9,999 999 8 707	25
87	3,116 8676 403	29 436	3,116 8675 135	29 461	8 732	25
88	3,121 2105 839	29 436	3,121 2104 596	29 461	8 757	25
89	3,125 5535 275	29 436	3,125 5534 057	29 460	8 782	24
90	3,129 8964 711	29 436	3,129 8963 517	29 460	8 806	24
7,91	3,134 2394 147	43429 437	3,134 2392 977	43429 460	9,999 999 8 830	23
92	3,138 5823 584	29 437	3,138 5822 437	29 459	8 853	22
93	3,142 9253 021	29 436	3,142 9251 896	29 459	8 875	23
94	3,147 2682 457	29 438	3,147 2681 355	29 460	8 898	22
95	3,151 6111 895	29 437	3,151 6110 815	29 458	8 920	21
7,96	3,155 9541 332	43429 438	3,155 9540 273	43429 459	9,999 999 8 941	21
97	3,160 2970 770	29 438	3,160 2960 732	29 459	8 962	21
98	3,164 6400 208	29 438	3,164 6399 191	29 458	8 983	20
99	3,168 9829 646	29 438	3,168 9828 640	29 458	9 003	20
8,00	3,173 3259 084		3,173 3258 107		9 023	—

(Die Fortsetzung folgt.)

17.

De resulutione algebraica aequationis $X^{257}=1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata.

(Cont. Diss. Vol. IX. Fasc. 1. et 2.)

(Auct. *Richelot*, Doct. phil. Regiom.)

X.

Introducatur haec notatio:

Sit $\sigma=\cos\frac{2\varkappa\pi}{257}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{257}$ radix quaelibet imaginaria aequationis $X^{257}=1$ adhuc indeterminata. — Iisdem deinde signis pro σ ac in articulo I. pro r adhibitis, uncorum vero forma commutata, ponatur:

$$[2,1]=p_0=\sigma+\frac{1}{\sigma}=[1]+[3^{128}]=[1]+[256]$$

$$[2,3]=p_1=\sigma^3+\frac{1}{\sigma^3}=[3]+[3^{129}]=[3]+[254]$$

$$[2,3^2]=p_2=\sigma^{3^2}+\frac{1}{\sigma^{3^2}}=[3^2]+[3^{130}]=[9]+[248]$$

$$[2,3^3]=p_3=\sigma^{3^3}+\frac{1}{\sigma^{3^3}}=[3^3]+[3^{131}]=[27]+[230]$$

etc.

$$[2,3^{127}]=p_{127}=\sigma^{3^{127}}+\frac{1}{\sigma^{3^{127}}}=[3^{127}]+[3^{255}]=[3^{127}]+[257-3^{127}]$$

ubi rursus in uncis multipla numeri 257 desumere licet a potestatibus numeri 3. Iam per se clarum est, valores $p_0, p_1, \ldots\ldots p_{127}$ convenire cum his:

$$2\cos\frac{2\pi}{257},\quad 2\cos\frac{4\pi}{257},\quad 2\cos\frac{6\pi}{257},\quad \ldots,\quad 2\cos\frac{256\pi}{257},$$

licet in prorsus alio ordine scriptis.

Aequatio 128ti ordinis, cuius radices sunt $p_0, p_1, p_2, \ldots\ldots p_{127}$, ex aequatione hac:

$$X^{256}+X^{255}+\ldots\ldots+X+1=0,$$

ibi substitutione $y=X+\frac{1}{X}$ adhibita, oriatur necesse est. Quae aequatio

128ti ordinis, fit:

$$0 = y^{128} + y^{127} - 127 y^{126} - 126 y^{125} + \frac{126.125}{1.2} y^{124} + \frac{125.124}{1.2} y^{123}$$
$$- \frac{125.124.123}{1.2.3} y^{122} - \frac{124.123.122}{1.2.3} y^{121} + \text{etc.}$$

Cuius aequationis coefficientes coefficientibus evolutae formulae $(y-2)^{128}$ secundum modulum 257 congruos esse notum est.

Ponamus porro: $R = \cos\frac{\pi}{64} + i \sin\frac{\pi}{64}$, unde hae aequationes in sequentibus saepissime adhibitae derivatae sunt:

$$R^{128+m} = R^{128} = 1,$$

nec non posito $n < 64$:

$$1. \quad \begin{cases} R^n + R^{64+n} = 0, \\ R^n + R^{64-n} = 2 i \sin\frac{n\pi}{64}, \\ R^n - R^{64-n} = 2 \cos\frac{n\pi}{64}, \end{cases}$$

$$R^{32} = +i, \quad R^{64} = -1, \quad R^{96} = -i, \quad R^{128} = 1.$$

Rursus denique fit:

$$f_1 = p_0 + p_1 R + p_2 R^2 + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127},$$

nec non:

$$f_2, \quad f_3, \quad f_4, \quad \text{etc.} \quad f_{127},$$

vetere gaudeant significatione, quae functiones sequenti ratione determinandae sunt. Rursus vero erit:

$$f_{128} = -1.$$

Notas esse pono nec alia ratione quam in artic. VII. demonstrandas propositiones has: *Primum:* productum $f_1 . f_m$ semper fore formae: $= [F(R)] . f_{(1+m)}$, ubi $F(R)$ nonnisi quantitatis R potestates contineat, haud vero quantitates p;

deinde: $F(R)$ esse coefficientem quantitatis p_0, provenientem in evolutione producti illius, omnibus productis quantitatum p ad lineares functiones quantitatum p reductis;

tum: productum $p_q . p_n$ evolutum in linearem formam quantitatum p non contenturum esse quantitatem p_0 nisi aut $q = n$, aut p_q et p_n tales quantitates $[2, 3^q]$ et $[2, 3^n]$ sint, quarum loco aequivalentibus $(2, \varkappa)$ atque $(2, \nu)$ substitutis, (ubi $\varkappa$ et $\nu \gtrless 128$,) $\varkappa$ et ν conditioni $\nu = \varkappa \pm 1$ satisfaciant.

Postremo: Ex aequatione:

$$f_1 . f_m = [F(R)] . f_{(1+m)},$$

protinus derivari posse hanc:

$$f_{(s)} . f_{(sm)} = [F(R^s)] . f_{(s(1+m))},$$

ubi m **et** s **integros numeros significent.**

Quarum propositionum tertiam adhuc ita facile demonstremus. Habemus:

$$p_q . p_n = [2, \varkappa] . [2, \nu],$$

sive cum

$$[2, \varkappa] = [\varkappa] + [257 - \varkappa] \text{ sit,}$$

nec non

$$[2, \nu] = [\nu] + [257 - \nu];$$

ex theoremate satis noto est:

$$[2, \varkappa] . [2, \nu] = [2, \varkappa + \nu] + [2, 257 - \varkappa + \nu],$$

sive

$$= [2, \varkappa + \nu] + [2, 257 - \nu + \varkappa].$$

Ut igitur hîc proveniat quantitas p_0 **sive** $[2, 1]$, **fiat necesse est:**

$$\begin{array}{llll} & \varkappa + \nu = 1 & \text{aut} & 257 - \varkappa - \nu = 1, \\ \text{aut} & 257 - \varkappa + \nu = 1 & \text{aut} & -\varkappa + \nu = 1, \\ \text{aut} & 257 - \nu + \varkappa = 1 & \text{aut} & -\nu + \varkappa = 1. \end{array}$$

Inde clarum fit, pro $\varkappa$ **et** ν **inter se inaequalibus, ex sex illis conditionibus, cum** $\varkappa$ **et** ν **positivi numeri** $\leqq 128$ **sint, nonnisi quartam et sextam stare posse, q. d. e.**

Sin vero $\varkappa = \nu$, **etiam fore constat:**

$$\begin{aligned} (p_q)^2 = [2, \varkappa] . [2, \varkappa] &=]2, 2\varkappa] + [2, 257], \\ &= [2, 2\varkappa] + [0] + [257], \\ &= 2 + [2, 2\varkappa]. \end{aligned}$$

Hanc ob rem, cum habeamus:

$$2 = -2p_0 - 2p_1 - 2p_2 \text{ etc. } - 2p_{127},$$

coefficientem quantitatis p_0 **in evolutione quadrati** $(p_q)^2$ **omnino esse** $= -2$ **clarum fit.**

Casus unus excipiatur vero necesse est, si $\varkappa = \nu = 128$ **est; tum enim fit** $[2, 2\varkappa] = [2, 1] = p_0$, **unde sequitur in hoc uno casu coefficientem quantitatis** p_0 **fore** $= -1$.

Ad usum sequentem tertiam construxi tabulam, ubi in superiori singula serie posita sunt aggregata formae $[2, \varkappa]$, **ita ut numerus** $\varkappa$ **ex ordine legatur, in inferiori singula quaeque quantitas** p, **cum singulo quoque aggregato** $[2, \varkappa]$ **supra stante congruens.**

Tabula tertia.

[2,1]	[2,2]	[2,3]	[2,4]	[2,5]	[2,6]	[2,7]	[2,8]	[2,9]	[2,10]	[2,11]	[2,12]	[2,13]	[2,14]	[2,15]	[2,16]
p_{0}	p_{48}	p_{1}	p_{96}	p_{55}	p_{49}	p_{85}	p_{16}	p_{2}	p_{103}	p_{68}	p_{97}	p_{106}	p_{5}	p_{56}	p_{64}
[2,17]	[2,18]	[2,19]	[2,20]	[2,21]	[2,22]	[2,23]	[2,24]	[2,25]	[2,26]	[2,27]	[2,28]	[2,29]	[2,30]	[2,31]	[2,32]
p_{120}	p_{50}	p_{125}	p_{23}	p_{86}	p_{116}	p_{28}	p_{17}	p_{110}	p_{26}	p_{3}	p_{53}	p_{94}	p_{104}	p_{114}	p_{112}
[2,33]	[2,34]	[2,35]	[2,36]	[2,37]	[2,38]	[2,39]	[2,40]	[2,41]	[2,42]	[2,43]	[2,44]	[2,45]	[2,46]	[2,47]	[2,48]
p_{69}	p_{40}	p_{12}	p_{98}	p_{91}	p_{45}	p_{107}	p_{71}	p_{19}	p_{6}	p_{79}	p_{36}	p_{57}	p_{76}	p_{61}	p_{65}
[2,49]	[2,50]	[2,51]	[2,52]	[2,53]	[2,54]	[2,55]	[2,56]	[2,57]	[2,58]	[2,59]	[2,60]	[2,61]	[2,62]	[2,63]	[2,64]
p_{42}	p_{30}	p_{121}	p_{74}	p_{89}	p_{51}	p_{123}	p_{101}	p_{126}	p_{14}	p_{118}	p_{24}	p_{10}	p_{34}	p_{87}	p_{32}
[2,65]	[2,66]	[2,67]	[2,68]	[2,69]	[2,70]	[2,71]	[2,72]	[2,73]	[2,74]	[2,75]	[2,76]	[2,77]	[2,78]	[2,79]	[2,80]
p_{33}	p_{117}	p_{100}	p_{88}	p_{29}	p_{60}	p_{35}	p_{18}	p_{44}	p_{11}	p_{111}	p_{93}	p_{25}	p_{27}	p_{22}	p_{119}
[2,81]	[2,82]	[2,83]	[2,84]	[2,85]	[2,86]	[2,87]	[2,88]	[2,89]	[2,90]	[2,91]	[2,92]	[2,93]	[2,94]	[2,95]	[2,96]
p_{4}	p_{67}	p_{15}	p_{54}	p_{47}	p_{127}	p_{95}	p_{84}	p_{102}	p_{105}	p_{63}	p_{124}	p_{115}	p_{109}	p_{52}	p_{113}
[2,97]	[2,98]	[2,99]	[2,100]	[2,101]	[2,102]	[2,103]	[2,104]	[2,105]	[2,106]	[2,107]	[2,108]	[2,109]	[2,110]	[2,111]	[2,112]
p_{39}	p_{90}	p_{70}	p_{78}	p_{75}	p_{41}	p_{73}	p_{122}	p_{13}	p_{9}	p_{31}	p_{99}	p_{59}	p_{43}	p_{92}	p_{21}
[2,113]	[2,114]	[2,115]	[2,116]	[2,117]	[2,118]	[2,119]	[2,120]	[2,121]	[2,122]	[2,123]	[2,124]	[2,125]	[2,126]	[2,127]	[2,128]
p_{66}	p_{46}	p_{83}	p_{62}	p_{108}	p_{38}	p_{77}	p_{72}	p_{8}	p_{58}	p_{20}	p_{82}	p_{37}	p_{7}	p_{81}	p_{80}

Ex tabula tertia primum derivatur, illam quantitatem p_m, quae congruat cum [2,128], hancque ob rem cuius quadratum p_m^2 contineat non -2 sed -1 tanquam coefficientem quantitatis p_0, esse $= p_{80}$.

Iam vero nunc nihil est facilius quam determinare $F(R)$; cum enim habeamus

$$f_1 = p + p_1 R + p_2 R^2 + p_3 R^3 + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127}$$
$$f_m = p + p_1 R^m + p_2 R^{2m} + p_3 R^{3m} + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127m}$$

in producto $f_1 . f_m$, coefficiens quantitatis $p_q . p_n$ erit $= R^{n+qm} + R^{m+qn}$, si q et n inaequales sint; sin vero $q = n$, coefficiens ille fit $= R^{n(m+1)}$.

Ex tabula igitur tertia sensim sensimque loguntur omnia producta $p_q . p_n$, binas ibi se excipientes quantitates p coniungendo, ex singula vero quoque producto desumitur coefficiens $R^{n+qm} + R^{q+m.n}$. Ad summam omnium harum potestatum quantitatis R significatam per $\Sigma(R^{n+qm} + R^{q+m.n})$ adiicitur hoc aggregatum:

$$+ 2(1 + R^{(m+1)} + R^{2(m+1)} + \text{etc.} \quad + R^{127(m+1)}) + R^{80(m+1)};$$

quod ex coefficientibus quadratorum quantitatum p derivatur; inde sequitur:

$$2. \quad FR = \left\{ \begin{array}{c} \Sigma(R^{n+qm} + R^{q+m.n}) + R^{80(m+1)} \\ -2(1 + R^{(m+1)} + R^{2(m+1)} + \text{etc.} \quad + R^{127(m+1)}) \end{array} \right\}.$$

Quia vero omnes exponentes potestatum R hic provenientes, multipla numeri 128 subtrahendo $\leqq 128$ reddendi sunt, ad construendam pro singulo quoque numero m aggregatum $\Sigma(R^{n+qm} + R^{q+m.n})$ adhiberi potest

tabula, minima residua positiva et negativa numerorum horum:

$$m,\quad 2m,\quad 3m,\quad \text{etc.}\qquad 127m$$

secundum modulum 128 continens, unde igitur residua minima productorum nm et qm protinus inveniantur.

Transgrediamur igitur primum ad determinandam quantitatem FR pro $m=1$; ubi ipsa FR significetur per $F^1(R)$, ita ut habeamus:

$$f_1 f_1 = (F^1(R)) f_2.$$

Aggregatum $\Sigma(R^{n+mq}+R^{q+mn})$ fiet in hac suppositione formae $\Sigma(2R^{(n+m)})$. Altera pars quantitatis F^1R ex quadratis quantitatum p, emanens erit:

$$= -2(1+R^2+R^4+R^6+\text{etc.}\quad +R^{254})+R^{160}$$

$$\text{sive} = -4(R^2+R^4+R^6+R^8+\text{etc.}\quad +R^{128})+R^{32},$$

ita ut habeamus hunc valorem ipsius F^1R:

$$F^1(R)=\left\{\begin{array}{l}
+\frac{R^{32}}{2}+R^{48}+R^{49}+R^{97}+R^{23}+R^{104}+R^{6}+R^{101}+R^{18}+R^{105}+R^{43}+R^{37}+R^{75}+R^{111}+R^{61}+R^{126}\\
+R^{56}+R^{42}+R^{47}+R^{20}+R^{109}+R^{74}+R^{16}+R^{45}+R^{127}+R^{81}+R^{29}+R^{66}+R^{19}+R^{70}+R^{90}+R^{98}\\
+R^{53}+R^{109}+R^{52}+R^{110}+R^{61}+R^{8}+R^{24}+R^{50}+R^{90}+R^{25}+R^{86}+R^{115}+R^{93}+R^{6}+R^{9}+R^{112}\\
+R^{107}+R^{72}+R^{25}+R^{67}+R^{39}+R^{12}+R^{46}+R^{96}+R^{99}+R^{12}+R^{4}+R^{14}+R^{34}+R^{44}+R^{121}+R^{119}\\
+R^{65}+R^{22}+R^{89}+R^{60}+R^{47}+R^{69}+R^{95}+R^{53}+R^{62}+R^{55}+R^{122}+R^{76}+R^{118}+R^{82}+R^{40}+R^{13}\\
+R^{123}+R^{71}+R^{82}+R^{69}+R^{101}+R^{46}+R^{94}+R^{51}+R^{58}+R^{79}+R^{40}+R^{59}+R^{111}+R^{96}+R^{38}+R^{97}\\
+R^{24}+R^{1}+R^{32}+R^{26}+R^{25}+R^{116}+R^{114}+R^{67}+R^{7}+R^{22}+R^{40}+R^{2}+R^{30}+R^{102}+R^{7}+R^{113}\\
+R^{87}+R^{112}+R^{1}+R^{17}+R^{42}+R^{18}+R^{115}+R^{21}+R^{80}+F^{66}+R^{78}+R^{102}+R^{119}+R^{44}+R^{88}+R^{83}\\
-2R^{2}-2R^{4}-2R^{6}-\text{etc.}\qquad -2R^{128}.
\end{array}\right.$$

Per se clarum est, inde $F^1(R^x)$ derivari eo posse, quod ubique R^x pro ipso R ponatur.

Quem ad finem sequentes aequationes ex iis derivatae, quae sub **1)** continentur, afferantur.

Numerus x est, quod attinet ad formam suam:

aut $128n$, aut $64(2n+1)$, aut $32(2n+1)$, aut $16(2n+1)$, aut $8(2n+1)$, aut $4(2n+1)$, aut $2(2n+1)$, aut $(2n+1)$,

ubi n numerum quemlibet significet; quibus positis hae aequationes *respective* valent pro singulis ipsius x formis:

$$3.\quad \left\{\begin{array}{l}
R^{xs}=1,\quad R^{xs}+R^{x(s+1)}=0,\quad R^{xs}+R^{x(s+2)}=0,\quad R^{xs}+R^{x(s+4)}=0,\\
R^{xs}+R^{x(s+8)}=0,\quad R^{xs}+R^{x(s+16)}=0,\quad R^{xs}+R^{x(s+32)}=0,\quad R^{xs}+R^{x(s+64)}=0,
\end{array}\right.$$

ubi s quemlibet significet numerum integrum positivum.

Unde sequitur, pro omnibus formis numeri x, prima excepta, hanc stare aequationem:

$$4.\quad R^x+R^{2x}+R^{3x}+R^{4x}+\text{etc.}\qquad +R^{128x}=0,$$

quia pro omnibus ceteris formis, quisque terminus habeat in hac expressione talem alterum, quo adiecto, summa fiat $=0$.

Eodem modo facile intelligitur, sequentes aequationes pro omnibus formis numeri x valere, utraque priori excepta:

$$5.\quad \begin{cases} R^{2x}+R^{4x}+R^{6x}+\text{etc.} & +R^{128x}=0, \\ R^{x}+R^{3x}+R^{5x}+\text{etc.} & +R^{127x}=0. \end{cases}$$

Prorsus simili ratione ex iisdem causis progrediendum esset.

Omnibus his aequationibus ad functiones formae $F^1(R^x)$ quam facillime derivandas ex generali formula $F^1(R)$ ita utimur.

Primum cum clarum sit: $R^{128\cdot}$ esse $=R^{128}=1$, in quantitate $F^1(R)$ pro quaque singula potestate ipsius R, R^{128} scribendum est; ut inde efficiatur: $F^1(R^{128})$. Inde fit:

$$6.\quad F^1(R^{128})=-R^{128}=-1.$$

Deinde cum habeamus: $R^{64(2h+1)}=R^{64}=-1$, et $R^{64(2h)}=R^{128}=+1$, in $F^1(R)$ pro omnibus imparibus potestatibus ipsius R scribendum est R^{64}, pro omnibus vero paribus R^{128}, ut inde efficiatur $F^1(R^{64(2n+1)})$. Inde fit:

$$7.\quad \begin{cases} F^1(R^{64}) = -129R^{128}+128R^{64}, \\ \text{sive} \quad = -257. \end{cases}$$

Pro omnibus vero quantitatibus $F^1(R^x)$, ubi x ceteras formas induit, non minus formula generalis multo brevior reddi potest. Cum enim pro his formis habeamus aequationes (5.), etiam ad illum valorem generalem adiicere possumus has expressiones:

$$\begin{aligned} &+2(R^2+R^4+R^6+\text{etc.} \quad +R^{128}) \\ &-2(R+R^3+R^5+\text{etc.} \quad +R^{127}), \end{aligned}$$

quippe quae in omnibus ceteris suppositionibus pro x, excepta $x=128n$ et $x=64(2n+1)$, ipsae manent $=0$.

Quo facto expressio generalis quantitatis $F^1(R)$, unde $F^1(R^x)$ loco ipsius R posito R^x semper adhuc derivari potest, haec fit:

$$8.\quad F^1(R)=\begin{cases} -2+2R^1-2R^3+2R^7+2R^8-2R^{10}-2R^{11}+2R^{12}-2R^{15}+2R^{18} \\ +2R^{20}+2R^{22}+2R^{23}+2R^{24}+2R^{25}-2R^{26}-2R^{27}-2R^{28}-2R^{31}+R^{32} \\ +2R^{33}-2R^{36}+2R^{37}-2R^{38}-2R^{39}+2R^{40}-2R^{41}+2R^{42}+2R^{44}+2R^{46} \\ +2R^{49}+2R^{52}+2R^{53}-2R^{54}+2R^{55}-2R^{57}+2R^{61}-2R^{63}-2R^{64}+2R^{67} \\ -2R^{68}-2R^{73}-2R^{77}-2R^{81}-2R^{83}-2R^{84}-2R^{86}+2R^{89}+2R^{90}-2R^{94} \\ -2R^{96}+2R^{98}-2R^{100}+2R^{101}+2R^{102}-2R^{103}-2R^{106}-2R^{108}+2R^{109}+2R^{111} \\ -2R^{115}+2R^{119}-2R^{124}+2R^{125}. \end{cases}$$

In qua formula ubique pro ipso R positis respective R^{32}, R^{16}, R^{8}, R^{4}, R^{2}, R, omnibusque exponentibus inde emergentibus $\leqq 128$ redditis, adhibitisque in quoque singulo casu aptis aequationibus inter has: $R^{0}+R^{64}=0$, $R^{1}+R^{65}=0$, etc., has invenimus formulas:

9. $F^{x}(R^{32}) = -1+16R^{32}$,

10. $F^{x}(R^{16}) = 15-4\begin{Bmatrix}+R^{16}\\+R^{48}\end{Bmatrix}$,

11. $F^{x}(R^{8}) = -9+4\begin{Bmatrix}+R^{16}\\-R^{48}\end{Bmatrix}+6\begin{Bmatrix}R^{8}+R^{24}\\\pm R^{56}+R^{40}\end{Bmatrix}$,

12. $F^{x}(R^{4}) = -1+2\begin{Bmatrix}-R^{8}+R^{20}+R^{24}\\+R^{56}+R^{44}-R^{40}\end{Bmatrix}+4\begin{Bmatrix}+R^{4}\\+R^{60}\end{Bmatrix}+6\begin{Bmatrix}-R^{28}\\-R^{36}\end{Bmatrix}+8\begin{Bmatrix}-R^{16}\\+R^{48}\end{Bmatrix}$,

13. $F^{x}(R^{2}) = 2\begin{Bmatrix}+R^{8}-R^{20}-R^{22}+R^{24}-R^{28}\\-R^{56}+R^{44}-R^{42}-R^{40}+R^{36}\end{Bmatrix}+4\begin{Bmatrix}-R^{10}-R^{26}-R^{30}\\-R^{54}-R^{38}-R^{34}\end{Bmatrix}+6\begin{Bmatrix}+R^{14}\\+R^{50}\end{Bmatrix}$,

14. $F^{x}(R^{1}) = -R^{32}$

$$+2\begin{Bmatrix}+R+R^{4}+R^{7}+R^{8}+R^{9}-R^{10}-R^{11}+R^{12}+R^{13}-R^{15}+R^{17}+R^{18}+R^{19}+R^{23}+R^{24}-R^{31}\\-R^{63}+R^{60}-R^{57}+R^{56}-R^{55}-R^{54}+R^{53}+R^{62}-R^{51}+R^{49}-R^{47}+R^{46}-R^{45}-R^{41}+R^{40}+R^{33}\end{Bmatrix}$$

$$+4\begin{Bmatrix}-R^{3}+R^{20}+R^{22}-R^{26}\\+R^{61}+R^{44}+R^{42}-R^{38}\end{Bmatrix}.$$

Ex his formulis ubique $R^{(2n+1)}$ loco ipsius R posito, sive omnium potestatum ipsius R exponentibus per $(2n+1)$ multiplicatis, inde oriuntur verae formulae functionum:

$$F^{x}R^{32(2n+1)},\quad F^{x}R^{16(2n+1)},\quad F^{x}R^{8(2n+1)},\quad F^{x}R^{4(2n+1)},\quad F^{x}R^{2(2n+1)},\quad F^{x}R^{2n+1}.$$

Quippe quod per aequationes (3.) clarum fit, quae docent, illas aequationes $R^{0}+R^{64}=0$, $R^{1}+R^{65}=0$, etc., quibus adhibitis generalis formulae (8.) termini in speciali quoque casu minuti sint, loco R posito R^{2n+1}, haud mutari.

Priusquam has functiones $F^{x}R$ relinquamus, de memorabili earum natura disserendum est.

Primum facile ex formulis (9.), (10.) etc. desumitur, quadrata coefficientium potestatum ipsius R esse $=257$. Habemus enim:

in formula (9.): $1+16^{2}=257$,
in formula (10.): $15^{2}+2.4^{2}=257$,
in formula (11.): $9^{2}+2.4^{2}+4.6^{2}=257$,
in formula (12.): $1+6.2^{2}+2.4^{2}+2.6^{2}+2.8^{2}=257$,
in formula (13.): $10.2^{2}+6.4^{2}+2.6^{2}=257$,
in formula (14.): $1+16.2^{2}+8.4^{2}=257$.

Quippe quam proprietatem iam in priori parte animadvertimus, et unde sequitur harum functionum indolem cum numeri 257 compositione ex quadratis arctissime cohaerere.

Tum vero et per se clarum est, et ex formulis comprehenditur quantitatem $F^1 R^x$, si x forma $2^h(2n+1)$, ubi $h < 7$, gaudeat, ex terminis solis formae $m R^{2^h t(2n+1)}$, ubi m et t numeri integri sint, componi, nec non significari posse, his conditionibus valentibus: $F^1 R^x$ per $\Sigma m R^{2^h t(2n+1)}$, si antea fuerat $F^1 R^{2^h}$ per $\Sigma m R^{2^h t}$ expressum; qua proprietate adhibita, haec memorabilia thereomata sequuntur:

Si, $x = 2^h(2n+1)$ posito, $h < 6 > 0$ est, semper erit

$$\sin h = 0, \quad \begin{array}{l} F^1 R^x = F^1 R^{64-x} \\ F^1 R^x = R^{64} F^1 (R^{64-x}). \end{array}$$

Demonstratio: Numerus $64-x$ eadem forma, qua x ipse, gaudet, erit enim:

$$64 - x = 64 - 2^h(2n+1) = 2^h(2(2^{6-h} - n - 1) + 1);$$

hanc ob rem $64-x$ loco ipsius x in omnibus formulis ubi $h < 6$ est, substituere licet.

Formulas vero omnes accuratius perspicientem haud fugere potest, cuique termino formae $mR^{2^h(2n+1)t}$ alterum subscriptum esse formae $mR^{(2n+1)(64-2^h t)}$, (in formulis praemissis ipsis $n = 0$ est) eosque binos terminos in formulis (9.), (10.), (11.), (12.), si t est numerus impar, eodem signo, si t est numerus par, contrario frui signo. Ex qua regula soli primi termini integros numeros continentes excipiuntur. Ponere igitur licet

$$F^1 R^{2^h(2n+1)} = r + \Sigma \begin{pmatrix} \pm m R^{2^h(2l+1)(2n+1)} & \pm 9 R^{2^h 2l(2n+1)} \\ \pm m R^{(64-2^h(2l+1))(2n+1)} & \mp 9 R^{(64-2^h 2l)(2n+1)} \end{pmatrix},$$

ubi r, m, q, l numeri integri sunt. Iam vero si loco ipsius $2^h(2n+1)$, $64 - 2^h(2n+1)$ substituamus, fit, aequationibus (1.) et (2.) adhibitis:

$$\begin{array}{lll} \pm m R^{2^h(2l+1)(2n+1)} & \text{fit: } \pm m R^{(64-2^h(2n+1))(2l+1)} & = \pm m R^{(2n+1)(64-2^h(2l+1))} \\ \pm m R^{(64-2^h(2l+1))2n+1} & \text{fit: } \pm m R^{2^h(2l+1)(2n+1)} & \\ \pm 9 \; R^{2^h . 2l . 2n+1} & \text{fit: } \pm 9 \; R^{(64-2^h(2n+1))2l} & = \mp 9 R^{(64-2^h . 2l)2n+1} \\ \mp 9 \; R^{(64-2^h . 2l)2n+1} & \text{fit: } \pm 9 \; R^{(2^h . 2l . 2n+1} & \end{array}$$

quibus valoribus congregatis, signoque Σ adiecto, formulaque inde emergente pro $[F^1 R^{64-2^h(2n+1)}] - r$, cum antea allata pro $[F^1 R^{2^h(2n+1)}] - r$ comparata, positis, sponte inde fluit theorema demonstrandum primum:

$$F^1 R^{2^h(2n+1)} = F^1 R^{64-2^h(2n+1)}$$

si $h<6$ et >0 ponatur.

Si vero $h=0$ est, formula (13.) provenit, cuius prorsus contraria natura haud difficilius in oculos cadit.

Quamquam etiam hic inveniuntur termini bini correspondentes, $mR^{(2N+1)t}$ et $mR^{(2n+1)(64-t)}$ tamen hic, si t est numerus par, sunt signa utriusque termini paria, si t impar, imparia; praeterea ibi legitur unus terminus solus: $-R^{32(2n+1)}$.

Ponere igitur possumus:

$$F^1 R^{2n+1} = -R^{32(2N+1)} + \Sigma \begin{Bmatrix} \pm m R^{(2n+1)(2l+1)} & \mp m R^{(2n+1)(64-(2l+1))} \\ \pm q\, R^{(2n+1)(2l)} & \pm q R^{(2n+1)(64-2l)} \end{Bmatrix}.$$

Iam ibi ponamus:

$$\begin{aligned} N &= 2^5 - n - 1 \\ &= 31 - n \end{aligned}$$

unde fit:

$$F^1 R^{64-(2N+1)} = -R^{32(63-2m)} + \Sigma \begin{Bmatrix} \pm m\, R^{(63-2n)(2l+1)} & \mp m R^{(63-2n)(64-(2l+1))} \\ \pm q\, R^{(63-2n)2l} & \pm q R^{(63-2n)(64-2l)} \end{Bmatrix}.$$

Iam rursus ex aequationibus (2.) sequuntur hae:

$$\begin{aligned} -R^{32(63-2n)} &= +\; R^{32(2n+1)} \\ \pm m R^{(63-2n)(2l+1)} &= \pm m R^{(2n+1)(64-(2l+1))} \\ \pm m R^{(63-2n)(64-(2l+1))} &= \pm m R^{(2n+1)(2l+1)} \\ \pm\; q R^{(63-2n)2l} &= \mp\; q R^{(2N+1)(64-2l)} \\ \pm\; q R^{(63-2n)(64-2l)} &= \pm\; q R^{(2N+1)2l}. \end{aligned}$$

Quibus valoribus supra rursus substitutis, tota formula cum superiori collata atque $N=n$ posito, theorema secundum demonstrandum se offert:

$$F^1 R^{(2n+1)} = -F^1 R^{64-(2n+1)} = R^{64}.F^1(R^{64-(2n+1)}).$$

Haec fuerunt theoremata quae ex functionum F^1 forma sola, derivari potuerunt; quippe quae functiones quasi fundamentales in tota solutione erunt, his sequentibus solis adiectis.

Ponamus enim secundum:

$$f_x . f_{3x} = [F^{\text{II}}(R^x)] . f_{4x}$$

ubi rursus $F^{\text{II}}(R^x)$ quantitas, quae ex integris potestatibus ipsius R, integris coefficientibus gaudentibus, componitur. Id vero licere ex prima huius articuli propositione fluit. Prorsus simili in via proficiscentes ac apud functiones F^1, generales formas functionum $F^{\text{II}}(R^{128})$, $F^{\text{II}}(R^{64})$, $F^{\text{II}}(R^{32})$ etc. nancisci potuissemus, quae loco ipsius R, R^{2n+1} posito, verae manerent. Unde has

$F''(R^{16}) = F' R^{16}$,

generales formas eruimus: $F''(R^{64}) = F'' R^{32} = -257$,

$F''(R^{128}) = -1$, $F''(R^{8}) = -2R^{40} + 3 + 6R^{24} + 8R^{8} + 12R^{48}$,

$F''(R^{4}) = (1-R^{36}) + 2(R^{8}+R^{12}+R^{20}+R^{24}-R^{56}) + 3(R^{60}-R^{28}) + 4(R^{16}+R^{32}+R^{52}) + 5R \; R^{60}-R^{2}-R^{20}-R^{32}$

$F''(R^{4}) = (1-R^{36}) + 2(R^{8}+R^{12}+R^{20}+R^{24}-R^{56})$ [sic] $R^{18}-R^{48}+2)R^{8}+R^{28}+R^{40}+R^{54}+R^{60}-R^{2}-R^{20}-R^{32} - 5(R^{10}) + 6(-R^{16}$

$$F'' R^{2} = \begin{cases} (R^{4}+R^{26}+R^{42}+R^{58}-R^{18}-R^{16}-R^{46}-R^{62}) + 4(R^{6}+R^{30}-R^{40}-R^{60}) \\ +3(1+R^{34}-R^{14}-R^{16}-R^{46}-R^{62}) + 4(R^{6}+R^{30}-R^{40}-R^{60}) + R^{45}+R^{60}+R \end{cases}$$

$(R^{4}+R^{26}+R^{42}+R^{58}-R^{18}-R^{16}-R^{46}-R^{62}) + 4(R^{6}+R^{30}-R^{40}-R^{60} + R^{41}+R^{42}+R^{44}+R^{45}+R^{60}+R$

$+3(1+R^{34}-R^{14}-R^{16}-R^{46}-R^{62}+R^{27}+R^{40}+R^{41}+R^{42} \ldots -R^{52}-R^{54}-R^{58}$

$$F''(R^{1}) = \begin{cases} R^{1}+R^{10}+R^{19}+R^{20}+R^{22}+R^{26}+R^{27}+R^{40}+R^{41}+R^{42}+R^{44}+R^{45}+R^{60}+R \\ -1-R^{2}-R^{3}-R^{12}-R^{17}-R^{30}-R^{35}-R^{36}-R^{39}-R^{46}-R^{52}-R^{54}-R^{58} \\ +2(R^{5}+R^{9}+R^{13}+R^{16}+R^{48}+R^{60}-R^{18}-R^{21}-R^{29}-R^{34}-R^{38}-R^{58}) \\ +3(R^{4}+R^{14}+R^{47}+R^{53}+R^{55}-R^{15}-R^{23}-R^{24}-R^{59}) + 5(R^{33}+R^{37}+R^{62}+R^{12} \end{cases}$$

Hic rursus in functionibus $F''(R^{16})$, $F'' R^{8}$, $F'' R^{2}$, $F'' R$ summa quadratorum coefficientium potestatum ipsius $R = 257$ erit:

apud $F''(R^{16}) =$ sicut apud $F' R^{16} = 257$,

apud $F''(R^{8}) = 2^2 + 3^2 + 6^2 + 8^2 + 12^2 = 257$,

apud $F''(R^{4}) = 2.1^2 + 5.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + 5^2 + 12^2 = 257$,

apud $F''(R^{2}) = 6.1^2 + 9.2^2 + 6.3^2 + 4.4^2 + 5^2 + 2.6^2 = 257$,

apud $F'' R^{1} = 28.1^2 + 12.2^2 + 9.3^2 + 4.5^2 = 257$.

Iam transeamus ad novas quantitates F''', hac aequatione sequentes:

$$f_x . f_{7x} = (F'''(R^x)) f_{8x}$$

i. e. tales in quibus R^{2n+1} loco ipsius R substituere licet, sunt hae:

quarum formae generales, $F'''(R^{8}) = F'(R)$,

$F'''(R^{128}) = -1$, $F'''(R^{64}) = F'''(R^{32}) = F''' R^{16} = -257$, $F'''(R^{8}) = F'(R)$, $+6R^{16}-10R^{56}$,

$F'''(R^{4}) = R^{4}+R^{12}+R^{16}-R^{28}+2(R^{40}-R^{48})+3(1-R^{20}-R^{60})+4(R^{32}-R^{24})+5(R^{44}-R^{36})+6R^{16}-10R^{56}$, $-R^{48}-R^{52})$

$F'''(R^{2}) = R^{4}+R^{12}+R^{16}-R^{28}+2(R^{40}-R^{48})$ [sic] $R^{24}+R^{26}+R^{34}-R^{44}-R^{50}+2(R^{2}+R^{18}+R^{28}+R^{46}+R^{58}+R^{62}-R^{48}-R^{52}) + 5(R^{14}-R^{30}) + 6(R^{10}+R^{60})$,

$$F'''(R^{2}) = \begin{cases} R^{6}+R^{12}+R^{22}+R^{24}+R^{26}+R^{34}-R^{44}-R^{50}+2(R^{2}+R^{18} \ldots \\ R^{8}+R^{12}+R^{22}+R^{24}+R^{26}+R^{30}-R^{66}) + 4(R^{54}-R^{6}) + 5(R^{14}-R^{30}) + 6(R^{10}+R^{60}), \end{cases}$$

$R^{8}+R^{12}+R^{22}+R^{24}+R^{26}+R^{34}-R^{36}-R^{66}) + 4(R^{54}-R^{6}) \ldots +R^{52}+R^{54}+R^{56}$

$+3(1+R^{4}+R^{38}+R^{40}+R^{42}-R^{36}-R^{66}) \ldots +R^{44}+R^{51}+R^{52}+R^{54}+R^{56}$

$$F'''(R) = \begin{cases} R^{3}+R^{7}+R^{14}+R^{34}+R^{36}+R^{41}+R^{44}+R^{51}+R^{52}+R^{54}+R^{56} \\ -R^{6}-R^{11}-R^{17}-R^{18}-R^{24}-R^{28}-R^{31}-R^{37}-R^{46}-R^{57}-R^{63} \\ +2(R^{4}+R^{26}+R^{33}+R^{42}+R^{50}+R^{53}+R^{61}+R^{10}-R^{12}-R^{22}-R^{32}-R^{39}-R^{40}-R^{43}-R^{58}) \\ +3(R^{9}+R^{47}-R^{5}-R^{21}-R^{35}-R^{45}) + 4(R^{8}+R^{30}+R^{62}-R^{8}-R^{23}-R^{27}) + 5; \end{cases}$$

rursus habemus summam quadratorum coefficientium potestatum ipsius R:

apud $F''' R^{8}$ sicut apud $F' R^{8} = 257$,

apud $F''' R^{4} = 4.1^2 + 2.2^2 + 3.3^2 + 2.4^2 + 2.5^2 + 6^2 + 10^2 = 257$,

apud $F''' R^{2} = 8.1^2 + 8.2^2 + 7.3^2 + 2.4^2 + 2.5^2 + 2.6^2 = 257$,

apud $F''' R^{1} = 22.1^2 + 15.2^2 + 6.3^2 + 6.4^2 + 5^2$.

Contemplemur similiter quantitates F^{IV}, per aequationem $f_x . f_{15x} = (F^{IV}(R^x)) f_{16x}$ explicatas. Quarum generales formulae sunt:

$F^{IV}(R^{128})=-1$, $F^{IV}(R^{64})=F^{IV}R^{32}=F^{IV}R^{16}=F^{IV}R^{8}=-257$, $F^{IV}R^{4}=F^{I}R^{4}$,

$$F^{IV}(R^2)=\begin{cases}R^{14}+R^{28}+R^{60}-R^{4}-R^{18}-R^{42}-R^{46}+2(R^{16}-R^{6}-R^{26}-R^{48}-R^{56}-R^{58})\\ +3(R^{22}-1-R^{20}-R^{36}-R^{50}-R^{52}-R^{54})-4R^{8}+5(R^{10}+R^{44}-R^{12})+6(R^{34}-R^{38}),\end{cases}$$

$$F^{IV}(R)=\begin{cases}R^{1}+R^{5}+R^{8}+R^{18}+R^{26}+R^{31}+R^{33}+R^{35}+R^{41}+R^{49}+R^{51}+R^{59}+R^{63}\\ -R^{7}-R^{13}-R^{19}-R^{24}-R^{28}-R^{30}-R^{38}-R^{43}-R^{44}-R^{45}-R^{47}-R^{54}-R^{56}-R^{57}-R^{60}\\ +2(R^{11}+R^{20}+R^{25}+R^{27}+R^{32}+R^{39}+R^{46}+R^{53}+R^{58}-R^{6}-R^{16}-R^{34}-R^{36}-R^{37})\\ +3(R^{2}+R^{3}+R^{14}+R^{15}+R^{23}-1-R^{17}-R^{21}-R^{40}-R^{42}-R^{61}-R^{62})+4R^{55}+7R^{12}.\end{cases}$$

Summa quadratorum coefficientium est:

apud $F^{IV}(R^4)$ sicut apud $F^{I}(R^4)=257$,

apud $F^{IV}(R^2)=7.1^2+6.2^2+7.3^2+4^2+3.5^2+2.6^2=257$,

apud $F^{IV}(R)=28.1^2+14.2^2+12.3^2+4^2=257$.

Jam habemus posito $f_x.f_{31x}=(F^{V}R^{x})f_{32x}$ has generales formulas:

$F^{V}(R^{128})=-1$, $F^{V}(R^{64})=F^{V}(R^{32})=F^{V}R^{16}=F^{V}R^{8}=F^{V}R^{4}=-257$, $F^{V}(R^{2})=R^{64}.F^{I}(R^{2})$,

$$F^{V}(R)=\begin{cases}R^{?}+R^{11}+R^{18}+R^{20}+R^{25}+R^{36}+R^{42}+R^{50}+R^{54}-1-R^{4}-R^{10}-R^{12}-R^{46}-R^{52}-R^{53}-R^{60}\\ +2(R^{7}+R^{6}+R^{9}+R^{31}+R^{33}+R^{38}+R^{41}+R^{48}+R^{56}+R^{58}+R^{61}+R^{62})\\ +2(-R^{5}-R^{13}-R^{15}-R^{16}-R^{24}-R^{26}-R^{27}-R^{35}-R^{45}-R^{47})\\ +3(R^{28}+R^{43}+R^{44}+R^{57}-R^{14}-R^{21}-R^{22})+4(R^{1}+R^{29}+R^{40}-R^{30})+5(-R^{39}),\end{cases}$$

summa quadratorum coeffientium apud $F^{V}R^{2}$ est sicut apud $F^{I}(R^{2})=257$,

apud $F^{V}R=17.1^2+22.2^2+7.3^2+4.4^2+5^2=257$.

Si denique ponamus:

$$f_x.f_{63x}=(F^{VI}(R^{x})).f_{64x},$$

hae generales formae, ubi igitur R^{2n+1} loco ipsius R ponere licet, inventae sunt

$F^{VI}(R^{128})=-1$, $F^{VI}(R^{64})=F^{VI}(R^{32})=F^{VI}(R^{16})=F^{VI}R^{8}=F^{VI}R^{4}=F^{VI}R^{2}=-257$,

$$18.\quad F^{VI}(R)=R^{96}.F^{I}R,$$

ubi rursus summa quadratorum coefficientium in $F^{VI}R=257$ est.

Postremo vero pro $x=2^h(2n+1)$, ubi $h<7$, >0 est, invenimus esse

$$19.\quad f_x.f_{127x}=257.$$

Quod theorema aeque ac plurima praecedentium a priori demonstrare licet, simili calculo, quam in articulo VIII. secuti sumus, adhibito.

Demonstremus exempli gratia theorema (19.) ita. Habemus

$$f_1=p_0+p_1R+p_2R^2+p_3R^3+\text{etc.}\quad +p_{127}R^{127}$$

nec non

$$f_{127}=p_0+p_1R^{-1}+p_2R^{-2}+p_3R^{-3}+\text{etc.}\quad +p_{127}R^{-127},$$

unde sequitur:

$$f_1 . f_{127} = \Sigma p_0 p_0 + (\Sigma p_0 p_1)\{R+R^{-1}\} + (\Sigma p_0 p_2)\{R^2+R^{-2}\} + \text{etc.} + (\Sigma p_0 p_{64})\{R^{64}+R^{-64}\},$$

ubi:

$$\Sigma p_0 p_0 = p_0 p_0 + p_1 p_1 + p_2 p_2 + \text{etc.} \quad + p_{127} p_{127},$$
$$\Sigma p_0 p_1 = p_0 p_1 + p_1 p_2 + p_2 p_3 + \text{etc.} \quad + p_{127} p_0,$$
etc.

positum est.

Iam vero $f_1 . f_{127}$ haud mutatur, in utroque factore indices quantitatum p per 1 augendo, quo fit:

$$\text{ex } f_1, \quad R^{127} f_1 \quad \text{et} \quad \text{ex } f_{127}, \quad R^{-127} f_{127},$$

hanc ob rem

$$\text{ex } f_1 . f_{127}, \quad R^0 f_1 . f_{127} = f_1 . f_{127}.$$

Inde igitur iam a priori concludere licitum fuisset, omnes coefficientes quantitatum R, R^2 etc. functiones tales ipsorum p fore, quae si indices augeantur valorem non commutent. Eodem modo iam a priori intelligere potuissemus, quia $f_1 . f_7$ valorem, pro R^1, R^7 vel pro R^2, R^6 etc. substitutis non commutant, in formula ipsius $f_1 . f_7$ coefficientes ipsorum R et R^7 sive R^{+1} et R^{-1} eosdem esse, non minus quam ipsorum R^2 et R^{-2} etc.

Iam vero clarum est: $\Sigma(p_0 p_m)$ negativam summam esse coefficientium ipsorum p_0, p_1 etc. in evolutione lineari quantitatis $p_0 p_m$.

Habemus vero, propositione tertia articuli huius adhibita:

$$p_0 p_m = p_x + p_y,$$

unde indices augendo:

$$p_1 p_{m+1} = p_{x+1} + p_{y+1},$$
etc.

unde oritur:

$$\Sigma p_0 p_m = \Sigma p_0 + \Sigma p_0 = -2.$$

Si vero habeamus $m=0$ erit:

$$p_0 p_0 = 2 + p_x,$$
$$p_1 p_1 = 2 + p_{x+1},$$
etc.

$$\Sigma p_0 p_0 = 2 . 128 + \Sigma p_0 = 2 . 128 - 1.$$

Quibus collectis habemus:

$$f_1 . f_{127} = 2 . 128 - 1 - 2\{R^1 + R^{-1} + R^2 + R^{-2} + \text{etc.} \quad + R^{64} + R^{-64}\},$$

sive cum habeamus:

$$R^1 + R^2 + \text{etc.} \quad + R^{128} = -1,$$

sequitur:

$$f_1 . f_{127} = 257.$$

unde sequitur:

$$f_x.f_{127x} = f_x.f_{128-x} = 257,$$

uno excepto casu si x formae est: $2^7.(2n+1)$, tum enim

$$R^1 + R^2 + \text{etc.} \quad + R^{128} \text{ fit:}$$
$$R^x + R^{2x} + \text{etc.} \quad + R^{128x} \text{ non } = -1.$$

Similiter theorematum (18.) a priori possunt priora demonstrari; habemus enim:

$$f_x.f_{63x} = (F^{VI}R^x)f_{64x},$$

$x=128$ posito, habemus:

$$f_{128}.f_{128.63} = (F^{VI}R^{128})f_{64.128}$$

unde cum

$$f_{128.m} = f_{128} = -1,$$

habemus:

$$-1 = F^{VI}R^{128}.$$

Si vero $x=64$ ponamus, habemus:

$$f_{64}.f_{64.63} = (F^{VI}R^{64})f_{64.64} = (F^{VI}R^{64})f_{128},$$

sive cum $f_{64}.f_{64.63} = f_{64}.f_{64} = 257$ (ex aeq. 19.) sit:

$$F^{VI}R^{64} = -257.$$

Eodem modo $x=32$ posito sequitur:

$$f_{32}.f_{32.63} = F^{VI}(R^{32})f_{64.32}$$

sive

$$f_{32}.f_{96} = 257 = -F^{VI}R^{32}.$$

Eodem calculo etiam ceterarum functionum $F(R)$ formulae a priori derivantur.

Simile quoddam theorema, ac (19.) apud functiones f, de omnibus functionibus FR valet, quae nec $=-1$ nec $=-257$ erant. Nimirum habemus:

$$20. \quad (F(R^x)).(F(R^{128-x})) = 257,$$

ubi x formula $2^h(2n+1)$ exprimitur, pro functionibus F^I, F^{II}, F^{III}, F^{IV}, F^V, F^{VI}, tamen apud functiones F^I casibus ubi $h \gtreqless 6$ exceptis, apud functiones F^{II} adeo ubi $h \geqq 5$, apud F^{III} praeterea ubi $h \geqq 4$, apud F^{IV} adhuc ubi $h \geqq 3$, apud F^V praeterea ubi $h \geqq 2$, apud F^{VI} denique casibus ubi $h \geqq 1$ exceptis.

Quo theoremate supposito facile intelligitur in omnibus his functionibus, quae in theoremate (20.) continentur, summam quadratorum coefficientium quantitatum R^1, R^2, etc. R^{64} ad quas omnes ceterae potestates ipsius R redigere licet, esse $=257$.

Ponamus enim:

$$FR^x = a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + \text{etc.} \quad + a_{64} R^{64},$$

tum erit

$$FR^{128-x} = a_1 R^{-1} + a_2 R^{-2} + a_3 R^{-3} + \text{etc.} \quad + a_{64} R^{-64},$$

unde efficitur:

$$\begin{aligned}(FR^x).(FR^{128-x}) = \; & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \text{ etc.} \quad + a_{64}^2 \\ & + (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \text{etc.} \quad + a_{63} a_{64})(R^1 + R^{-1}) \\ & + (a_1 a_3 + a_2 a_4 + \text{etc.} \quad + a_{62} a_{64})(R^2 + R^{-2}) \\ & \text{etc.} \\ & + (a_1 a_{33} + a_2 a_{34} + \text{etc.} \quad + a_{32} a_{64})(R^{32} + R^{-32}) \\ & \text{etc.} \\ & + (a_1 a_{63} + a_2 a_{64})(R^{62} + R^{-62}) \\ & + (a_1 a_{64})(R^{63} + R^{-63}),\end{aligned}$$

sive cum

$$\begin{aligned} R^1 + R^{-1} &= 2\cos\frac{\pi}{64} = -(R^{63} + R^{-63}), \\ R^2 + R^{-2} &= 2\cos\frac{2\pi}{64} = -(R^{62} + R^{-62}), \\ &\text{etc.} \\ R^{32} + R^{-32} &= 2\cos\frac{32\pi}{64} = 0 \end{aligned}$$

sit, habemus:

$$257 = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + \text{etc.} \quad + a_{64}^2 \\ + 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \text{etc.} \quad + a_{63} a_{64} - a_{64} a_1)\cos\frac{\pi}{64} \\ + 2(a_1 a_3 + a_2 a_4 + \text{etc.} \quad + a_{62} a_{64} - a_{63} a_1 - a_{64} a_2)\cos\frac{2\pi}{64} \\ + \text{etc.} \\ + 2(a_1 a_{32} + a_2 a_{33} + \text{etc.} \quad - a_{63} a_{30} - a_{64} a_{31})\cos\frac{31\pi}{64}, \end{cases}$$

unde sequuntur, cum quantitates incommensurabiles comparentur:

$$257 = a_1^2 + a_2^2 + \text{etc.} \quad + a_{64}^2,$$

nec non

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_2 a_3 + \text{etc.} \quad + a_{63} a_{64} &= a_1 a_{64} \\ a_1 a_3 + a_2 a_4 + \text{etc.} \quad + a_{62} a_{64} &= a_1 a_{63} + a_2 a_{64} \\ \text{etc.} & \\ a_1 a_{32} + a_2 a_{33} + \text{etc.} \quad + a_{33} a_{64} &= a_1 a_{34} + a_2 a_{35} + \text{etc.} \quad + a_{31} a_{64}. \end{aligned}$$

Iam vero theoremata (20.) a priori demonstrare reliquum est.

Posuimus in universo, si k est numerus <7 integer, atque $x=2^h(2n+1)$,

$$f_x \cdot f_{(2^k-1)x} = F^{(k)}(R^x) \cdot f_{(2^k.x)}.$$

Inde sequitur, ubique $128-x$ loco ipsius x posito:

$$f_{(128-x)} \cdot f_{(2^k-1)(128-x)} = F^{(k)}(R^{128-x}) \cdot f_{2^k(128-x)}.$$

Iam vero ex significatione ipsius f sequitur, semper fore: $f_{x\pm128m}=f_x$, si m est numerus integer, unde derivatur:

$$f_{(2^k-1)(128-x)} = f_{128-(2^k-1)x},$$
$$f_{2^k(128-x)} = f_{(128-2^k x)}.$$

Quibus valoribus in aequatione superiore substitutis, utraque priori inter se multiplicatis, efficitur:

$$f_{(x)} \cdot f_{(128-x)} \cdot f_{((2^k-1)x)} \cdot f_{(128-(2^k-1)x)} = F^k R^x . F^k R^{128-x} . f_{2^k x} \cdot f_{128-2^k x}.$$

Iam vero loco ipsius x, valore suo $2^h(n+1)$ substituto, theoremateque (19.) adhibito sequitur:

$$f_{2^k x} \cdot f_{(128-(2^k x))} = 257,$$
$$f_{(2^k-1)x} \cdot f_{128-(2^k-1)x} = 257,$$
$$f_{(x)} \cdot f_{(128-x)} = 257,$$

nisi $2^k x$ potestatem numeri 2 maiorem quam sextam continet; hanc ob rem adiiciatur conditio $2^{k+h}(2n+1)$ non continere potestatem maiorem quam sextam, sive

$$k+h<7,$$

qua conditione repleta, erit:

$$257.257 = F^{(k)}(R^x) . F^{(k)} R^{(128-x)} . 257,$$

sive:

$$F^{(k)} R^x . F^{(k)} R^{128-x} = 257.$$

At theoremata demonstranda, nihil aliud continent, quam omnes casus, in quibus $k+h<7$ fieri potest, dum k respective valores 1, 2, 3, ... 6 accipiat.

Habemus denique ex forma functionum FR demonstratum summam:

$$FR^x + FR^{128-x}$$

semper esse quantitatem realem. Qua animadversione cum aequationibus (20.) apte collata facile invenitur, functiones F quae in theorem. (20.) continentur has induere posse formas: si x rursus $=2^h(2n+1)$ est:

$$21. \quad F^1 R^x = \sqrt{(257)}(\cos\vartheta_x + i\sin\vartheta_x)$$

iis exceptis casibus ubi $h>5$,

$$F^{II} R^x = \sqrt{(257)}\,(\cos \eta_x + i \sin \eta_x)$$

exceptis casibus ubi $h > 4$,

$$F^{III} R^x = \sqrt{(257)}\,(\cos \iota_x + i \sin \iota_x)$$

exceptis casibus ubi $h > 3$,

$$F^{IV} R^x = \sqrt{(257)}\,(\cos \varkappa_x + i \sin \varkappa_x)$$

exceptis casibus ubi $h > 2$,

$$F^{V} R^x = \sqrt{(257)}\,(\cos \lambda_x + i \sin \lambda_x)$$

exceptis casibus ubi $h > 1$, sive nonnisi pro $x = 2(2n+1)$ et $(2n+1)$,

$$F^{VI} R^x = \sqrt{(257)}\,(\cos \mu_x + i \sin \mu_x)$$

exceptis casibus ubi $h > 0$ sive nonnisi pro $x = 2n+1$.

Haec fuerunt omnia, quae de functionibus F memorabilia invenimus. Quamquam enim his sex generibus functionum F, F^I, F^{II}, etc. F^{VI} exceptis, adhuc 121 genera existere, quae oriantur, si f_x respective per f_{2x}, f_{4x}, f_{5x}, f_{6x}, f_{8x}, etc. f_{126x} multiplicetur, facile intelligitur, tamen ibi nec leges tam concinnae quam apud illas se offerunt, nec ad verum finem nostrum, functionum f valores determinandi, aliquid afferunt. Ad quem finem assequendum, iam functiones F^I prorsus sufficerent, nisi ambiguitatis valorum causa nonnullae ex aliis quinque formis adhibeantur necesse esset.

XI.

Aggrediamur igitur nunc ad determinationem atque computationem angulorum ϑ; nec non inter ceteros eorum, quorum valores in sequentibus adhibebuntur.

Primum per aequationum (21.) primam clarum fit, angulos ϑ_0 et ϑ_{64} non inveniri. Quibus exceptis remanent centum viginti et sex determinandi, quorum vero numerus ad dimidium refertur, adhibito theoremate hoc:

$$22.\quad \vartheta_{(128-x)} = 360^0 - \vartheta_x$$

quod fluit ex aequat. (20.) et (21.).

Numerus remanentium adhuc minuitur his theorematibus adhibitis:

$$23.\quad \begin{cases} \vartheta_{(64-2x)} = \vartheta_{2x}, \\ \vartheta_{(64-(2x+1))} = 180^0 + \vartheta_{(2x+1)} \end{cases}$$

multiplis ipsius 360^0 desumtis; quippe quae theoremata ex aequat. (16.) et (17.) derivantur.

Hanc ob rem formulis his

$$24.\quad \begin{cases} R^{x} = \cos\frac{x\pi}{64}+i\sin\frac{x\pi}{64}, \\ R^{64-x} = -\cos\frac{x\pi}{64}+i\sin\frac{x\pi}{64}, \\ R^{128-x} = \cos\frac{x\pi}{64}-i\sin\frac{x\pi}{64}, \\ R^{128m+x} = -\cos\frac{x\pi}{64}+i\sin\frac{x\pi}{64} \end{cases}$$

adhibitis, deriventur nonnisi:

unus angulus	formae	ϑ_{32}	ex	formula	(9.),
unus angulus	-	$\vartheta_{16(2n+1)}$	-	-	(10.),
duo anguli	-	$\vartheta_{8(2n+1)}$	-	-	(11.),
quatuor anguli	-	$\vartheta_{4(2n+1)}$	-	-	(12.),
octo	-	$\vartheta_{2(2n+1)}$	-	-	(13.),
sedecim	-	$\vartheta_{(2n+1)}$	-	-	(14.).

Hac via progressi, invenimus:

$$\cos\vartheta_{32} = \frac{-\cos\pi}{\sqrt{(257)}} = \frac{-1}{\sqrt{(257)}}\quad \sin\vartheta_{32} = -\frac{16\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{(257)}} = \frac{16}{\sqrt{(257)}},$$

$$\cos\vartheta_{16} = \frac{-15\cos\pi}{\sqrt{(257)}} = \frac{15}{\sqrt{(257)}}\quad \sin\vartheta_{16} = -\frac{8\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(257)}} = \frac{-8\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{(257)}},$$

$$\cos\vartheta_{8} = \frac{+9\cos\pi+8\cos\frac{\pi}{2}}{\sqrt{(257)}}\quad \sin\vartheta_{8} = \frac{12\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\right)}{\sqrt{(257)}}$$

$$= \frac{-9+8\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(257)}}\qquad = \frac{24\sqrt{\frac{1}{2}}.\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{(257)}},$$

$$\cos\vartheta_{24} = \frac{+9\cos\pi-8\cos\frac{\pi}{2}}{\sqrt{(257)}}\quad \sin\vartheta_{24} = \frac{12\left(-\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\right)}{\sqrt{(257)}}$$

$$= \frac{-9-8\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(257)}}\qquad = \frac{24\sqrt{\frac{1}{2}}.\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{(257)}},$$

$$\cos\vartheta_{4} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-1-4\cos\frac{\pi}{8}-16\cos\frac{\pi}{4}+4\cos\frac{3\pi}{8}\right\},$$

$$\sin\vartheta_{4} = \frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{2\sin\frac{\pi}{16}+\sin\frac{5\pi}{16}-3\sin\frac{7\pi}{16}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{12} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-1-4\cos\frac{3\pi}{8}+16\cos\frac{\pi}{4}-4\cos\frac{\pi}{8}\right\},$$

$$\sin\vartheta_{12} = \frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{2\sin\frac{3\pi}{16}+\sin\frac{\pi}{16}+3\sin\frac{5\pi}{16}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{20} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-1+4\cos\frac{3\pi}{8}+16\cos\frac{\pi}{4}+4\cos\frac{\pi}{8}\right\},$$

$$\sin\vartheta_{20} = \frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{2\sin\frac{5\pi}{16}-\sin\frac{7\pi}{16}-3\sin\frac{3\pi}{16}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{28} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-1+4\cos\frac{\pi}{8}-16\cos\frac{\pi}{4}-4\cos\frac{3\pi}{8}\right\},$$

$$\sin\vartheta_{28} = \frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{2\sin\frac{7\pi}{16}+\sin\frac{3\pi}{16}+3\sin\frac{\pi}{16}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{2} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{16}+\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{2} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{5\pi}{32}+\frac{3}{2}\sin\frac{7\pi}{32}-\frac{1}{2}\sin\frac{11\pi}{32}-\sin\frac{13\pi}{32}-\sin\frac{15\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{6} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{16}-\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{6} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{15\pi}{32}+\frac{3}{2}\sin\frac{11\pi}{32}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{32}+\sin\frac{7\pi}{32}+\sin\frac{13\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{10} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(-\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{7\pi}{16}+\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{10} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{7\pi}{32}-\frac{3}{2}\sin\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{2}\sin\frac{9\pi}{32}-\sin\frac{\pi}{32}-\sin\frac{11\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{14} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(-\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{16}-\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{14} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{+\sin\frac{3\pi}{32}-\frac{3}{2}\sin\frac{15\pi}{32}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{32}-\sin\frac{5\pi}{32}+\sin\frac{9\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{18} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(-\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{16}-\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{18} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{+\sin\frac{13\pi}{32}-\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{32}+\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{32}+\sin\frac{11\pi}{32}-\sin\frac{7\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{22} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(-\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{16}+\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{22} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{+\sin\frac{9\pi}{32}+\frac{3}{2}\sin\frac{13\pi}{32}+\frac{1}{2}\sin\frac{7\pi}{32}-\sin\frac{15\pi}{32}+\sin\frac{5\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{26} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(+\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{16}-\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{5\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{26} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{\pi}{32}+\frac{3}{2}\sin\frac{5\pi}{32}-\frac{1}{2}\sin\frac{15\pi}{32}+\sin\frac{9\pi}{32}-\sin\frac{3\pi}{32}\right\},$$

$$\cos\vartheta_{30} = \frac{1}{\sqrt{(257)}}\left\{-7+4\left(+\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{16}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{16}\right)\right\},$$

$$\sin\vartheta_{30} = \frac{8}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{11\pi}{32}-\frac{3}{2}\sin\frac{9\pi}{32}+\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{32}-\sin\frac{3\pi}{32}+\sin\frac{\pi}{32}\right\}.$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{\pi}{64}-2\cos\frac{3\pi}{64}+\cos\frac{7\pi}{64}+\cos\frac{9\pi}{64}-\cos\frac{11\pi}{64}+\cos\frac{13\pi}{64}-\cos\frac{15\pi}{64}+\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{19\pi}{64}+\cos\frac{23\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{2\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}-\sin\frac{5\pi}{32}+\sin\frac{6\pi}{32}+\sin\frac{9\pi}{32}+2\sin\frac{10\pi}{32}+2\sin\frac{11\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}-2\sin\frac{13\pi}{32}-\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{3\pi}{64}-2\cos\frac{9\pi}{64}+\cos\frac{21\pi}{64}-\cos\frac{27\pi}{64}+\cos\frac{31\pi}{64}-\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{19\pi}{64}-\cos\frac{13\pi}{64}-\cos\frac{7\pi}{64}-\cos\frac{5\pi}{64}+\cos\frac{29\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{6\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}-\sin\frac{15\pi}{32}+\sin\frac{14\pi}{32}+\sin\frac{5\pi}{32}+2\sin\frac{2\pi}{32}-2\sin\frac{\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}+2\sin\frac{7\pi}{32}+\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{6\pi}{64}-2\cos\frac{15\pi}{64}-\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{19\pi}{64}+\cos\frac{9\pi}{64}-\cos\frac{\pi}{64}+\cos\frac{11\pi}{64}-\cos\frac{21\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}+\cos\frac{13\pi}{64}-\cos\frac{27\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{10\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}-\sin\frac{7\pi}{32}+\sin\frac{2\pi}{32}-\sin\frac{13\pi}{32}-2\sin\frac{14\pi}{32}-2\sin\frac{9\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}-2\sin\frac{\pi}{32}-\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{7\pi}{64}-2\cos\frac{21\pi}{64}-\cos\frac{15\pi}{64}-\cos\frac{\pi}{64}+\cos\frac{13\pi}{64}-\cos\frac{27\pi}{64}-\cos\frac{23\pi}{64}+\cos\frac{\text{[illegible]}}{64}+\cos\frac{5\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}+\cos\frac{25\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{14\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}+\sin\frac{3\pi}{32}-\sin\frac{10\pi}{32}-\sin\frac{\pi}{32}+2\sin\frac{6\pi}{32}+2\sin\frac{13\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}-2\sin\frac{5\pi}{32}+\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{9\pi}{64}-2\cos\frac{27\pi}{64}-\cos\frac{\pi}{64}-\cos\frac{17\pi}{64}-\cos\frac{29\pi}{64}+\cos\frac{11\pi}{64}-\cos\frac{7\pi}{64}+\cos\frac{25\pi}{64}-\cos\frac{21\pi}{64}-\cos\frac{15\pi}{64}-\cos\frac{23\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{14\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}+\sin\frac{13\pi}{32}-\sin\frac{10\pi}{32}+\sin\frac{15\pi}{32}+2\sin\frac{6\pi}{32}-2\sin\frac{3\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}+2\sin\frac{11\pi}{32}-\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{11\pi}{64}+2\cos\frac{31\pi}{64}-\cos\frac{13\pi}{64}+\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{7\pi}{64}+\cos\frac{15\pi}{64}+\cos\frac{27\pi}{64}-\cos\frac{5\pi}{64}-\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{3\pi}{64}+\cos\frac{21\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{10\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}+\sin\frac{9\pi}{32}+\sin\frac{2\pi}{32}-\sin\frac{3\pi}{32}-2\sin\frac{14\pi}{32}-2\sin\frac{7\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}-2\sin\frac{15\pi}{32}+\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{13\pi}{64}+2\cos\frac{25\pi}{64}-\cos\frac{27\pi}{64}+\cos\frac{11\pi}{64}-\cos\frac{15\pi}{64}-\cos\frac{23\pi}{64}+\cos\frac{3\pi}{64}-\cos\frac{29\pi}{64}+\cos\frac{9\pi}{64}-\cos\frac{21\pi}{64}-\cos\frac{19\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{6\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}-\sin\frac{\pi}{32}+\sin\frac{14\pi}{32}-\sin\frac{11\pi}{32}+2\sin\frac{2\pi}{32}+2\sin\frac{15\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}+2\sin\frac{9\pi}{32}-\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{15\pi}{64}+2\cos\frac{19\pi}{64}+\cos\frac{23\pi}{64}+\cos\frac{7\pi}{64}+\cos\frac{27\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}+\cos\frac{\pi}{64}+\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{17\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\sin\frac{2\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}-\sin\frac{11\pi}{32}+\sin\frac{6\pi}{32}+\sin\frac{7\pi}{32}+2\sin\frac{10\pi}{32}-2\sin\frac{5\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}-2\sin\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{17\pi}{64}+2\cos\frac{13\pi}{64}+\cos\frac{9\pi}{64}+\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{5\pi}{64}-\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}+\cos\frac{7\pi}{64}-\cos\frac{15\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{2\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}-\sin\frac{11\pi}{32}-\sin\frac{6\pi}{32}+\sin\frac{7\pi}{32}-2\sin\frac{10\pi}{32}-2\sin\frac{5\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}-2\sin\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{4}\right\},$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{\cos\frac{19\pi}{64}+2\cos\frac{7\pi}{64}+\cos\frac{5\pi}{64}-\cos\frac{21\pi}{64}+\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{9\pi}{64}-\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}+\cos\frac{23\pi}{64}-\cos\frac{11\pi}{64}+\cos\frac{13\pi}{64}\right\}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\left\{-\sin\frac{6\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}-\sin\frac{\pi}{32}-\sin\frac{14\pi}{32}-\sin\frac{11\pi}{32}-2\sin\frac{2\pi}{32}+2\sin\frac{15\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}+2\sin\frac{9\pi}{32}+\frac{1}{4}\right\},$$

$$\vartheta_{21}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{\cos\frac{21\pi}{64}+2\cos\frac{\pi}{64}+\cos\frac{19\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}-\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{5\pi}{64}+\cos\frac{27\pi}{64}+\cos\frac{15\pi}{64}+\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{11\pi}{64}$$

$$\vartheta_{21}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{-\sin\frac{10\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}+\sin\frac{9\pi}{32}-\sin\frac{2\pi}{33}-\sin\frac{3\pi}{32}+2\sin\frac{14\pi}{32}-2\sin\frac{7\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}-2\sin\frac{15\pi}{32}-\tfrac{1}{4}\Big\},$$

$$\vartheta_{23}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{\cos\frac{23\pi}{64}+2\cos\frac{5\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}-\cos\frac{15\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}-\cos\frac{21\pi}{64}+\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{7\pi}{64}-\cos\frac{11\pi}{64}+\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{9\pi}{64}$$

$$\vartheta_{23}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{-\sin\frac{14\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}+\sin\frac{13\pi}{32}+\sin\frac{10\pi}{32}+\sin\frac{15\pi}{32}-2\sin\frac{6\pi}{32}-2\sin\frac{3\pi}{32}+\sin\frac{12\pi}{32}+2\sin\frac{11\pi}{32}+\tfrac{1}{4}\Big\},$$

$$\vartheta_{25}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{\cos\frac{25\pi}{64}+2\cos\frac{11\pi}{64}-\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{31\pi}{64}-\cos\frac{19\pi}{64}-\cos\frac{5\pi}{64}-\cos\frac{9\pi}{64}-\cos\frac{23\pi}{64}-\cos\frac{27\pi}{64}-\cos\frac{\pi}{64}-\cos\frac{7\pi}{64}$$

$$\vartheta_{25}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{-\sin\frac{14\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}+\sin\frac{3\pi}{32}+\sin\frac{10\pi}{32}-\sin\frac{\pi}{32}-2\sin\frac{6\pi}{32}+2\sin\frac{13\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}-2\sin\frac{5\pi}{32}-\tfrac{1}{4}\Big\},$$

$$\vartheta_{27}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{\cos\frac{27\pi}{64}+2\cos\frac{[illegible]7\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}+\cos\frac{13\pi}{64}+\cos\frac{23\pi}{64}-\cos\frac{31\pi}{64}-\cos\frac{21\pi}{64}-\cos\frac{11\pi}{64}+\cos\frac{\pi}{64}+\cos\frac{19\pi}{64}+\cos\frac{5\pi}{64}$$

$$\vartheta_{27}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{-\sin\frac{10\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}-\sin\frac{7\pi}{32}-\sin\frac{2\pi}{32}-\sin\frac{13\pi}{32}+2\sin\frac{14\pi}{32}-2\sin\frac{9\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}-2\sin\frac{\pi}{32}+\tfrac{1}{4}\Big\},$$

$$\vartheta_{29}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{\cos\frac{29\pi}{64}+2\cos\frac{23\pi}{64}-\cos\frac{11\pi}{64}+\cos\frac{5\pi}{64}+\cos\frac{\pi}{64}+\cos\frac{7\pi}{64}+\cos\frac{13\pi}{64}+\cos\frac{19\pi}{64}-\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{27\pi}{64}-\cos\frac{3\pi}{64}$$

$$\vartheta_{29}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{-\sin\frac{6\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}-\sin\frac{15\pi}{32}-\sin\frac{14\pi}{32}+\sin\frac{5\pi}{32}-2\sin\frac{2\pi}{32}-2\sin\frac{\pi}{32}+\sin\frac{4\pi}{32}+2\sin\frac{7\pi}{32}-\tfrac{1}{4}\Big\},$$

$$\vartheta_{31}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{\cos\frac{31\pi}{64}+2\cos\frac{29\pi}{64}-\cos\frac{25\pi}{64}+\cos\frac{23\pi}{64}+\cos\frac{21\pi}{64}+\cos\frac{19\pi}{64}+\cos\frac{17\pi}{64}+\cos\frac{15\pi}{64}-\cos\frac{13\pi}{64}-\cos\frac{9\pi}{64}+\cos\frac{\pi}{64}$$

$$\vartheta_{31}=\frac{4}{\sqrt{(257)}}\Big\{-\sin\frac{2\pi}{32}-\sin\frac{4\pi}{32}-\sin\frac{5\pi}{32}-\sin\frac{6\pi}{32}+\sin\frac{9\pi}{32}-2\sin\frac{10\pi}{32}+2\sin\frac{11\pi}{32}-\sin\frac{12\pi}{32}-2\sin\frac{13\pi}{32}+\tfrac{1}{4}\Big\}.$$

Ex his formulis anguli ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ... ϑ_{63}, unde omnes ceteri per theoremata (21.) et (22.) inveniuntur, computati sunt.

$\vartheta_1 = 64^0\ 38'\ 41'', 72 \qquad \vartheta_{63} = 244^0\ 38'\ 41'', 72 = \vartheta_1 + \pi,$

$\vartheta_2 = 252^0\ 39'\ 57'', 23 \qquad = \vartheta_{62},$

$\vartheta_3 = 125^0\ 24'\ 15'', 72 \qquad \vartheta_{61} = 305^0\ 24'\ 15'', 72 = \vartheta_3 + \pi,$

$\vartheta_4 = 205^0\ 25'\ 32'', 15 \qquad = \vartheta_{60},$

$\vartheta_5 = 262^0\ 54'\ 54'', 45 \qquad \vartheta_{59} = 82^0\ 54'\ 54'', 45 = \vartheta_5 - \pi,$

$\vartheta_6 = 100^0\ 51'\ 21'', 88 \qquad = \vartheta_{58},$

$\vartheta_7 = 83^0\ 17'\ 33'', 36 \qquad \vartheta_{57} = 263^0\ 17'\ 33'', 36 = \vartheta_7 + \pi,$

$\vartheta_8 = 102^0\ 2'\ 12'', 44 \qquad = \vartheta_{56},$

$\vartheta_9 = 134^0\ 53'\ 30'', 55 \qquad \vartheta_{55} = 314^0\ 53'\ 30'', 55 = \vartheta_9 + \pi,$

$\vartheta_{10} = 236^0\ 5'\ 58'', 07 \qquad = \vartheta_{54},$

$\vartheta_{11} = 272^0\ 54'\ 35'', 88 \qquad \vartheta_{53} = 92^0\ 54'\ 35'', 88 = \vartheta_{11} - \pi,$

$\vartheta_{12} = 71^0\ 29'\ 50'', 83 \qquad = \vartheta_{52},$

$\vartheta_{13} = 67^0\ 5'\ 41'', 54$	$\vartheta_{51} = 247^0\ 5'\ 41'', 54 = \vartheta_{13} + \pi,$
$\vartheta_{14} = 223^0\ 29'\ 53'', 37$	$= \vartheta_{50},$
$\vartheta_{15} = 354^0\ 4'\ 22'', 65$	$\vartheta_{49} = 174^0\ 4'\ 22'', 65 = \vartheta_{15} - \pi,$
$\vartheta_{16} = 339^0\ 20'\ 14'', 48$	$= \vartheta_{48},$
$\vartheta_{17} = 308^0\ 41'\ 50'', 60$	$\vartheta_{47} = 128^0\ 41'\ 50'', 60 = \vartheta_{17} - \pi,$
$\vartheta_{18} = 143^0\ 7'\ 17'', 02$	$= \vartheta_{46},$
$\vartheta_{19} = 20^0\ 46'\ 5'', 09$	$\vartheta_{45} = 200^0\ 46'\ 5'', 09 = \vartheta_{19} + \pi,$
$\vartheta_{20} = 345^0\ 46'\ 45'', 00$	$= \vartheta_{44},$
$\vartheta_{21} = 337^0\ 14'\ 39'', 83$	$\vartheta_{43} = 157^0\ 14'\ 39'', 83 = \vartheta_{21} - \pi,$
$\vartheta_{22} = 92^0\ 36'\ 22'', 57$	$= \vartheta_{42},$
$\vartheta_{23} = 58^0\ 53'\ 35'', 39$	$\vartheta_{41} = 238^0\ 53'\ 35'', 39 = \vartheta_{23} + \pi,$
$\vartheta_{24} = 156^0\ 6'\ 7'', 88$	$= \vartheta_{40},$
$\vartheta_{25} = 204^0\ 22'\ 8'', 25$	$\vartheta_{39} = 24^0\ 22'\ 8'', 25 = \vartheta_{25} - \pi,$
$\vartheta_{26} = 162^0\ 45'\ 3'', 12$	$= \vartheta_{38},$
$\vartheta_{27} = 317^0\ 50'\ 57'', 13$	$\vartheta_{37} = 137^0\ 50'\ 57'', 13 = \vartheta_{27} - \pi,$
$\vartheta_{28} = 129^0\ 16'\ 37'', 82$	$= \vartheta_{36},$
$\vartheta_{29} = 327^0\ 14'\ 20'', 38$	$\vartheta_{35} = 147^0\ 14'\ 20'', 38 = \vartheta_{29} - \pi,$
$\vartheta_{30} = 274^0\ 23'\ 47'', 02$	$= \vartheta_{34},$
$\vartheta_{31} = 304^0\ 6'\ 10'', 72$	$\vartheta_{33} = 124^0\ 6'\ 10'', 72 = \vartheta_{31} - \pi,$
$\vartheta_{32} = 93^0\ 34'\ 34'', 80$	$= \vartheta_{32}.$

Iam vero transeamus ad angulorum $\mu, \lambda, \varkappa, \iota, \eta$ computatos valores, quorum nonnisi ii allati sunt, qui in sequentibus adhibentur.

Ad angulos vero μ determinandos, revocetur theorema (18.) hoc:

$$F^{\mathrm{vi}}(R) = R^{96}.F^{\mathrm{i}}R.$$

Nec non cum $R^{96(2n+1)} = \cos\frac{3(2n+1)\pi}{2} + i\sin\frac{3(2n+1)\pi}{2}$ sit, inde oriatur haec aequatio necesse est:

$$\mu_{(2n+1)} = \vartheta_{(2n+1)} + \frac{3(2n+1)\pi}{2},$$

sive hae:

$$24. \quad \begin{cases} \mu_{(4n+1)} = \vartheta_{(4n+1)} + \frac{3\pi}{2}, \text{ quae pertinent ad } F^{\mathrm{vi}}R^{(4n+1)}, \\ \mu_{(4n+3)} = \vartheta_{(4n+3)} + \frac{\pi}{2}, \text{ quae pertinent ad } F^{\mathrm{vi}}R^{(4n+3)}. \end{cases}$$

Ex formula antea pro $F^{\mathrm{v}}(R)$ allata, quae vera mansit loco ipsius R, R^{2n+1} substituto, anguli ipsi λ cum his functionibus cohaerentes, quippe quales quotque ad sequentia adhibentur, minus stricte computati, sequuntur hi:

$$
25. \quad \begin{cases}
\lambda_1 = 173^0\ 55'\ 7'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R) = \dfrac{f_1 \cdot f_{31}}{f_{32}}, \\
\lambda_5 = 91^0\ 38'\ 37'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^5) = \dfrac{f_5 \cdot f_{29}}{f_{32}}, \\
\lambda_9 = 31^0\ 39'\ 54'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^9) = \dfrac{f_9 \cdot f_{23}}{f_{32}}, \\
\lambda_{13} = 348^0\ 31'\ 7'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^{13}) = \dfrac{f_{13} \cdot f_{19}}{f_{32}}, \\
\lambda_{17} = 151^0\ 47'\ 43'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^{17}) = \dfrac{f_{18} \cdot f_{15}}{f_{32}}, \\
\lambda_{21} = 34^0\ 35'\ 32'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^{21}) = \dfrac{f_{21} \cdot f_{11}}{f_{32}}, \\
\lambda_{25} = 118^0\ 47'\ 30'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^{25}) = \dfrac{f_{25} \cdot f_7}{32}, \\
\lambda_{29} = 139^0\ 58'\ 60'' & \text{pro} \quad F^{\text{v}}(R^{29}) = \dfrac{f_{29} \cdot f_3}{f_{32}}.
\end{cases}
$$

Eodem modo ex formula pro $F^{\text{IV}} R$ computati sunt hi:

$$
25. \quad \begin{cases}
\varkappa_1 = 19^0\ 25'\ 5'' & \text{pro} \quad F^{\text{IV}}(R) = \dfrac{f_1 \cdot f_{15}}{f_{16}}, \\
\varkappa_5 = 39^0\ 53'\ 54'' & \text{pro} \quad F^{\text{IV}}(R^5) = \dfrac{f_5 \cdot f_{75}}{f_{10}}, \\
\varkappa_9 = 310^0\ 0'\ 13'' & \text{pro} \quad F^{\text{IV}}(R^9) = \dfrac{f_9 \cdot f_7}{f_{16}}, \\
\varkappa_{13} = 110^0\ 53'\ 45'' & \text{pro} \quad F^{\text{IV}}(R^{13}) = \dfrac{f_{13} \cdot f_{67}}{f_{10}}.
\end{cases}
$$

Ex formula ipsius $F^{\text{III}} R$ hi emanant anguli:

$$
25. \quad \begin{cases}
\iota_1 = 235^0\ 3'\ 9'' & \text{pro} \quad F^{\text{III}}(R) = \dfrac{f_1 \cdot f_7}{f_8}, \\
\iota_{19} = 54^0\ 9'\ 50'' & \text{pro} \quad F^{\text{III}}(R^{19}) = \dfrac{f_{19} \cdot f_5}{f_{24}}.
\end{cases}
$$

Ex formula ipsius $F^{\text{II}}(R)$ hic angulus deducitur:

$$
25. \quad \eta_1 = 146^0\ 22'\ 30'' \quad \text{pro} \quad F^{\text{II}} R = \frac{f_1 \cdot f_3}{f_4}.
$$

Haec fuerunt, quae ad veros 128 functionum f valores determinandos praemittenda nobis visa sunt.

(Cont. seq. prox.)

18.

Mémoire sur la décomposition des fractions algébriques rationnelles.

(Par l'éditeur.)

Note préliminaire.

On présente ordinairement dans les cours d'analyse la décomposition des fractions algébriques rationnelles, comme une opération auxiliaire dont on a besoin dans l'intégration des formules différentielles fractionnaires rationnelles. Comme dans cette intégration, les dénominateurs des fractions partielles ne passent pas ordinairement le second degré, on suit pour la décomposition des fractions, presque dans tous les traités, la méthode qu'Euler a donnée en 1780, et qui est assez praticable dans ces cas. Mais, outre que cette méthode n'est pas toujours la plus expéditive, parceque déjà dans le cas des dénominateurs partiels du *second* degré, si leurs facteurs simples sont imaginaires, on est impliqué dans le calcul des imaginaires, ce qui est incommode, elle est de plus sujette à l'imperfection de passer par la voie des imaginaires des quantités réelles à des résultats également réels. Et si les dénominateurs partiels passent le *second* degré, cette méthode est presque impraticable. A cela vient qu'on néglige de démontrer rigoureusement l'admissibilité de la *forme* de la décomposition. Ou on la *suppose* seulement, et alors elle n'est que vérifiée à posteriori, dans chaque cas particulier; ou bien on la démontre par le *nombre* des coefficiens indéterminés qui entrent en calcul, et cette démonstration n'est pas exempte de doutes.

Euler a donné dans les Mémoires de Petersbourg, tom. I., 1809, une autre méthode de décomposition des fractions algébriques, laquelle a pour but, d'éviter les calculs des imaginaires, et de passer directement des données réelles aux résultats réels. Cette méthode, remarquable en soi par la nouveauté des réflexions et par les traits de génie que l'immortel Euler déploie en cette occasion comme dans tant d'autres, ne semble pas être encore entrée dans les cours d'analyse et dans l'instruction, quoiqu'elle y pût être essentiellement utile. Elle offre déjà un perfectionne-

ment considérable du calcul des fractions partielles, parcequ'elle évite effectivement les imaginaires dans *tous* les cas des données réelles. Mais elle n'est pas encore la plus expéditive, ni la plus simple, et elle manque également de la démonstration rigoureuse de la *forme* de décomposition.

Enfin la décomposition des fractions algébriques en général n'est pas attachée de nécessité à l'intégration des différentielles fractionnaires rationnelles. Elle est une opération algébrique indépendante de cette application, et ne doit pas se borner aux besoins actuels de l'intégration.

Elle est donc généralement encore assez imparfaite dans son état actuel, et il ne sera pas inutile de traiter cet objet un peu plus à fond. C'est ce que nous voulons essayer dans ce mémoire.

Nous commencerons par la démonstration de la *forme* de la décomposition, et ensuite nous procéderons aux différentes méthodes *de trouver les numérateurs des fractions partielles* dans les différens cas. Mais pour mieux confronter les différentes méthodes, il faudra que nous touchions rapidement aussi les méthodes usitées plus généralement; et comme la *pratique* du calcul est ici ce dont il s'agit principalement, nous appliquerons les divers procédés à des exemples en nombres.

Introduction.

1.

Si U, y, N désignent des polynomes rationnels, contenant diverses puissances de x à exposans entiers, et que, dans les cas où *le degré* du polynome entre en calcul, on marque à côté des signes des polynomes, le *plus haut exposant de x*, de sorte que par exemple

$$1.\quad {}^mU = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \varepsilon_3 x^2 + \varepsilon_4 x^3 \ldots . + \varepsilon_{m+1} x^m,$$

où les coefficiens ε ne contiennent pas x: *toute* fraction algébrique rationnelle $\frac{{}^mU}{{}^nV}$ peut être exprimée par

$$2.\quad \frac{{}^mU}{{}^nV} = \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho \cdot {}^sN},$$

où m, n, r, ϱ et s sont des nombres *entiers* et où l'on peut toujours supposer

$$3.\quad m < n, \text{ c'est à dire } m < r\varrho + s.$$

Car en premier lieu ${}^{s}N$ peut de nouveau être supposé de la forme de V, c'est à dire de la forme ${}^{r_1}y_1^{\rho_1}\,.\,{}^{s_1}N_1$; ${}^{s_1}N_1$ peut encore être supposé de la forme ${}^{r_2}y_2^{\rho_2}\,.\,{}^{s_2}N_2$ etc. et enfin ${}^{s_k}N_{k-1}$ sera de la forme ${}^{s_k}y_k$, de sorte que

$$4.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\rho}\,.\,{}^{s}N} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\rho}\,.\,{}^{r_1}y_1^{\rho_1}\,.\,{}^{s_1}N_1} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\rho}\,.\,{}^{r_1}y_1^{\rho_1}\,.\,{}^{r_2}y_2^{\rho_2}\,.\,{}^{s_2}N_2} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\rho}\,.\,{}^{r_1}y_1^{\rho_1}\,.\,{}^{r_2}y_2^{\rho_2}\ldots\ldots{}^{r_k}y^{\rho_k}},$$

où la dernière expression de $\frac{{}^{m}U}{{}^{n}V}$ embrasse visiblement tous les cas possibles. En second lieu $n = r\rho + s$ peut toujours être supposé plus grand que m. Car si n étoit égal à m, ou plus petit que m, on pourroit *diviser* U par V. Par cela la fraction se trouveroit décomposée en deux parties, l'une *entière* et l'autre *fractionnaire*. Le *reste* de la division seroit le numérateur de la partie fractionnaire, de laquelle il s'agit seulement; et puisque le *reste* d'une division est nécessairement d'un degré moins élevée que le dividende, au moins d'une unité, cette partie fractionnaire, qui vient seule en considération, se trouvera dans le cas supposé de $\frac{U}{V}$.

2.

Tout résultat de décomposition d'une fraction algébrique quelconque peut être représenté sous la forme

$$5.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\rho}\,.\,{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y^{\rho}} + \frac{{}^{n-r-1}Z_1}{{}^{r}y^{\rho-1}\,.\,{}^{s}N}.$$

La partie détachée $\frac{Z}{y^{\rho-1}N}$ est de nouveau de la forme de la fraction donnée $\frac{U}{y^{\rho}N}$, de sorte qu'on peut supposer

$$6.\quad \frac{{}^{n-r-1}Z_1}{{}^{r}y^{\rho-1}\,.\,{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^{r}y^{\rho-1}} + \frac{{}^{n-2r-1}Z_2}{{}^{r}y^{\rho-2}\,.\,{}^{s}N}.$$

Ici la fraction $\frac{Z_2}{y^{\rho-2}N}$ est encore de la forme de la fraction donnée; donc on peut supposer

$$7.\quad \frac{{}^{n-2r-1}Z_2}{{}^{r}y^{\rho-2}\,.\,{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^{r}y^{\rho-2}} + \frac{{}^{n-3r-1}Z_3}{{}^{r}y^{\rho-3}\,.\,{}^{s}N}$$

etc. En continuant la décomposition de cette manière et en substituant on trouve

$$8.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\rho}\,.\,{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y^{\rho}} + \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^{r}y^{\rho-1}} + \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^{r}y^{\rho-2}}\ldots\ldots + \frac{{}^{r-1}w_{\rho}}{{}^{r}y} + \frac{{}^{s-1}Z_{\rho}}{{}^{s}N},$$

et par là la décomposition est finie, quant au facteur ${}^{r}y^{\rho}$ du dénominateur

de la fonction donnée. On peut maintenant continuer l'opération pour un autre facteur ${}^{r_1}y_1^{\varrho_1}$ contenu dans ${}^{s}N$ et épuiser de cette sorte successivement tous les facteurs de N. Cela étant fait, la fonction proposée $\frac{U}{V}$ sera décomposée en une série de fractions de la forme $\frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\mu}}$, qui est celle dont on a besoin ordinairement.

Les problèmes qui se présentent dans la décomposition des fractions algébriques rationnelles se réduisent donc aux deux suivants:

I. Démontrer que la *forme* générale de décomposition représentée par la formule (5.) a lieu dans tous les cas.

II. Trouver les *numérateurs* w et Z des fractions partielles, leurs dénominateurs y^{ϱ} et $y^{\varrho-1}N$ étant donnés.

Nous commencerons par le premier problème.

Section première.

De la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles.

3.

En supposant l'expression (5.) on donne ordinairement *des coefficiens indéterminés* aux numérateurs w et Z des deux fractions partielles. Ces coefficiens trouvés, la décomposition sera effectuée. Dans le cas où l'on a attention à *démontrer* la *forme supposée* de la décomposition (ce qu'on ne fait pas toujours), on tire comme suit du *nombre* des coefficiens indéterminés la justification de cette forme.

En multipliant l'expression (5.) par ${}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N$ elle donne

$$9. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w.{}^{s}N + {}^{r}y.{}^{n-r-1}Z.$$

Ici le degré du produit ${}^{r-1}w.{}^{s}N$ est $s+r-1$, celui du produit ${}^{r}y.{}^{n-r-1}Z$ est $r+n-r-1=n-1$. Le dernier l'emporte sur le premier, ou lui est tout au plus égal, puisque $s+r$ est plus petit que n si $\varrho>1$, et égal à n si $\varrho=1$. Donc le plus haut degré auquel s'élève x à droite dans (9.) est $n-1$. Donc l'équation (9.) offre n équations pour servir à la détermination des coefficiens indéterminés qu'elle renferme. Il n'y a pas d'exception dans les cas où m est plus petit que $n-1$. Dans ce cas quelques unes des n équations qu'offre celle (9.) ont *zéro* à l'u de leurs deux côtés. Maintenant les polynomes w et Z, qui sont l seuls dans (9.) renfermant des coefficiens *indéterminés*, en contiennent r

spectivement r et $n-r$; c'est à dire: le nombre total des coefficiens indéterminés renfermés dans (9.) est $r+n-r=n$. Ce nombre est égal à celui des équations *déterminantes*. Donc le nombre de ces équations est généralement suffisant pour donner la valeur des coefficiens indéterminés, et de là on conclut ordinairement que ces coefficiens peuvent toujours être trouvés de l'équation supposée et que par suite la *forme* de cette équation est toujours admissible.

Mais il se pourroit bien que parmi les équations déterminantes il s'en trouvât *d'identiques*. Ci cela étoit, ces équations identiques ne contribueroient pas à la détermination des inconnues; donc, dans ce cas, les coefficiens indéterminés ne pourroient être trouvés *tous*, et par conséquent la forme supposée ne seroit pas admissible. Il s'agit donc encore de démontrer que toutes les n équations déterminantes sont nécessairement toujours *non-identiques* et c'est cette partie de la justification de la forme supposée qu'on néglige ordinairement.

Mr. Dirksen, en remarquant la nécessité de démontrer la non-identicité des équations déterminantes, a donné cette démonstration, en supposant dans (5.) $r=1$, cas duquel on peut partir, puis'quon peut supposer ${}^r y$ décomposé dans ses r facteurs simples. Nous ne reproduirons pas cette démonstration parcequ'on peut la voir dans ce journal même, tom. I. cah. 1. page 55. etc.

Nous passons à une autre

Demonstration de la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles, donnée par Mr. Cauchy.

4.

Cette démonstration se trouve dans le Cours d'analyse de l'auteur, tom. I. chap. XI. Nous le reproduirons ici sous une forme un peu variée, pour compléter nos recherches. Elle revient à ce qui suit.

I. Supposons

10. $${}^r y = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_r),$$

de sorte que $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_r$ sont les r racines de l'équation

11. $${}^r y = 0,$$

II. Cela posé, désignons par u_1 un polynome de dégré $r-1$, encore inconnu mais composé des puissances de x à exposans entiers et

ayant les deux propriétés suivantes, savoir: *d'être zéro pour toutes les valeurs* x_2, x_3, ... x_r *de* x *et égal à* 1 *pour la valeur* x_1 *de* x.

Il est clair d'abord que ce polynome doit être divisible par tous les facteurs $x-x_2$, $x-x_3$, ... $x-x_r$, c'est à dire de la forme

$$12.\quad u_0 = C(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_r),$$

où le facteur C ne contient plus x. Car si, par ex., u_0 n'étoit pas divisible par $x-x_2$ mais au contraire $u_0=(x-x_2)q+R$, où R n'a pas $x-x_2$ pour facteur, on auroit, en mettant $x=x_2$, $u_0=R$ et non pas zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut dans d'abord que u_1 soit $=(x-x_2)q_1$; et puisque u_0 doit être zéro également pour $x=x_3$ il faut que q_1 le soit aussi, c'est à dire que q_1 soit $=(x-x_3)q_2$, et par une raison semblable, $q_2=(x-x_2)q_3$ etc. En substituant on trouve

$$u_1 = (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_{r+1})q_{r-1}.$$

Mais le dernier facteur q_{r-1} ne peut renfermer x, parceque u_0 ne doit être que du degré $r-1$. Donc enfin u_0 aura la forme (12.). Il ne peut non plus avoir quelque autre forme rationnelle, et on ne peut pas supposer par ex. $u_1=(x-x_2)^{\mu}q_1$, où $\mu>1$, puisque dans ce cas u_1 ne pourrait être du degré $r-1$ *seulement*, et divisible par *tous* les facteurs $x-x_2$, $x-x_3$, ... $x-x_r$ en même tems.

III. Pour satisfaire à la seconde condition supposée pour u_0, d'être $=1$ pour $x=x_1$, il faut que

$$13.\quad u_1 = 1 = C(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_r).$$

Cela donne

$$14.\quad C = \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_3)\dots(x_1-x_r)},$$

Donc, en substituant dans (12.), on trouve

$$15.\quad u_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_r)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_r)}.$$

Ce polynome rationnel et *entier* de x (car le dénominateur de (15.) ne contient pas x) a donc les proprietés prescrites: d'être zéro pour $x=x_2$, x_3, ... x_r et 1 pour $x=x_1$. Il est du degré $r-1$.

IV. On trouvera également d'autres polynomes rationnels et entiers u_2, u_3, ... u_{r-1} de degré $r-1$ qui soient $=1$ respectivement pour $x=x_2$, x_3, ... et zéro pour toutes les autres valeurs que peut avoir x. Ils sont

$$16. \begin{cases} u_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots\ldots(x-x_r)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots\ldots(x_2-x_r)}, \\ u_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots\ldots(x-x_r)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots\ldots(x_3-x_r)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_r = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x-x_{r-1})}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x_r-x_{r-1})}. \end{cases}$$

V. Si donc on fait

$$17.\quad u = A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 \ldots\ldots + A_ru_r,$$

où les quantités *arbitraires* $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_r$ ne renferment pas x, la lettre u représentera un polynome rationnel et entier de degré $r-1$ qui a la propriété d'être $= A_1$ pour $x = x_1$, $= A_2$ pour $x = x_2$ etc. et enfin $= A_r$ pour $x = x_r$. Car, comme on voit par les expressions (15. et 16.), on a $u_1 = 1$ si l'on fait $x = x_1$, et en même tems $u_2, u_3, \ldots \ldots u_r = 0$. Si l'on fait $x = x_2$ on a $u_2 = 1$ et en même tems $u_1, u_3, u_4, \ldots\ldots u_r = 0$ etc.

On voit aussi, par l'analyse qui précède, qu'il n'existe pas d'autre polynome rationnel et entier *de degré* $r-1$ qui donne A_1 pour $x = x_1$, A_2 pour $x = x_2$ etc.

VI. Cela posé, soit à décomposer la fraction

$$18.\quad \frac{U}{y^\varrho . N}.$$

Désignons les valeurs indépendantes de x, que prend la fonction $\frac{U}{N}$ si l'on y donne successivement à x les valeurs déterminées $x_1, x_2, \ldots\ldots x_r$, racines de l'équation $y = 0$ (10.), par

$$19.\quad \frac{_1U}{_1N} = A_1,\quad \frac{_2U}{_2N} = A_2,\quad \ldots\ldots\quad \frac{_rU}{_rN} = A_r:$$

nous avons vu ci-dessus qu'il existe toujours un polynome

$$u = A_1u_1 + A_2u_2 \ldots\ldots + A_ru_r,$$

c'est à dire le polynome

$$20.\quad u = \frac{_1U}{_1N}u_1 + \frac{_2U}{_2N}u_2 + \frac{_3U}{_3N}u_3 \ldots\ldots + \frac{_rU}{_rN}u_r$$

de degré $r-1$ dont les valeurs sont respectivement

$$\frac{_1U}{_1N},\ \frac{_2U}{_2N},\ \ldots\ldots\ \frac{_rU}{_rN} \text{ pour } x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_r.$$

Donc, si l'on pose la quantité

$$21.\quad U - uN,$$

cette quantité sera zéro pour les différentes valeurs x_1, x_2, x_3, ... x_r, de x. Car en mettant par ex. $x = x_1$, U et N se reduiront à ${}_1U$ et ${}_1N$ et u à u_1, donc $U - uN$ à ${}_1U - \frac{{}_1U}{{}_1N} N_1 = {}_1U - {}_1U = 0$. Si l'on fait $x = x_2$ U et N se réduiront à ${}_2U$ et ${}_2N$ et u à u_2, donc $U - uN$ à ${}_2U - \frac{{}_2U}{{}_2N} {}_2N_2 = {}_2U - {}_2U = 0$ etc.

VII. Mais puisque la quantité $U - uN$ est zéro pour toutes les valeurs x_1, x_2, ... x_r de x, il faut qu'elle soit divisible par $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$, ... $x - x_r$ en même tems, par une raison semblable à celle dans le cas ci-dessus de u_0 (II.). On peut donc supposer:

22. $\quad {}^mU - {}^{r-1}u\,{}^sN = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r).{}^{n-1}T = {}^ry.{}^{n-r-1}T$ (10).

Le facteur T doit être supposé être un polynome du degré $n-r-1$, puisque la plus grande valeur de m est $n-1 > s+r-1$.

VIII. Si l'on divise (22.) par ${}^ry^\varrho.{}^sN$, on trouve

$$\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} - \frac{{}^{r-1}u}{{}^ry^\varrho} = \frac{{}^{n-r-1}T}{{}^ry^{\varrho-1}.{}^sN}$$

ou bien

$$23. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} = \frac{{}^{r-1}u}{{}^ry^\varrho} + \frac{{}^{n-r-1}T}{{}^ry^{\varrho-1}.{}^sN}.$$

C'est donc l'expression décomposée à laquelle peut être réduite la fraction $\frac{U}{y^\varrho N}$. On voit que sa forme s'accorde parfaitement avec celle (5.). Les quantités u et T dans (23.) sont les mêmes qu'on a désignées par w et Z dans (5.). La forme supposée (5.) pour la décomposition des fractions se trouve donc justifiée.

IX. Cette démonstration est sans doute bien rigoureuse *si l'on fixe d'abord la forme des dénominateurs des deux fractions partielles.*

Mais sans cela il y a une difficulté. Car dans (VII.) on trouve que la quantité $U - uN$ est nécessairement divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r) = {}^ry,$$

parcequ'elle est $= 0$ pour $x = x_1$, $x = x_2$, ... $x = x_r$. Mais *par cette seule raison* elle pourroit bien être également divisible par ${}^ry^2$, ${}^ry^3$ etc. et même par un produit comme $(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_r)^{m_r}$, où les exposans des facteurs simples sont inégaux. Et si par ex, on avait

$$24. \quad {}^mU - {}^{r-1}u.{}^sN = {}^ry^m.{}^{n-rm-1}T,$$

cela, en divisant par ${}^ry^\varrho.{}^sN$, donnerait

$$25. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} = \frac{{}^{r-1}u}{{}^ry^r} + \frac{{}^{n-rm-1}T}{{}^ry^{\varrho-1}.{}^sN},$$

où u a encore *la même* valeur que ci-dessus. Il est vrai qu'une expression de la forme (25.) peut avoir lieu effectivement. Elle se présente si dans (8.) on réunit en un seul les m premiers termes à droite et *tous* les autres termes dans la seconde fraction partielle. Mais alors le numérateur u de la première fraction partielle n'est plus le même qu'auparavant. Il est alors du degré $mr-1$ et non du degré $r-1$. Pour faire voir qu'une même valeur de u, celle (20.), ne peut convenir également aux deux expressions (23. et 25.), il paroît que les coefficiens indéterminés doivent être appelés comme secours.

Autre démonstration à la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles.

5.

La démonstration suivante est, comme on verra, purement élémentaire et exempte de doutes. Elle ne repose que sur la division ordinaire des polynomes.

I. Supposons en premier lieu que dans l'expression générale $\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN}$ des fractions qui peuvent se présenter à être décomposées, l'exposant ϱ de y soit $=1$, de sorte que la fraction à décomposer soit

$$26. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry.{}^sN} = \frac{{}^mU}{{}^nV}, \quad \text{où} \quad n = s + r$$

et où y ne contient que des facteurs *inégaux;* et soient, comme ci-dessus (10.), $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_r$ les r facteurs *inégaux* de y, de sorte que

$$27. \quad y = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots.(x-x_r);$$

on suppose que ni U ni N ne soit divisible par aucun des facteurs $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_r$. Mais la quantité V sera divisible par tous les facteurs $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_r$. Si on la divise par $x-x_1$, le quotient sera du degré $n-1$; si l'on divise ce quotient par $x-x_2$, le nouveau quotient sera de degré $n-2$ etc. jusqu'au r^{me} quotient qui sera ${}^sN$. On pourra donc écrire

$$28. \quad \begin{cases} {}^nV = (x-x_1)\,{}^{n-1}V_1 \\ {}^{n-1}V_1 = (x-x_2)\,{}^{n-2}V_2 \\ {}^{n-2}V_2 = (x-x_3)\,{}^{n-3}V_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{n-r+1}V_{r-1} = (x-x_r)\,{}^sN \end{cases}$$

où la quantité V_1 n'est plus divisible par $x-x_1$, celle V_2 ne l'est pas par $x-x_1$ et $x-x_2$ etc.

II. Cela posé, divisons ${}^mU$ et ${}^{n-1}V_1$ par $x-x_1$. Puisque les deux quantités ne sont pas divisibles par $x-x_1$, il y aura nécessairement un *reste* de chaque division et les deux restes seront des quantités A et B *indépendantes de* x ou du degré zéro, car le reste d'une division est toujours d'un degré *moindre* que le diviseur, au moins d'une unité; le diviseur est ici du degré 1, donc le reste, qui d'ailleurs existe *nécessairement*, ne peut être que du degré 0, c'est à dire indépendant de x.

On peut donc supposer

$$29.\quad {}^mU = {}^{m-1}P(x-x_1) + {}^0A \quad \text{et}$$

$$30.\quad {}^{n-1}V_1 = {}^{n-2}Q(x-x_1) + {}^0B.$$

Multipliant l'équation (30.) par

$$31.\quad \frac{{}^0A}{{}^0B} = {}^0\lambda_1$$

il vient

$$32.\quad {}^0\lambda_1 . {}^{n-1}V_1 = {}^0\lambda_1 . {}^{n-2}Q(x-x_1) + {}^0A.$$

Soustrayant (32.) de (29.) on aura

$$33.\quad {}^mU - {}^{n-1}V_1 . {}^0\lambda_1 = ({}^{m-1}P - {}^0\lambda_1 . {}^{n-2}Q)(x-x_1).$$

Puisque le degré m de U ne peut être plus grand que $n-1$, le degré $n-2$ de Q ne peut être plus petit que le degré $m-1$ de P, donc on peut faire

$$34.\quad {}^{m-1}P - {}^0\lambda_1 . {}^{n-2}Q = {}^{n-2}U_1.$$

Cela étant substitué dans (33.) donne

$$35.\quad {}^mU = {}^{n-1}V_1 . {}^0\lambda_1 + {}^{n-2}U_1(x-x_1).$$

En divisant cette équation par ${}^nV = (x-x_1)\,{}^{n-1}V_1$ (28.) on aura

$$36.\quad \frac{{}^mU}{{}^nV} = \frac{{}^0\lambda_1}{x-x_1} + \frac{{}^{n-2}U_1}{{}^{n-1}V_1}.$$

III. On auroit eu le même résultat si m étoit $= n-1$. La fraction $\frac{{}^{n-2}U_1}{{}^{n-1}V_1}$, dont le dénominateur ne contient qu'une seule fois le facteur $x-x_2$, peut donc aussi être décomposée de nouveau et de la même manière que l'a été celle $\frac{{}^mU}{{}^nV}$ et on aura

$$\frac{{}^{n-2}U_1}{{}^{n-1}V_1} = \frac{{}^0\lambda_2}{x-x_2} + \frac{{}^{n-3}U_2}{{}^{n-2}V_2}.$$

On aura également

$$37.\quad \frac{{}^{m-3}U_2}{{}^{n-2}V_2} = \frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2} + \frac{{}^{n-4}U_3}{{}^{n-3}V_3}$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$38.\quad \frac{{}^{n-r}U}{{}^{n-r+1}V_{r-1}} = \frac{{}^{0}\lambda_r}{x-x_r} + \frac{{}^{n-r-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

Donc en substituant on aura, $n-r-1$ étant $= s-1$ (26.)

$$39.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y.{}^{s}N} = \frac{{}^{0}\lambda_1}{x-x_1} + \frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2} + \frac{{}^{0}\lambda_3}{x-x_3} \ldots\ldots + \frac{{}^{0}\lambda_r}{x-x_r} + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

IV. Prenant la somme des fractions partielles $\frac{{}^{0}\lambda_1}{x-x_1}$, $\frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2}$, ... $\frac{{}^{0}\lambda_r}{x-x_r}$ elle sera de la forme $\frac{{}^{r-1}T}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)} = \frac{{}^{r-1}T}{{}^{r}y}$; donc l'équation (39.) donnera

$$40.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}T}{{}^{r}y} + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

V. Il est à remarquer que dans cette expression aucun facteur de ${}^{r}y$ ne peut être diviseur de ${}^{r-1}T$ ni aucun facteur de ${}^{s}N$ diviseur de ${}^{s-1}U_r$. En effet l'équation (40.), multipliée par ${}^{r}y.{}^{s}N$, donne

$$41.\quad {}^{m}U = {}^{s}N.{}^{r-1}T + {}^{r}y.{}^{s-1}U_r$$

et cela fait voir que si ${}^{r}y$ et ${}^{r-1}T$ ou ${}^{s}N$ et ${}^{s-1}U_r$ avoient quelque facteur *commun*, ce facteur devoit être en même tems diviseur de ${}^{m}U$, ce qui n'est pas, parcequ'on a supposé que ${}^{m}U$ n'a pas de facteur commun avec ${}^{r}y$ et ${}^{s}N$.

Donc les deux fractions partielles dans (40.) sont *irréductibles*, et l'expression (40.) conserve sa forme si même m a sa plus grande valeur $n-1$.

VI. Supposons en second lieu que l'exposant ϱ de y dans l'expression générale des fractions algébriques soit >1 et

$$42.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N},\ \text{de sorte que } n = r\varrho + s.$$

Il est supposé encore qu'aucun facteur de ${}^{r}y$ ne soit diviseur ni de ${}^{m}U$ ni de ${}^{s}N$.

Divisons ${}^{m}U$ par ${}^{r}y.{}^{s}N$, le *quotient* sera généralement du degré $m-r-s$ et le *reste* du degré $r+s-1$ et on pourra écrire

$$43.\quad {}^{m}U = {}^{r}y.{}^{s}N.{}^{m-r-s}P + {}^{r+s-1}R.$$

Il est vrai que le nombre du degré du *quotient* P peut être *plus petit* que $m-r-s$ et même zéro, et que celui du degré du *reste* peut être un nombre *plus petit* que $r-s-1$, zéro non excepté. Mais les nombres

des degrés du quotient et du reste ne peuvent être *plus grands* que $m-r-s$ et $r-s-1$.

Il y a aussi à remarquer que le reste R ne peut être divisible par aucun facteur de ${}^ry$ ni de ${}^sN$; car s'il l'étoit, le polynome ${}^mU$, en vertu de l'équation (43.), devroit être également divisible par ce facteur, ce qui est contraire à l'hypothèse.

VII. Maintenant l'équation (43.) donne

$$44. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry\,.\,{}^sN} = {}^{m-r-s}P + \frac{{}^{r+s-1}R}{{}^ry\,.\,{}^sN}.$$

Ici la fraction $\frac{{}^{r+s-1}R}{{}^ry\,.\,{}^sN}$ est dans le cas de celle (26.). Elle est irreductible, son dénominateur est égal à celui de (26.) et le degré de son numérateur est plus petit que celui de son dénominateur, au moins d'une unité. Ce sont les conditions de forme de la fraction (26.). Donc la fraction $\frac{R}{yN}$ est décomposable suivant l'expression (40.) et on peut écrire

$$45. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry\,.\,{}^sN} = {}^{m-r-s}P + \frac{{}^{r-1}T}{{}^ry} + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^sN}.$$

VIII. Comprenons dans un seul terme le premier et le troisième terme à droite dans (45.). Ce terme sera une fraction qui a ${}^sN$ pour dénominateur et pour numérateur un polynome Z dont le degré est $m-r$ ou $s-1$ selon que l'un ou l'autre de ces nombres est le plus grand. Le plus haut degré de ce numérateur sera $n-r-1$, puisque la plus grande valeur que puisse avoir m est $n-1$. L'autre nombre $s-1$ sera toujours plus petit que $n-r-1$. Donc on peut généralement écrire

$$46. \quad {}^{m-r-s}P + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^sN} = \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^sN},$$

et en substituant dans (45.),

$$47. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry\,.\,{}^sN} = \frac{{}^{r-1}T}{{}^ry} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^sN}.$$

Divisant enfin cette équation par ${}^ry^{\varrho-1}$ et écrivant w à la place de T, on aura

$$48. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^{\varrho}\,.\,{}^sN} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^ry^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^ry^{\varrho-1}\,.\,{}^sN}$$

et c'est précisément la forme de décomposition (5.) dont il s'agissait de démontrer l'admissibilité.

IX. Multipliant l'expression (48.) ou bien (5.) par ${}^ry^{\varrho}\,.\,{}^sN$ elle donne

$$49. \quad {}^mU = {}^sN\,.\,{}^rw + {}^ry\,.\,{}^{n-r-1}Z.$$

Cette équation fait voir que ${}^{n-r-1}Z$ ne peut avoir de facteur commun avec ${}^{s}N$; car s'il en avoit, ce facteur devrait aussi être diviseur de ${}^{r}U$, ce qui n'a pas lieu suivant l'hypothèse. Mais ${}^{n-r-1}Z$ pourra avoir des diviseurs communs *avec* ${}^{r}y$, car il se pourroit bien que

$$50.\quad {}^{m}U - {}^{s}N.{}^{r}w$$

eût quelque diviseur commun avec ${}^{r}y$ et fût même divisible par toute la quantité ${}^{r}y$ ou par une puissance entière de ${}^{r}y$.

X. Donc si l'on veut supposer que la fraction donnée $\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N}$ soit *irréductible*, c'est à dire que son numérateur ${}^{m}U$ n'ait aucun facteur commun ni avec y ni avec N, il faut, en *continuant* la décomposition suivant (§. 2.), avant de décomposer la nouvelle fraction $\frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{r}y^{\varrho-1}.{}^{s}N}$, en éliminer les facteurs communs que pourroit avoir Z avec y ou N.

XI. Mais voyons comment le résultat se modifie *si l'on ne fait pas* la supposition que ${}^{m}U$ n'ait pas des diviseurs communs avec ${}^{r}y$ ou ${}^{s}N$, en supposant seulement que ${}^{r}y$ et ${}^{s}N$ soient prémiers *entre eux*.

Soit dans ce cas ${}^{m}U$ divisible par $x - x_1$, facteur de ${}^{r}y$, on aura dans (29.) ${}^{0}A = 0$, mais on n'aura pas dans (30.) ${}^{0}B = 0$, ${}^{n-1}V_1 = \frac{{}^{n}V}{x - x_1}$ (28.) $= \frac{{}^{r}y.{}^{s}N}{x - x_1}$ n'étant pas divisible par $x - x_1$ vu qu'on a supposé que ${}^{r}y$ ne contienne qu'une seule fois le facteur $x - x_1$ et qu'il n'ait aucun facteur commun avec ${}^{s}N$. Donc on aura ${}^{0}\lambda = 0$ (31.) et cela donne en (36.)

$$51.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{n-2}U_2}{{}^{n-1}V_2},$$

ce qui d'ailleurs est aussi évident par lui même, car $\frac{{}^{n-2}U_2}{{}^{n-2}V_2}$ n'exprime autre chose que ce qu'on trouve si l'on divise ${}^{m}U$ et ${}^{n}V$ par leur facteur commun $x - x_1$.

La même chose à lieu pour tout autre facteur commun de ${}^{m}U$ et ${}^{r}y$. Autant de numérateurs λ dans (39.) seront zéro qu'il y aura de facteurs communs dans ${}^{m}U$ et ${}^{r}y$. Donc, comme il est facile de voir, le numérateur ${}^{r-1}T$ dans (40.) aura commun avec ${}^{r}y$ les mêmes facteurs qui se trouvent dans ${}^{m}U$ et ${}^{r}y$ en même tems. Ces facteurs n'influent d'ailleurs en rien sur l'autre fraction $\frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N}$ (40.) dont le numérateur et le dénominateur peuvent encore avoir des facteurs communs. On tire aussi ce

résultat de l'équation (41.). Car si ${}^mU$ et ${}^ry$ ont des facteurs communs, il faut, comme le fait voir cette équation, que ces mêmes facteurs soient diviseurs de ${}^{r-1}T$, ${}^sN$ ayant été supposé premier avec ${}^ry$.

On peut donc conserver l'expression (40.) et l'appliquer également au cas où la fraction $\frac{{}^mU}{{}^nV}$ *n'est pas irréductible*. L'expression de $\frac{{}^mU}{{}^nV}$ ne change dans ce cas qu'en ce que la partie $\frac{{}^{r-1}T}{{}^ry}$ n'est pas alors irreductible non plus.

Cela posé, on voit que la formule de décomposition (40.) est encore applicable à la fraction $\frac{{}^{r+s-1}R}{{}^ry.{}^sN}$ (44.), qui ne sera pas irreductible, si $\frac{{}^mU}{{}^ry.{}^sN}$ ne l'est pas; donc la formule finale (47.) ou (48.) ou (5.) reste encore la même si ${}^mU$ a des facteurs communs avec ${}^ry$ ou ${}^sN$. Il n'y a pas d'autre différence dans les deux cas d'irréductibilité et de réductibilité de la fraction donnée, que la suivante: dans le premier cas la première des deux fractions partielles qu'un trouve est irréductible, et dans le second cas elle est réductible.

Donc la *forme* de décomposition (5.) est tout-à-fait générale et légitime dans tous les cas. Et si la méthode dont on se sert pour *calculer* les numérateurs des fraction partielles n'éxige pas l'irréductibilité de la fraction donnée, on peut toujours sans erreur partir de la forme générale de décomposition (5.).

Voilà la démonstration de la première des deux propositions (§. 2.) qui se présentent dans la décomposition des fractions algébriques, savoir de celle de la forme générale de décomposition. Nous passons à la seconde proposition (No. 2.), au problème de trouver les numérateurs w et Z des fractions partielles (5.).

Seconde section.

Différentes méthodes de calculer les numérateurs des fractions partielles dans lesquelles une fraction donnée peut être décomposée.

§. I. Première méthode: celle des coefficiens indéterminés.

6.

I. Nous avons démontré ci-dessus que l'expression décomposée des fractions algébriques rationnelles $\frac{{}^mU}{{}^ry.{}^sN}$ peut toujours être supposée de

de la forme

$$52.\quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^ry^\varrho} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^ry^{\varrho-1}.{}^sN},$$

ou bien de la forme

$$53.\quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho.{}^sN} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^ry^\varrho} + \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^ry^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^ry^{\varrho-2}} \ldots\ldots + \frac{{}^{r-1}w_\varrho}{{}^ry} + \frac{{}^{s-1}Z_\varrho}{{}^sN} \quad (8.)$$

et il s'agit maintenant de trouver les polynomes w et Z dans (52.) ou ceux w_1, w_2, w_3, ..., w_ϱ et Z dans (53.).

II. La première méthode qui se présente pour cela est, de supposer les coefficiens des polynomes w et Z inconnus ou indéterminés et de tirer leurs valeurs des équations qu'on trouve en égalant les coefficiens des diverses puissances de x à exposans égaux. Ayant vu que les formules (52. et 53.) expriment la fonction donnée dans tous les cas, il faut que les numérateurs w et Z puissent être trouvés toujours complètement.

III. En multipliant (52. et 53.) par ${}^ry^\varrho.{}^sN$ on a

$$54.\quad {}^mU = {}^{r-1}w.{}^sN + {}^{n-r-1}Z.{}^ry, \text{ et}$$

$$55.\quad {}^mU = [{}^{r-1}w_1 + {}^{r-1}w_2.{}^ry + {}^{r-1}w_3.{}^ry^2 \ldots. + {}^{r-1}w_\varrho.{}^ry^{\varrho-1}]{}^sN + {}^{s-1}Z_\varrho.{}^ry^\varrho.$$

La première de ces expressious offre r coefficiens indéterminés dans le polynome ${}^{r-1}w$ de degré $r-1$, et $n-r$ coefficiens dans le polynome ${}^{n-r-1}Z$ de degré $n-r-1$. Le nombre total des coefficiens indéterminés est donc $n+n-r=n$.

La seconde expression contient r coefficiens indéterminés dans chacun des ϱ polynomes ${}^{r-1}w_1$, ${}^{r-1}w_2$, ${}^{r-1}w_3$, ... ${}^{r-1}w_\varrho$ qui sont tous de degré $r-1$. Cela fait $r\varrho$ coefficiens indéterminés. Elle contient en outre s coefficiens dans le polynome ${}^{s-1}Z_\varrho$ qui est de degré $s-1$. Le nombre total des coefficiens indéterminés est donc encore $r\varrho+s=n$.

Ce nombre est donc toujours n, et puisque la plus grande valeur de m est $n-1$, ${}^mU$ peut contenir de son coté également n coefficiens *déterminés* mais non plusieurs. Si m est $< n$, les coefficiens des puissances de x plus hautes que x^m et plus faibles que x^n doivent être regardés $=0$. Mais dans tous les cas il existe n coefficiens donnés, ou pour mieux dire, n différentes puissances de x. Donc il y aura aussi dans tous les cas n équations, renfermant les n coefficiens inconnus. Ces équations seront toujours du *premier* degré ou de forme *linéaire*, parceque les polynomes *indéterminés* w et Z ne se trouvent multipliés que par des polynomes *déterminés*. Donc les coefficiens indéterminés pourront toujours être trouvés sans quelque difficulté de la part de la résolution des équa-

tions. Et puisqu'on a démontrée que les expressions (52. et 53.) ont lieu dans tous les cas, on est sûr qu'aucune équation déterminante ne peut être identique, et que les équations déterminantes suffiront toujours à donner tous les coefficiens inconnus. Donc la décomposition de la fraction donnée suivant la forme (52.) ou (53.) pourra toujours être complètement effectuée par la méthode des coefficiens indéterminés.

IV. Il faut remarquer qu'il vaudra toujours mieux de calculer suivant la forme (53. et 55.) et même de décomposer sur le champ ultérieurement la fraction $\frac{{}^{s-1}Z_\varrho}{{}^sN}$ si l'on a besoin de cette nouvelle décomposition; car le nombre des coefficiens indéterminés, dont la valeur est à calculer, est toujours le même dans (52.), dans (53.) et dans les formules ultérieurement décomposées. Donc en opérant suivant les dernières, on parvient au résultat final par le même calcul qui n'en donnerait qu'une partie si l'on calculoit suivant (52.).

7.

Nous donnerons *deux exemples en nombres*, auxquels nous appliquerons les différentes méthodes de décomposition, tant qu'il sera necessaire pour comparer entre eux les calculs qu'elles exigent. Dans l'un de ces deux exemples y sera du *premier* degré seulement; dans l'autre, ce facteur sera d'un degré plus élevé; mais, pour ne pas trop agrandir le calcul, il ne sera que du *second* degré; c'est le cas qui se présente le plus souvent, et, si l'on veut, c'est celui, auquel on peut réduire *tous* les autres cas sans tomber dans le calcul des imaginaires, parceque tout polynome peut être décomposé, comme on sait, en facteurs du *second* degré à coefficiens *réels*, combinés avec un facteur de *premier* degré si l'exposant est impair. Cependant les différentes méthodes de décomposition, comme on le verra, ne sont pas restreintes aux cas où le dénominateur de la fraction donnée a été décomposé en facteurs du premier et du second degré; au contraire elles sont généralement applicables.

I. *Premier exemple*

56. ${}^mU = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35$, donc $m = 6$;

57. ${}^ry^\varrho = (x-2)^5$, donc $r = 1$, $\varrho = 5$;

58. ${}^sN = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81$, donc $s = 5$ et $s + r\varrho = n = 10$;

59. $$\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho \cdot {}^sN} = \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35}{(x-2)^5(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}.$$

II. *Second exemple*

60. $^{m}U = 17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131$,
donc $m = 8$;

61. $^{r}y^{\varrho} = (x^2 - 2x + 5)^3$, donc $p = 2$, $\varrho = 3$;

62. $^{s}N = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3$, donc $s = 5$ et $s + r\varrho = n = 11$;

63. $$\frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho}.^{s}N} = \frac{17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131}{(x^2 - 2x + 5)^3 (x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)}.$$

8.

I. Pour appliquer au *premier* exemple (§. 7.) la méthode des coefficiens indéterminés, en calculant suivant les formules (53. et 55.), il y aura à supposer

64. $$\begin{cases} ^{r-1}w_1 = \alpha_1, \; ^{r-1}w_2 = \alpha_2, \; ^{r-1}w_3 = \alpha_3, \; ^{r-1}w_4 = \alpha_4, \; ^{r-1}w_5 = \alpha_5, \; r-1 \text{ étant } = 0, \\ ^{s-1}Z_{\varrho} = \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \end{cases}$$

où $\alpha_1 \ldots \alpha_5$, $\lambda_1 \ldots \lambda_5$ sont les $n = 10$ coefficiens indéterminés qu'il s'agit de trouver.

La formule (55.) donne

65. $$x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35$$
$$= [\alpha_1 + \alpha_2(x-2) + \alpha_3(x-2)^2 + \alpha_4(x-2)^3 + \alpha_5(x-2)^4][x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81]$$
$$+ [\lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5](x-2)^5$$
$$= [\alpha_5 x^4 + (\alpha_4 - 8\alpha_5)x^3 + (\alpha_3 - 6\alpha_4 + 24\alpha_5)x^2 + (\alpha_2 - 4\alpha_3 + 12\alpha_4 - 32\alpha_5)x + \alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 - 8\alpha_4 + 16\alpha_5]$$
$$\times (x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)$$
$$+ (\lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5)(x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32).$$

En faisant les produits à droite et en égalant les coefficiens d'égales puissances de x, on trouve 10 équations de premier degré, desquels on tirera par l'élimination les 10 coefficiens indéterminés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_5, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5$.

II. En appliquant au second exemple (No. 7.) la méthode des coefficiens indéterminés et en calculant suivant les formules (53. et 55.), on aura à supposer

66. $$\begin{cases} ^{r-1}w_1 = \alpha_1 x + \beta_1, \; ^{r-1}w_2 = \alpha_2 x + \beta_2, \; ^{r-1}w_3 = \alpha_3 x + \beta_3, \; r-1 \text{ étant } = 1, \\ ^{s-1}Z_{\varrho} = \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5$ sont les $n = 11$ coefficiens indéterminés qu'il s'agit de trouver.

La formule (55.) donne dans le cas actuel

66. $$17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131$$
$$= [\alpha_1 x + \beta_1 + (\alpha_2 x + \beta_2)(x^2 - 2x + 5) + (\alpha_3 x + \beta_3)(x^2 - 2x + 5)^2](x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)$$
$$+ (\lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5)(x^2 - 2x + 5)^3.$$

En fesant les produits à droite et en égalant les coefficiens d'égales puissances de x, on trouvera 11 équations linéaires qui serviront à déterminer les 11 coefficiens désignés par α, β et λ.

Sans finir le calcul on voit qu'il n'a pas d'autres difficultés que la longueur, et qu'il donnera des valeurs uniques et réelles des coefficiens cherchés. Mais on voit aussi que, l'élimination y comprise, il est vraiment énorme dans les deux exemples, quoique ces exemples ne soient pas choisis parmi les plus compliqués. Nous passerons donc à d'autres méthodes.

§ II. Seconde méthode. Méthode ancienne d'Euler.

9.

I. Toute expression décomposée d'une fraction sera nécessairement *identique* avec celle de la fraction elle même. Donc la double expression de la fraction ne constitue aucune *dépendance* des coefficiens des polynomes de x. Donc la valeur de ces coefficiens reste la même *quelle que soit la valeur qu'on donne à x.*

II. Soient x_1, α_2, $x_3 \dots . x_r$ les valeurs de x qui donnent

$$67. \quad {}^r y = 0,$$

de sorte que

$$68. \quad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots . (x - x_r) = {}^r y,$$

et distinguons les valeurs que w, U, N, Z prennent pour $x = x_1, x_2, x_3, \dots . x_r$ par les indices 1, 2, 3, ... r mis à gauche et en bas des lettres w, U, N, Z: les équations (54., 55.) auront également lieu et avec les mêmes valeurs des coefficiens si l'on y écrit ${}_1w$, ${}_2w$, ... ${}_rw$, ${}_1U$, ${}_2U$, ... ${}_rU$ etc. au lieu de w, U etc.; car on ne fait par là qu'assigner à x les valeurs particulières x_1, x_2, x_3, ... x_r. La substitution des r valeurs particulières de x fournira donc r équations différentes, et de ces équations on pourra trouver autant de coefficiens indéterminés.

III. Mais puisque ${}^r y = 0$ pour $x = x_1, x_2, \dots . x_r$, les parties à droites des équations (54., 55.) se réduiront à leurs premiers termes et les équations déterminantes, qu'on trouve d'abord, seront les suivantes

$$69. \quad {}^m_1U = {}^{r-1}_{\ 1}w_1 . {}^s_1N, \quad {}^m_2U = {}^{r-1}_{\ 2}w_1 . {}^s_2N, \quad {}^m_3U = {}^{r-1}_{\ 3}w_1 . {}^s_3N, \dots . \quad {}^m_rU = {}^{r-1}_{\ r}w_1 . {}^s_nN.$$

Ces r équations suffiront à trouver les r coefficiens indéterminés de ${}^{r-1}w_1$.

IV. Le numérateur ${}^{r-1}w_1$ de la première fraction partielle (53.) ayant été trouvé par là complètement, l'équation (55.) donne

$$70. \quad \frac{{}^mU - {}^sN . {}^{r-1}w_1}{{}^r y} - {}^xU = [{}^{r-1}w_2 + {}^{r-1}w_3 . {}^r y + {}^{r-2}w_4 . {}^r y^2 \dots . + {}^{r-1}w_\varrho . {}^r y^{\varrho-2}]\, {}^sN + {}^{\varrho-1}Z_\varrho . {}^r y^{\varrho-1}$$

où l'on voit que, $\frac{{}^{m}U - {}^{s}N.^{r-1}w_1}{{}^{r}y}$ étant égal à un polynome *non-fractionnaire*, ${}^{m}U - {}^{s}N.^{r-1}w_1$ doit être nécessairement *divisible* par ${}^{r}y$. Nous mettons à côté l'équation (54.) parceque le développement ultérieur s'exécute plus facilement suivant l'équation (55.).

V. Ayant calculé le quotient $\frac{{}^{m}U - {}^{s}N.^{r-1}w_1}{{}^{r}y} = \overset{s}{\check{U}}$ il n'y a qu'à l'écrire au lieu de U dans (69.) pour trouver w_2 et ainsi de suite, car l'équation (70.), et celles qui suivent, sont parfaitement semblables à l'équation (55.). Ayant enfin épuisé les différentes puissances de ${}^{r}y$, le dernier quotient donnera immédiatement le numérateur ${}^{s-1}Z_\varrho$ (53.) de la seconde partie de la fraction décomposée.

VI. Si $r = 1$, c'est à dire si y n'est que du premier degré, w_1, w_2, w_3, ... w_ϱ sont de degré 0 ou indépendants de x. Donc dans ce cas les équations (69.) se réduisent à une seule et donnent immédiatement

$$71. \quad w_1 = \frac{{}_1U}{{}_1N}.$$

Après cela, l'équation (70.) donne

$$72. \quad \left(\frac{U - \frac{{}_1U}{{}_1N}N}{y}\right) \cdot \frac{1}{N} = \frac{{}_1\check{U}}{{}_1N} = w_2,$$

bien entendu que dans $\frac{U - \frac{{}_1U}{{}_1N}N}{y}$, *après* la division, et dans N on doit faire $x = x_1$, et ainsi de suite.

10.

Appliquons cette méthode aux deux exemples ci-dessus.

Premier exemple (59.).

I. Dans cet exemple $y = x - 2 = 0$ donne

$$73. \quad x_1 = 2,$$

donc

$$74. \quad \begin{cases} {}^{m}_{1}U = 2^6 - 9.2^5 + 30.2^4 - 42.2^3 + 23.2^2 - 21.2 + 35 = 671 - 666 = 5, \\ {}^{s}N = 2^5 - 6.2^4 + \ 2.2^3 + 51.2^2 - 117.2 + 81 = 333 - 330 = 3, \end{cases}$$

donc

$$75. \quad w_1 = \frac{{}_1U}{{}_1N} (71.) = \frac{5}{3}.$$

II. Maintenant on a

$$76. \quad \overset{1}{U} = \frac{{}^{m}U - w_1 . {}^{s}N}{{}^{r}y}$$

$$= \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 34 - \frac{1}{3}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x - 2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(3x^5 - 26x^4 + 68x^3 - 186x + 150)$$

et cela donne pour $x = 2$, ${}_1\overset{1}{U} = \frac{2}{3}$, donc, ${}^{s}_{1}N$ étant $= 3$ (74.),

$$77. \quad w_2 = \frac{{}_1\overset{1}{U}}{{}_1N} \text{ (72.) } = \tfrac{2}{9} \text{ (74.)}$$

III. En mettant de nouveau $\overset{1}{U}$ au lieu de U et w_2 au lieu de w_1 dans (72.) on a

$$78. \quad \overset{2}{U} = \frac{\overset{1}{U} - w_2 N}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(3x^5 - 26x^4 + 68x^3 - 186x + 150) - \frac{2}{9}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x - 2}$$

$$= \tfrac{1}{9}(7x^4 - 52x^3 + 96x^2 + 90x - 144)$$

et cela donne pour $x = 2$, ${}_1\overset{2}{U} = \frac{116}{9}$, donc

$$79. \quad w_2 = \frac{{}_1\overset{2}{U}}{{}_1N} \text{ (72.) } = \frac{116}{27}.$$

IV. En mettant encore $\overset{2}{U}$ au lieu de $\overset{1}{U}$ et w_3 au lieu de w_2 dans (72.) on a

$$80. \quad \overset{3}{U} = \frac{\overset{2}{U} - w_3 N}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}(7x^4 - 52x^3 + 96x^2 + 90x - 144) - \frac{116}{27}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x - 2}$$

$$= \tfrac{1}{27}(-116x^4 + 485x^3 + 582x^2 - 4464x + 4914)$$

et cela donne pour $x = 2$, $\overset{3}{U} = \frac{338}{27}$, donc

$$81. \quad w_4 = \frac{{}_1\overset{3}{U}}{{}_1N} \text{ (72.) } = \frac{338}{81}.$$

V. Mettant $\overset{3}{U}$ au lieu de U et w_4 au lieu de w_3 dans (72.) on a

$$82. \quad \overset{4}{U} = \frac{\overset{3}{U} - w_4 N}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{27}(-116x^4 + 485x^3 + 582x^2 - 4464x + 4914) - \frac{338}{81}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x - 2}$$

$$= \tfrac{1}{81}(-338x^4 + 1004x^3 + 2787x^2 - 9918x + 6318)$$

et cela donne pour $x = 2$, $\overset{4}{U} = \frac{254}{81}$, donc

$$83. \quad w_5 = \frac{{}_1\overset{4}{U}}{{}_1N}\ (72.) = \frac{254}{243},$$

VI. Enfin mettant $\overset{4}{U}$ au lieu de U et w_5 au lieu de w_4 dans (72.) on a, les puissances de y ayant été épuisées:

$$85. \quad {}^{s-1}Z_\varrho = \frac{\overset{4}{U} - w_5 N}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{81}(-338x^4+1004x^3+2787x^2-9918x+6318) - \frac{254}{243}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{243}(-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810).$$

VII. En substituant $w_1, w_2, \ldots\ w_5$ et ${}^{s-1}Z_\varrho$ (76., 77., 79., 81., 83. et 84.) dans (53.) on a

$$85. \quad \frac{x^6-9x^5+30x^4-42x^3+23x^2-21x+35}{(x-2)^5(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)} = \frac{5}{3(x-2)^5} + \frac{2}{9(x-2)^4} + \frac{116}{27(x-2)^3}$$
$$+ \frac{338}{81(x-2)^2} + \frac{254}{243(x-2)} + \frac{-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810}{243(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}$$

et c'est l'expression de la fraction proposée décomposée complètement en fraction partielles pour ce qui regarde le facteur $(x-2)^5$ du dénominateur.

Seconde éxemple (63.).

VIII. Ici l'équation

$$86. \quad y = x^2 - 2x + 5 = 0$$

donne

$$87. \quad \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{(1-5)} = 1 + 2i \\ x_2 = 1 - \sqrt{(1-5)} = 1 - 2i \end{cases} \text{ en fesant } \sqrt{-1} = i.$$

Il faut donc subsituer d'abord ces valeurs de x_1 et x_2 au lieu de x dans U, N et w_1 (60., 62. et 66.). Cela donnera ${}_1U$, ${}_2U$, ${}_1N$, ${}_2N$ et ${}_1w_1$, ${}_2w$: Après on trouvera par les deux équations

$$88. \quad {}_1U = {}_1w_1 \cdot {}_1N \text{ et } {}_2U = {}_2w_1 \cdot {}_2N \ (69.)$$

les deux coefficiens indéterminés α_1 et β_1 de w_1 (66.).

IX. On peut encore abréger ce calcul comme suit. Les expressions de U, N et w_1, en y substituent x_1 au lieu x, seront de la forme

$$89. \quad {}_1U = p + qi, \quad {}_1N = \mu + \nu i \quad \text{et} \quad {}_1w_1 = \varkappa + \lambda i$$

et celles de ${}_2U$, ${}_2N$ et ${}_2w_1$ seront nécessairement

$$90. \quad {}_2U = p - qi, \quad {}_2N = \mu - \nu i \quad \text{et} \quad {}_2w_1 = \varkappa - \lambda i,$$

car on obtient x_2 si l'on écrit dans x_1, $-i$ au lieu de $+i$ (87.): donc on tirera aussi des résultats de la substitution de x_1 au lieu de x (89.),

ceux (90.) de la substitution de x_2 au lieu de x si dans les premiers on écrit $-i$ au lieu de $+i$.

Cela posé, les deux équations (88.), qui déterminent α et β, donnent

$$91. \quad \begin{cases} p+qi = (\mu+\nu i)(\varkappa+\lambda i) = \mu\varkappa+(\mu\lambda+\nu\varkappa)i-\nu\lambda, \\ p-qi = (\mu-\nu i)(\varkappa-\lambda i) = \mu\varkappa-(\mu\lambda+\nu\varkappa)i-\nu\lambda. \end{cases}$$

Ajoutant et soustrayant ces équations l'une de l'autre on aura

$$92. \quad \begin{cases} p = \mu\varkappa-\nu\lambda \text{ et} \\ q = \mu\lambda+\nu\varkappa. \end{cases}$$

Ces équations prennent maintenant la place de celles (88.) et servent à déterminer les coefficiens indéterminés α et β contenus dans $\varkappa$ et λ (89. et 90.). Elles sont préferables à celles (88.) puisqu'elles ne renferment pas des quantités imaginaires.

X. On peut se servir d'une semblable transformation pour éliminer les imaginaires des équations déterminantes (69.) et pour les réduire à d'autres qui ne renferment que des quantités réelles, même dans les cas où il y a plus de deux coefficiens indéterminés. Mais on voit bien que la substitution des valeurs de $x_1, x_2, \ldots\ldots$ tirées de l'équation $y=0$, dans U, N, w, et les calculs qui suivent, sont fort pénibles. Ils seroient déjà asses fatigants dans l'exemple choisi. Par cette raison nous ne les continuerons pas; nous renverrons plutôt la décomposition de la fraction du second exemple aux méthodes suivantes.

§. III. Troisième méthode. Application du calcul différentiel à la méthode précédente.

11.

I. Si dans l'équation identique $fx = Fx$, où x peut avoir une valeur quelconque, on mèt $x+k$ au lieu de x, k étant arbitraire, on trouve

$$93. \quad fx+k\partial fx+\frac{k^2}{2}\partial^2 fx\ldots\ldots = Fx+k\partial Fx+\frac{k^2}{2}\partial^2 Fx\ldots\ldots,$$

et de cette équation on tire

$$94. \quad \partial fx = \partial Fx, \quad \partial^2 fx = \partial^2 Fx, \quad \partial^3 fx = \partial^3 Fx, \ldots\ldots$$

II. Si l'on applique cette transformation à l'équation *identique* (55.), on trouvera plusieurs équations différentes composées des quantités U, w, y, N, Z et de leurs *différentielles*.

Mais si *après* les différentiation on donne à x les valeurs particulières qui rendent y égal à zéro, tous les membres des différentes équations qui renferment y s'évanuiront. Ces membres seront, d'abord dans

la *première* équation différentielle, tous ceux qui tiennent leur origine des termes de l'équation primitive contenant y dans des puissances supérieures à la première, dans la *seconde* équation différentielle tous ceux que donnent les termes de l'équation primitive contenants des puissances de y plus élevées que la seconde, et ainsi de suite. Donc en différentiant, il suffit davoir égard aux termes $(w_1 + w_2 y)N$ pour la première différentiation, aux termes $(w_1 + w_2 y + w_3 y_2)N$ pour la seconde etc.

On aura donc

5. $$\begin{cases} U = w_1 N, \\ \partial U = [\partial w_1 + y\,\partial w_2 + w_2\,\partial y]N + [w_1 + w_2 y]\,\partial N, \\ \partial^2 U = [\partial^2 w_1 + \partial y\,\partial w_2 + y\,\partial^2 w_2 + \partial w_2\,\partial y + w_2\,\partial^2 y + \partial^2 w_3\,y^2 + 4y\,\partial y\,\partial w_3 + 2w_3\,\partial y^2 + 2w_3\,y\,\partial^2 y]N \\ \qquad + 2[\partial w_1 + y\,\partial w_2 + w_2\,\partial y + y^2\,\partial w_3 + 2w_3 y\,\partial y]\,\partial N \\ \qquad + [w_1 + y\,w_2 y^2 w_3]\,\partial^2 N, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mais y étant $= 0$, ces équations se réduisent à

96. $$\begin{cases} U = w_1 N \\ \partial U = [\partial w_1 + w_2\,\partial y]N + w_1\,\partial N \\ \partial^2 U = [\partial^2 w_1 + 2\partial y\,\partial w_2 + w_2\,\partial^2 y + 2w_3\,\partial y^2]N + 2[\partial w_1 + w_2\,\partial y]\,\partial N + w_1\,\partial^2 N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

III. Toutes les différentielles des quantités w, y, N, U s'évanouissent aussitôt que les nombres de leurs ordres surpassent ceux des degrés des quantités mêmes. Donc si le nombre r du degré de la quantité y est 1, *toutes* les différentielles de w seront zéro, puisqu'alors le nombre $r-1$ du degré de w est zéro; les différentielles de y dès la seconde le seront également

Donc dans ce cas les formules (96.) se reduiront à

97. $$\begin{cases} U = w_1 N, \\ \partial U = w_2 N\,\partial y + w_1\,\partial N, \\ \partial^2 U = 2w_3 N\,\partial y^2 + 2w_2\,\partial N\,\partial y + w_1\,\partial^2 N, \\ \partial_3 U = 6w_4 N\,\partial y^3 + 6w_2\,\partial N\,\partial y^2 + 3w_2\,\partial^2 N\,\partial y + w_1\,\partial^3 N, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

IV. Il est entendu que dans les formules (96., 97.) il faut donner à x successivement les r valeurs x_1, x_2, x_3, ... x_r qui satisfait à l'équation ${}^r y = 0$. Donc chaque équation donnera r différentes autres équations. Par ex. la première équation (96., 97.) donnera les r équations différentes

98. ${}_1U = {}_1w_1 . {}_1N,\ {}_2U = {}_2w_1 . {}_2N,\ {}_3U = {}_3w_1 . {}_3N,\ \dots\ {}_rU = {}_rw_1 . {}_3N$
qui s'accordent avec (69.). Les r différentes équations représentées par chaque équation (96., 97.) suffiront pour déterminer les r coefficiens indéterminés d'une des quantités $w_1, w_2, w_3 \dots w_\varrho$. De là on voit qu'il faut aller jusqu'à la ϱ^{me} équation différentielle pour trouver les numérateurs $w_1, w_2, w_3, \dots w_r$ des premiers fractions partielles (53.). La $\varrho + 1^{me}$ équation différentielle donnera le numérateur Z de la dernière fraction partielle (53.).

12.

En appliquant les formules (96., 97.) aux exemples ci-dessus on verra que la simplification de calcul qu'elles offrent est assez considérable dans le cas $r = 1$, mais elle ne l'est pas également dans les autres cas.

Premier exemple (59.).

I. La valeur $x_1 = 2$ (73.) de cet exemple donne, en vertu de la première formule (97.), $w_1 = \frac{{}_1U}{{}_1N} = \frac{2}{3}$ comme dans (No. 10. I.).

II. La seconde formule (97.) donne

$$99.\quad w_2 = \frac{\partial_1 U - w_1 \partial_1 N}{{}_1N \partial y}.$$

Mais des valeurs de U, N et y (56., 57., 58.) on tire

100. $\partial U = 6x^5 - 45x^4 + 120x^3 - 126x^2 + 46x - 21,$
101. $\partial N = 5x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 102x - 117,$
102. $\partial x = 1,$

et cela donne

$$103.\quad \begin{cases} \partial_1 U = 6.2^5 - 45.2^4 + 120.2^3 - 126.2^2 + 46.2 - 21 = -1, \\ \partial_1 N = 5.2^4 - 24.2^3 + 6.2^2 + 102.2 - 117 = -1, \end{cases}$$

donc suivant (99.)

$$104.\quad w_2 = \frac{-1 + \frac{2}{3}}{+3} = \frac{2}{9},\ \text{comme (77.)}.$$

III. La troisième formule (97.) donne

$$105.\quad w_3 = \frac{\partial^2{}_1U - 2w_2\partial_1 N \partial y - w_1 \partial^2{}_1N}{2{}_1N\partial y^2}.$$

De (100.) et (101.) on tire

106. $\partial^2 U = 30x^4 - 180x^3 + 360x^2 - 252x + 46,$
107. $\partial^2 N = 20x^3 - 72x^2 + 12x + 102,$

et cela donne

$$108.\quad \begin{cases} \partial_1^2 U = 30.2^4 - 180.2^3 + 360.2^2 - 252.2 + 46 = +22, \\ \partial_1^2 N = 20.2^3 - 72.2^2 + 12.2 + 102 = -2, \end{cases}$$

donc suivant (105.)

$$109.\quad w_3 = \frac{22 - 2.\frac{2}{9}.-1 - \frac{5}{3}.-2}{2.3.1} = \frac{198+4+30}{54} = \frac{232}{54} = \frac{116}{27}, \text{ comme (79.).}$$

IV. Sans continer plus loin le développement, on voit que le calcul en est plus simple que celui (No. 10.). On épargne au moins les différentes *divisions.*

Second exemple (63.).

V. Sans entrer dans aucun calcul on voit que les formules (96.) offrent encore presque toutes les difficultés de celles (69., 70. etc.), car les imaginaires, s'il y en a dans l'équation $y = 0$, se presentent ici également et l'élimination nécessaire pour trouver les coefficiens indéterminés de w_1, w_2, ... w_r est encore presque la même. Seulement les divisions se simplifient. En résumant, l'épargne n'est pas considérable et le calcul du second exemple seroit encore toujours assez fatigant. C'est pourquoi nous le supprimerons encore.

§. IV. Quatrième méthode. Celle de Mr. Cauchy.

13.

I. Suivant cette méthode on a, en écrivant dans (23.), conformément à la formule (5.), w et Z au lieu de u et T:

$$110.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{r}y^{\varrho-1}.{}^{s}N}.$$

où suivant (17., 15., 16. et 19.)

$$111.\quad {}^{r-1}w = \frac{{}_1U}{{}_1N}\,\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_r)} + \frac{{}_2U}{{}_2N}\,\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_r)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_r)}\ldots$$
$$\ldots + \frac{{}_rU}{{}_rN}\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{r-1})}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\ldots(x_r-x_{r-1})}.$$

Puisqu'on a supposé

$$112.\quad (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r) = {}^{r}y \text{ (10.)}$$

les numérateurs à droite dans (111.) ne sont autre chose que $\frac{y}{x-x_1}$, $\frac{y}{x-x_2}$, ... $\frac{y}{x-x_r}$ et les dénominateurs se tirent de ces numérateurs si l'on y écrit x_1, x_2, x_3, ... x_r au lieu de x. En indiquant cela par ${}_1\!\left(\frac{y}{x-x_1}\right)$, ${}_2\!\left(\frac{y}{x-x_2}\right)$, ... ${}_r\!\left(\frac{y}{x-x_r}\right)$ on peut aussi écrire l'expression (111.) comme suit.

$$113. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}_1U}{{}_1N}\left(\frac{y}{x-x_1}\right):{}_1\!\left(\frac{y}{x-x_1}\right) + \frac{{}_2U}{{}_2N}\left(\frac{y}{x-x_2}\right):{}_2\!\left(\frac{y}{x-x_2}\right) \ldots\ldots + \frac{{}_rU}{{}_rN}\left(\frac{y}{x-x_r}\right):{}_r\!\left(\frac{y}{x-x_r}\right).$$

II. C'est l'expression du numérateur ${}^{r-1}w$ de la première fraction partielle qui fait partie de l'expression décomposée de la fraction donnée (110.). Ayant trouvé w, l'équation (110.) ou bien celle (54.) donnera

$$114. \quad {}^{n-r-1}Z = \frac{{}^mU - {}^{r-1}w \,.\, {}^sN}{{}^ry}.$$

On peut maintenant traiter la fraction $\frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^ry^{\varrho-1}\,.\,{}^sN}$ comme on a traité la fraction donnée et continuer ainsi la décomposition jusqu'à ce qu'elle soit consommée. Puisque Z (113.) prend la place de U dans le calcul du numérateur w_2 de la seconde fraction partielle (53.), on tirera w_2 de la formule (112.) si l'on y ecrit Z au lieu de U et ainsi de suite.

III. On pourra aussi appliquer le calcul différentiel à ce mode de décomposition; mais nous ne nous y arrêterons pas, parceque cela revient plus ou moins aux opérations de la méthode précédente.

IV. Si $r=1$, c'est á dire si y (110.) est du premier degré, l'expression de w (111.) se réduit à

$$115. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}_1U}{{}_1N}$$

car dans ce cas la quantité $U - uN$ (21.), ou bien $U - wN$, est zéro pour $x = x_1$ si l'on fait $w = \frac{{}_1U}{{}_1N}$.

L'expression (114.) de ${}^{r-1}w_1$ est identique avec celle (71.) de la *seconde* méthode et les expressions des numérateurs des fractions partielles suivantes le seront également. Donc dans le cas $r=1$ les calculs de la présente méthode coïncident entièrement avec ceux de la seconde méthode.

V. Si r est plus grand que 1, l'expression (113.) donne *inmédiatement* les numérateurs des fractions partielles, et en cela la présente méthode diffère essentiellement de la seconde et la troisième où les numérateurs des fractions partielles ne se trouvent (69.) que par la voie des coefficiens indéterminés.

VI. Mais puisqu'il faut connaître les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de x qui rendent ${}^ry$ égal à zéro (112.) pour calculer ${}^{r-1}w$ suivant la formule (113.), on voit qu'on n'évite pas les imaginaires s'il y en a dans les racines de

l'équation $y=0$, quoique w soit réel. Mais on peut faire voir que ${}^{n-1}w$ est *nécessairement réel.*

VII. En effet quand il y a des racines imaginaires parmi celles de l'équation $y=0$, elles ne peuvent se présenter, comme on sait, que *par couples* et elle seront toujours de la forme

$$116. \quad \alpha+\beta i \text{ et } \alpha-\beta i.$$

On tirera l'une de l'autre en écrivant seulement $-i$ à la place de $+i$.

Soient x_1 et x_2 deux racines *correspondantes* de l'équation $u=0$, c'est à dire deux racines qui forment l'un des différens *couples* de racines, et soit

$$117. \quad \frac{y}{x-x_1}=\varkappa+\lambda i,$$

il est clair qu'on aura

$$118. \quad \frac{y}{x-x_2}=\varkappa-\lambda i,$$

car on tire $\frac{y}{x-x_2}$ de $\frac{y}{x-x_1}$ si l'on écrit $-i$ au lieu de $+i$; donc on aura aussi la valeur de $\frac{y}{x-x_2}$ si l'on écrit $-i$ au lieu de $+i$ dans $\varkappa+\lambda i$, valeur de $\frac{y}{x-x_1}$.

Par la même raison, si l'on suppose

$$119. \quad {}_1\left(\frac{y}{x-x_1}\right)=\delta+\varepsilon i, \quad {}_1U=p+qi, \quad {}_1N=\mu+\nu i,$$

on aura

$$120. \quad {}_2\left(\frac{y}{x-x_2}\right)=\delta-\varepsilon i, \quad {}_2U=p-qi, \quad {}_2N=\mu-\nu i.$$

Substituons les expressions (117. — 120.) dans les deux termes de l'expression ${}^{n-1}w$ (113.) correspondants aux deux racines x_1 et x_2, nous aurons

$$\frac{(p+qi)(\varkappa+\lambda i)}{(\mu+\nu i)(\delta+\varepsilon i)}+\frac{(p-qi)(\varkappa-\lambda i)}{(\mu-\nu i)(\delta-\varepsilon i)}$$

$$=\frac{(p\mu+q\mu i-p\nu i+q\nu)(\delta\varkappa+\delta\lambda i-\varepsilon\varkappa i+\varepsilon\lambda)+(p\mu-\mu q i+\nu p i+\nu q)(\delta\varkappa-\delta\lambda i+\varepsilon\varkappa i+\varepsilon\lambda)}{(\mu^2+\nu^2)(\delta^2+\varepsilon^2)}$$

$$=\frac{(p\mu+q\nu+(q\mu-p\nu)i)(\delta\varkappa+\varepsilon\lambda+(\delta\lambda-\varepsilon\varkappa)i)+(p\mu+q\nu-(q\mu+p\nu)i)(\delta\varkappa+\varepsilon\lambda-(\delta\lambda-\varepsilon\varkappa)i)}{(\mu^2+\nu^2)(\delta^2+\varepsilon^2)}$$

$$121. \quad =\frac{2(p\mu+q\nu)(\delta\varkappa+\varepsilon\lambda)-2(q\mu-p\nu)(\delta\lambda-\varepsilon\varkappa)}{(\mu^2+\nu^2)(\delta^2+\varepsilon^2)},$$

et cela est une quantité *réelle.*

On trouvera également des quantites réelles en combinant par couples les autres termes de l'expression (113.) correspondants aux racines

correspondantes, et si le nombre des racines est *impair*, une racine au moins est, comme on sait, nécessairement réelle.

Donc la quantité ${}^{r-1}w$ (113.) est toujours nécessairement réelle et la même chose a lieu pour les numérateurs des fractions partielles suivantes.

VIII. Mais quoique l'expression de ${}^{r-1}w$ (113.) puisse, comme nous venons de voir, être toujours transformée en une autre de la forme (121.) qui n'est composée que de quantités *réelles*, on n'est pas néanmoins dispensé du calcul des racines de l'équation $y = 0$ elles mêmes, car il faut connoître ces racines pour calculer les quantités p, q, μ, ν, $\varkappa$, λ, δ, ε.

IX. Nous n'appliquerons pas les formules de la méthode présente à nos deux exemples, parceque dans le cas $r = 1$ elles coïncident parfaitement avec celles de la seconde méthode et parceque dans les autres cas où $r > 1$ elles exigent toujours le calcul des racines de l'équation $y = 0$, lequel est embarrassant.

(La suite dans le cahier prochain.)

19.

Note sur l'intégration de la fonction $\frac{\partial z}{a+b.\cos z}$.

(Par Mr. R. Lobatto à la Haye.)

L'objet de cette note n'est que de faire voir, que l'on peut parvenir aux deux intégrales de la fonction $\frac{\partial z}{a+b\cos z}$, d'une manière plus expéditive que celle indiquée par Mr. Lacroix, dans son *Traité de calc. diff. et intégr.* Tom. II. pag. 106. Ces sortes de simplifications pouvant quelque fois être utiles aux progrès de l'analyse, l'on me pardonnera de revenir ici sur une intégrale connue.

En mettant la fonction dont il s'agit sous la forme

$$\frac{\partial z}{a(\sin^2\frac{1}{2}z+\cos^2\frac{1}{2}z)+b(\cos^2\frac{1}{2}z-\sin^2\frac{1}{2}z)} = \frac{\partial z}{(a+b)\cos^2\frac{1}{2}z+(a-b)\sin^2\frac{1}{2}z}.$$

L'intégrale

$$\int\frac{\partial z}{a+b\cos z} = 2\int\frac{\partial.\tang\frac{1}{2}z}{a+b+(a-b)\tang^2\frac{1}{2}z} = \frac{2}{a+b}\int\frac{\partial.\tang\frac{1}{2}z}{1+\frac{a-b}{a+b}\tang^2\frac{1}{2}z}.$$

Soit $\tang\varphi = \sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}.\tang\frac{1}{2}z$, on aura $\partial.\tang\frac{1}{2}z = \sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}.\partial\tang\varphi$, donc

$$\int\frac{\partial z}{a+b\cos z} = \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\int\frac{\partial.\tang\varphi}{1+\tang^2\varphi} = \frac{2\varphi}{\sqrt{(a^2-b^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{arc}\left\{\tang=\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\tang\frac{1}{2}z\right\};$$

or, puisqu'en général $2\,\text{arc}\tang = x = \text{arc}\tang = \frac{2x}{1-x^2} = \text{arc}\cos = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, l'intégrale se changera en $\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\,\text{arc}\cos = \left(\frac{a+b-(a-b)\tang^2\frac{1}{2}z}{a+b+(a-b)\tang^2\frac{1}{2}z}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{arc}\cos = \frac{(a+b)\cos^2\frac{1}{2}z-(a-b)\sin^2\frac{1}{2}z}{(a+b)\cos^2\frac{1}{2}z+(a-b)\sin^2\frac{1}{2}z} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{arc}\left(\cos = \frac{b+a\cos z}{a+b\cos z}\right).$$

Cette dernière intégrale suppose $a>b$; si l'on avait au contraire $b>a$, on mettrait

$$\int\frac{\partial z}{a+b\cos z} = \frac{2\varphi\sqrt{-1}}{\sqrt{(b^2-a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\tang\varphi}{1-\sqrt{-1}.\tang\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\log\left(\frac{\sqrt{(b+a)}+\sqrt{(b-a)}\tang\frac{1}{2}z}{\sqrt{(b+a)}-\sqrt{(b-a)}\tang\frac{1}{2}z}\right).$$

On peut simplifier encore cette expression, en posant $a = b\cos\alpha$, ce qui

donne $\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)} = \tang\frac{\alpha}{2}$; donc

$$\int\frac{\partial z}{a+b\cos z} = \frac{1}{b\sin\alpha}\log\left(\frac{1+\tang\frac{\alpha}{2}\tang\frac{z}{2}}{1-\tang\frac{\alpha}{2}\tang\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{b\sin\alpha}\log\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha-z}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\alpha+z}{2}\right)}\right),$$

α étant égal à l'arc dont le cosinus $=\frac{a}{b}$.

Voici encore un moyen plus direct pour parvenir à cette dernière intégrale. L'emploi de l'arc auxiliaire α, change la fonction à intégrer en

$$\frac{1}{b}\int\frac{\partial z}{\cos\alpha+\cos z} = \frac{1}{b}\int\frac{\partial\frac{z}{2}}{\cos\left(\frac{\alpha+z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-z}{2}\right)}.$$

Or, l'on a en général $\tang p+\tang q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$, donc

$$\tang\left(\frac{\alpha+z}{2}\right)+\tang\left(\frac{\alpha-z}{2}\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha+z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-z}{2}\right)},$$

$$\int\frac{\partial z}{\cos\alpha+\cos z} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\int\tang\left(\frac{\alpha+z}{z}\right).\frac{\partial z}{2}+\int\tang\left(\frac{\alpha-z}{2}\right).\frac{\partial z}{2}\right).$$

Si l'on se rappelle maintenant que $\partial\log\cos\varphi = -\tang\varphi\,\partial\varphi$, on en conclura de suite

$$\int\frac{\partial z}{\cos\alpha+\cos z} = \log\frac{\cos\left(\frac{\alpha-z}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+z}{2}\right)}.\frac{1}{\sin\alpha},$$

ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus.

Chacune des deux intégrales disparaît pour la valeur de $z=0$; si l'on suppose $z=\frac{\pi}{2}$, la première donnera $\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\arc\left(\cos=\frac{b}{a}\right)$, et la seconde $\frac{1}{b}\log\tang\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$. Ces deux valeurs devant être identiques, il en résultera, après avoir remplacé a par sa valeur $b\cos\alpha$, la relation

$$\log\tang\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\arc(\cos=\sec\alpha).$$

Il ne sera pas inutile de faire remarquer encore, comment on peut obtenir par ce qui précède l'intégrale définie de la fonction $\log(a+\cos z)\partial z$. En effet on a

$$\int\log(a+\cos z)\partial z=\int\partial z\int\frac{\partial a}{a+\cos z}=\int\partial a\int\frac{\partial z}{a+\cos z}=\int\frac{\partial a}{\sqrt{(a^2-1)}}\arc\cos=\frac{1+a\cos z}{a+\cos z}.$$

Prenant de part et d'autre l'intégrale entre les limites $z=0$ et $z=\pi$, on trouve immédiatement

$$\begin{matrix}z=0\\z=\pi\end{matrix}\int\log(a+\cos z)\partial z = \int\frac{\pi\,\partial a}{\sqrt{(a^2-1)}} = \pi\log(a+\sqrt{(a^2-1)}).$$

20.

Mémoire sur la théorie des nombres.

(Suite du mémoire No. 3. et 14. des cahiers précédents.)

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

1°. Supposons que $n = ap + 1$, soit un nombre premier quelconque, et que l'on élève successivement à la puissance a tous les nombres

$$1, 2, 3, \ldots\ldots ap;$$

si l'on divise toutes ces puissances par n, on obtiendra p résidus du degré a, différens entre eux et plus petits que n, qui seront chacun répétés a fois. En appelant

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\ldots \mathfrak{a}_r, \ldots\ldots \mathfrak{a}_p;$$

les résidus trouvés de cette manière, et en multipliant l'un quelconque $\mathfrak{a}_r$ de ces résidus par la suite des puissances

$$1^a, 1^a, 3^a, \ldots\ldots (pa)^a;$$

on obtiendra de nouveau, après avoir divisé par n, la série des nombres

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\ldots \mathfrak{a}_r, \ldots\ldots \mathfrak{a}_p;$$

disposés dans un ordre quelconque et répétés chacun a fois; et par conséquent l'on aura

$$\sum_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2\mathfrak{a}_r x^a \pi}{n} = \sum_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2x^a\pi}{n} = 1 + a\sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2\mathfrak{a}_u\pi}{n};$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2\mathfrak{a}_r x^a \pi}{n} = \sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2x^a\pi}{n} = a\sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2\mathfrak{a}_u\pi}{n}.$$

2°. Si à présent l'on ôte les p nombres

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\ldots \mathfrak{a}_r, \ldots\ldots \mathfrak{a}_p,$$

de la série des nombres

$$1, 2, 3, \ldots\ldots ap;$$

et que l'on prenne un nombre quelconque $\mathfrak{b}_r$ parmi les $(a-1)p$ nombres qui restent, on aura, en multipliant $\mathfrak{b}_r$ successivement par toutes les puissances

$$1^a, 2^a, 3^a, \ldots\ldots (pa)^a,$$

et divisant chaque produit par n, un nombre p de restes divers entre eux et plus petits que n, répétés chacun a fois et qui seront tous différens des nombres

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots\ldots \mathfrak{a}_r, \ldots\ldots \mathfrak{a}_p.$$

Si l'on appelle

$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots\ldots \mathfrak{b}_r, \ldots\ldots \mathfrak{b}_p,$$

ces nouveaux restes, en multipliant l'un quelconque d'entre eux b_r, successivement par toutes les puissances

$$1^a,\ 2^a,\ 3^a,\ \ldots.\ (pa)^a,$$

on aura de nouveau les nombres

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots.\ b_r,\ \ldots.\ b_p,$$

disposés dans un ordre quelconque et répétés chacun a fois: de manière que l'on obtiendra

$$\sum_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2 b_r x^a \pi}{n} = 1 + a \sum_{u=1}^{u=p+1} \cos\frac{2 b_u \pi}{n};$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \sin\frac{2 b_r x^a \pi}{n} = a \sum_{u=1}^{u=p+1} \sin\frac{2 b_u \pi}{n}.$$

3°. On pourrait de même obtenir les séries

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots.\ c_r,\ \ldots.\ c_p;$$
$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots.\ d_r,\ \ldots.\ d_p;$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .;$$
$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots.\ r_r,\ \ldots.\ r_p;$$

toutes composées de p termes différens, et qui jouissent de propriétés analogues aux séries

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_r,\ \ldots.\ a_p;$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots.\ b_r,\ \ldots.\ b_p;$$

et le nombre de toutes ces séries serait égal à a; de manière qu'en réunissant les nombres qui les composent, on aurait de nouveau tous les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ ap.$$

4°. Il serait aisé de démontrer que parmi les a séries que nous avons trouvées, il en existe un nombre b (qui est égal au nombre des nombres entiers plus petits que a, et qui n'ont pas de commun diviseur avec a) de la forme

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots.\ e_r,\ \ldots.\ e_p;$$
$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots.\ f_r,\ \ldots.\ f_p;$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{etc.};$$

qui jouissent de cette propriété, qu'en multipliant un terme quelconque e_r d'une de ces séries, par tous les autres termes de la même suite, on aura l'une des a séries que nous avons trouvées précédemment; puis en multipliant par e_r^2, la même série, on aura une autre de ces séries, et ainsi de suite jusqu'à . mais cette proposition est tout à fait étrangère aux recherches suivan .

Mainten..., si l'on fait, pour abréger,

$$1 + a \sum_{u=1}^{u=p+1} \left(\cos \frac{2a_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)} \sin \frac{2a_u\pi}{n}\right) = 1 + a\mathrm{A};$$

$$1 + a \sum_{u=1}^{u=p+1} \left(\cos \frac{2b_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)} \sin \frac{2b_u\pi}{n}\right) = 1 + a\mathrm{B};$$

. . . .

$$1 + a \sum_{u=1}^{u=p+1} \left(\cos \frac{2r_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)} \sin \frac{2r_u\pi}{n}\right) = 1 + a\mathrm{R};$$

et que l'on considère la congruence

$$x^a + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

on sait que le nombre N_1 de ses solutions entières, positives et moindres que n, est exprimé par l'équation

$$n\mathrm{N}_1 = \sum_{y=0}^{y=n} \sum_{x=0}^{x=n} \left(\cos 2y(x^a+1)\frac{\pi}{n} + \sqrt{(-1)} \sin 2y(x^a+1)\frac{\pi}{n}\right)$$

qui se réduira à l'autre

$$n\mathrm{N}_1 = n + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A}) + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B}) \ldots\ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R});$$

en distribuant les nombres 1, 2, 3, ... ap, en groupes, comme nous l'avons indiqué précédemment.

Si l'on cherche à présent le nombre N_2 des solutions entières, positives et moindres que n, de la congruence à deux inconnues

$$x^a + u^a + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

on aura l'équation

$$n\mathrm{N}_2 = \sum_{y=0}^{y=n} \sum_{x=0}^{x=n} \sum_{u=0}^{u=n} \left(\cos 2y(x^a + u^a + 1)\frac{\pi}{n} + \sqrt{(-1)} \sin 2y(x^a + u^a + 1)\frac{\pi}{n}\right),$$

qui se réduira à l'autre

$$n\mathrm{N}_2 = n^2 + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A})^2 + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B})^2 \ldots\ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R})^2.$$

De même en cherchant le nombre N_3 des solutions entières, positives et moindres que n, de la congruence à trois inconnues

$$x^a + u^a + v^a + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

on aura une équation de la forme

$$n\mathrm{N}_3 = n^3 + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A})^3 + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B})^3 \ldots\ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R})^3;$$

et ainsi de suite jusqu'à la congruence (qui renferme $a-1$ inconnues)

$$x^a + u^a + v^a + z^a \ldots\ldots + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

dont le nombre N_{a-1} des solutions comprises entre zéro et n, fournira l'équation

$$n\mathrm{N}_{a-1} = n^{a-1} + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A})^{a-1} + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B})^{a-1} \ldots\ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R})^{a-1}.$$

De cette manière on obtiendra un nombre $a-1$ d'équations, qui étant combinées avec l'équation connue

$$1 + A + B \ldots\ldots + R = 0,$$

serviront à déterminer, par l'élimination, les valeurs des a inconnues

$$A,\ B,\ \ldots\ldots\ R,$$

en fonction des nombres

$$n,\ a,\ N_1,\ N_2,\ \ldots\ldots\ N_{a-1}.$$

Au lieu d'effectuer cette élimination, il sera plus commode de chercher une équation

$$43.\quad Z = z^a + q_1 z^{a-1} + q_2 z^{a-2} \ldots\ldots + q_a = 0;$$

dont les a racines soient les quantités

$$A,\ B,\ \ldots\ldots\ R;$$

et les coefficiens de cette équation se détermineront avec la plus grande facilité; puisqu'on déduit des équations que nous avons trouvées

$$A + B \ldots\ldots + R = -1;$$

$$A^2 + B^2 \ldots\ldots + R^2 = \frac{nN_1 - n + 1}{a};$$

$$A^3 + B^3 \ldots\ldots + R^3 = \frac{nN_2 - 2nN_1 - (n-1)^2}{a^2};$$

et ainsi de suite pour les autres sommes des diverses puissances des racines de l'équation (43.). Maintenant les quantités

$$A,\ B,\ \ldots\ldots\ R,$$

sont les diverses racines de l'équation (43.); et si l'on suppose que l'on a résolu complètement cette équation, on aura une racine $z = A$; et partant en fesant

$$r = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{n},$$

on obtiendra

$$r^{a_1} + r^{a_2} \ldots\ldots + r^{a_p} = A,$$

et l'équation

$$X_1 = x^{a_1} + x^{a_2} \ldots\ldots + x^{a_p} - A = 0,$$

aura p racines communes avec l'autre

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Donc en cherchant le plus grand commun diviseur entre X et X_1, on trouvera une équation du degré p qui aura pour racines les quantités

$$r^{a_1},\ r^{a_2} \ldots\ldots r^{a_p};$$

et qui sera de la forme

$$X_2 = x^p + s x^{p-1} + t x^{p-2} \ldots\ldots + l = 0.$$

Pour trouver les autres facteurs de $X = 0$, l'on prendra la racine $z = B$,

de l'équation (43.) et on fera

$$r^{b_1} + r^{b_2} \ldots + r^{b_p} = \mathrm{B};$$

puis l'on cherchera une transformée de l'équation $X = 0$, telle que ses racines soient la somme de $p-1$ racines de $\mathrm{X} = 0$, prises négativement et augméntées de la quantité B; alors en appellant $X_3 = 0$, cette transformée, il est clair qu'elle aura p racines communes avec l'équation $\mathrm{X} = 0$; et en cherchant le plus grand commun diviseur entre $\mathrm{X}_3 = 0$; et $\mathrm{X} = 0$, on aura une équation du degré p, qui aura pour racines

$$x = r^{b_1};\ x = r^{b_2};\ \ldots x = r^{b_p}.$$

On voit comment l'on pourra trouver, par une procédé analogue à celui dont nous venons de faire usage, les autres facteurs de l'équation $\mathrm{X} = 0$. On obtiendra de cette manière a équations du degré p qui étant multipliées entre elles, donneront de nouveau l'équation $\mathrm{X} = 0$. On peut encore observer qu'ayant trouvé l'équation $X_2 = 0$, les autres facteurs du degré p, de l'équation $X = 0$, se formeront en changeant A, en B, dans tous les coefficiens de $X_2 = 0$; et ainsi de suite. Partant, étant donnée l'équation

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0,$$

dans laquelle $n = ap + 1$, est un nombre premier quelconque, on pourra toujours la décomposer en a équations du degré p, au moyen d'une équation du degré a.

Lorsque a et p, sont deux nombres premiers, l'analyse précédente suffit pour trouver tous les facteurs de l'équation $x^n - 1 = 0$; mais si a est un nombre premier, et p est un nombre composé, en supposant $p = bcd \ldots t$ (les nombres $b, c, d, \ldots t$, étant tous les facteurs premiers de p, égaux ou inégaux entre eux) on trouvera d'abord les équations

$$1 + \mathrm{A} + \mathrm{B} \ldots + \mathrm{R} = 0;$$

$$n\mathrm{N}_1 = n + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A}) + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B}) \ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R});$$
$$n\mathrm{N}_2 = n^2 + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A})^2 + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B})^2 \ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R})^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\mathrm{N}_{a-1} = n^{a-1} + \mathrm{A}(1 + a\mathrm{A})^{a-1} + \mathrm{B}(1 + a\mathrm{B})^{a-1} \ldots + \mathrm{R}(1 + a\mathrm{R})^{a-1};$$

d'où l'on déduira, comme auparavant, l'autre équation

$$Z = z^a + q_1 z^{a-1} + q_2 z^{a-2} \ldots + q_a = 0;$$

qui fournira les valeurs de

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots \mathrm{R};$$

puis l'on cherchera les valeurs de

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ \ldots\ldots N_q,\ \ldots\ldots N_{ab-1},$$

en exprimant en général par N_q le nombre des solutions entières, positives et moindres que n, de la congruence à q inconnues de la forme

$$x^{ab}+z^{ab}+v^{ab}\ldots\ldots+1\equiv 0 \pmod{n};$$

et l'on aura les équations

$$nN_1=n+\sum_{y=1}^{y=n}\sum_{x=0}^{x=n}\left(\cos 2y(x^{ab}+1)\frac{\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin 2y(x^{ab}+1)\frac{\pi}{n}\right);$$

$$nN_2=n^2+\sum_{y=1}^{y=n}\sum_{x=0}^{x=n}\sum_{z=0}^{z=n}\left(\cos 2y(x^{ab}+z^{ab}+1)\frac{\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin 2y(x^{ab}+z^{ab}+1)\frac{\pi}{n}\right);$$

. . . .

$$nN_{ab-1}=n^{ab-1}+\sum_{y=1}^{y=n}\sum_{x=0}^{x=n}\sum_{z=0}^{z=n}\sum_{v=0}^{v=n}\ldots\left(\cos 2y(x^{ab}+z^{ab}+v^{ab}\ldots+1)\frac{\pi}{n}+\sqrt{(-1)}\sin 2y(x^{ab}+z^{ab}+v^{ab}\ldots+1\right.$$

En décomposant en plusieurs séries les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots n-1,$$

et en classant les résidus et les non-résidus de l'ordre ab, par rapport au nombre n, comme nous l'avons déjà fait relativement aux résidus et aux non-résidus de l'ordre a, on pourra donner aux équations précédentes la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{l}1+A_1+A_2\ldots\ldots+A_b\\ \quad+B_1+B_2\ldots\ldots+B_b\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad R_1+R_2\ldots\ldots+R_b\end{array}\right\}=0;$$

$$nN_1=\left\{\begin{array}{l}n+A_1(1+abA_1)+A_2(1+abA_2)\ldots\ldots+A_b(1+abA_b)\\ \quad+B_1(1+abB_1)+B_2(1+abB_2)\ldots\ldots+B_b(1+abB_b)\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad+R_1(1+abR_1)+R_2(1+abR_2)\ldots\ldots+R_b(1+abR_b)\end{array}\right\};$$

$$nN_2=\left\{\begin{array}{l}n^2+A_1(1+abA_1)^2+A_2(1+abA_2)^2\ldots\ldots+A_b(1+abA_b)^2\\ \quad+B_1(1+abB_1)^2+B_2(1+abB_2)^2\ldots\ldots+B_b(1+abB_b)^2\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad+R_1(1+abR_1)^2+R_2(1+abR_2)^2\ldots\ldots+R_b(1+abR_b)^2\end{array}\right\};$$

. . . .

$$nN_{ab-1}=\left\{\begin{array}{l}n^{ab-1}+A_1(1+abA_1)^{ab-1}+A_2(1+abA_2)^{ab-1}\ldots\ldots+A_b(1+abA_b)^{ab-1}\\ \quad+B_1(1+abB_1)^{ab-1}+B_2(1+abB_2)^{ab-1}\ldots\ldots+B_b(1+abB_b)^{ab-1}\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad+R_1(1+abR_1)^{ab-1}+R_2(1+abR_2)^{ab-1}\ldots\ldots+R_b(1+abR_b)^{ab-1}\end{array}\right\}.$$

Il est clair qu'à l'aide de ces équations l'on pourrait former l'équation

$$Z_1 = z^{ab} + s_1 z^{ab-1} + s_2 z^{ab-2} \ldots + s_{ab} = 0,$$

de la même manière que nous avons déjà formé l'équation $Z = 0$. Cette équation $Z_1 = 0$, aura pour racines toutes les quantités

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_b;$$
$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_b;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$R_1, R_2, R_3, \ldots R_b;$$

et il faut observer que l'on aura

$$A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_b = \mathrm{A};$$
$$B_1 + B_2 + B_3 \ldots + B_b = \mathrm{B};$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$R_1 + R_2 + R_3 \ldots + R_b = \mathrm{R};$$

les quantités A, B, ... R, étant les racines de l'équation $\mathrm{Z} = 0$.

Maintenant si l'on cherche une transformée de l'équation $\mathrm{Z}_1 = 0$, telle qu'elle ait pour racines la somme de $b-1$ racines de l'équation $\mathrm{Z}_1 = 0$, prises négativement et augmentées de la quantité A; et si l'on appelle $\mathrm{Z}_2 = 0$, cette transformée, il est clair qu'en cherchant le plus grand commun diviseur entre $\mathrm{Z}_1 = 0$, et $\mathrm{Z}_2 = 0$, on aura une équation de la forme

$$\mathrm{Z}_3 = z^b + t_1 z^{b-1} + t_2 z^{b-2} \ldots + t_b = 0;$$

qui aura pour racines les quantités

$$A_1, A_2, \ldots A_b.$$

Si l'on fait à présent $u = \frac{n-1}{ab}$, et que l'on exprime par

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_u,$$

les u restes différens que l'on obtient en divisant par n successivement toutes les puissances

$$1^{ab}, 2^{ab}, 3^{ab}, \ldots (n-1)^{ab};$$

il est clair qu'en fesant toujours

$$r = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{n};$$

on obtiendra

$$r^{a_1} + r^{a_2} \ldots r^{a_u} = A_1.$$

D'où il résulte que l'équation

$$x^{a_1} + x^{a_2} \ldots + x^{a_u} - A_1 = 0,$$

aura u racines communes avec l'équation $X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$. Mais comme

on peut former d'autres équations semblables en prenant une autre série au lieu de la série $a_1, a_2, \ldots . a_n$, en écrivant l'une des quantités A_2, $A_3, \ldots . A_b$, au lieu de A_1 et en cherchant une transformée de l'équation $X=0$, comme nous l'avons fait précédemment, on aura enfin b équations semblables, qui serviront à décomposer en facteurs l'équation $X=0$. Nous n'avons considéré que les deux facteurs a, b, du nombre $n-1$; mais on voit que pour les autres facteurs, il n'y aurait qu'à répéter les mêmes opérations; de manière qu'étant donnée l'équation

$$x^n - 1 = 0,$$

dans laquelle $n = a^m b^r c^s \ldots .$, on la résoudra complètement à l'aide de m équations du degré a, de r équations du degré b, et ainsi de suite.

L'analyse précédente suffit pour montrer l'esprit de notre méthode; on voit quelle est très-générale, et que pour être appliquée aux cas particuliers, elle n'exige pas la connaissance des racines primitives. D'ailleurs il est clair que pour résoudre l'équation $x^n-1=0$, il n'est pas nécessaire de décomposer la série des nombres 1, 2, 3, ... $n-1$, en plusieurs séries comme nous l'avons fait, afin que l'on pût bien saisir le principe de notre théorie. En effet pour décomposer l'équation $x^n-1=0$, dans ses facteurs, il suffit de déterminer en nombres les valeurs de

$$\begin{gathered} \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots . \mathrm{N}_{a-1}; \\ N_1, N_2 \ldots . N_{ab-1}; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{etc.}; \end{gathered}$$

ce que l'on pourra toujours faire *à posteriori* pour toute valeur numérique de n.

Lorsqu'il s'agit de résoudre les congruences des degrés supérieurs au second, on rencontre beaucoup de difficulté; et l'on ne connait aucun théorème sur les résidus cubiques, ou bicarrés. Nous allons montrer maintenant les premiers élémens de cette théorie, que nous traiterons avec plus de détail dans une autre occasion.

On sait que la congruence

$$x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

dans laquelle n est un nombre premier de la forme $6p+1$, a toujours trois solutions entières, positives et moindres que n, et partant on a par la formule (24.)

$$3n = \sum_{x=0}^{x=n} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\cos 2(x^3+1)\frac{\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin 2(x^3+1)\frac{\pi}{n}\right) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +\left(\cos 2(n-1)(x^3+1)\frac{\pi}{n} + \sqrt{(-1}\sin 2(n-1)(x^3+1)\frac{\pi}{n}\right) \end{array} \right\}$$

Maintenant si l'on décompose la série des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n-1,$$

dans les trois séries

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_{2p},$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_{2p},$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ldots\ c_{2p},$$

dont la première est la série des résidus cubiques de n, tandis que la seconde se forme en prenant un nombre quelconque de la série

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n-1,$$

qui ne soit pas compris dans la série des résidus cubiques de n, et après avoir multiplié ce nombre successivement par tous les résidus cubiques de n, en divisant chaque produit par n, car les restes de ces divisions fourniront la série

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_{2p};$$

et la troisième série sera composée des $2p$ nombres qui sont compris dans la série des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n-1,$$

sans être compris ni dans la première, ni dans la seconde série. A présent l'équation que nous avons trouvée précédemment, pourra se mettre sous la forme

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2a_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)\right)\left(1+3\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2a_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right)\right) \\ +\left(\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2b_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)\right)\left(1+3\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2b_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right)\right) \\ +\left(\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2c_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2c_u\pi}{n}\right)\right)\left(1+3\sum_{u=1}^{b=2p+1}\left(\cos\frac{2c_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2c_u\pi}{n}\right)\right) \end{array} \right.$$

et en posant, pour abréger, les trois équations

$$\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2a_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2a_u\pi}{n}\right) = A,$$
$$\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2b_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2b_u\pi}{n}\right) = B,$$
$$\sum_{u=1}^{u=2p+1}\left(\cos\frac{2c_u\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2c_u\pi}{n}\right) = C,$$

on obtiendra

$$2n = A(1+3A)+B(1+3B)+C(1+3C).$$

Mais si l'on exprime par N_2 le nombre des solutions entières, positives et moindres que n, de la congruence

$$x^3+y^3+1 \equiv 0 \pmod{n},$$

on trouvera

$$nN_2 = n^2+A(1+3A)^2+B(1+3B)^2+C(1+3C)^2;$$

et si l'on combine ces deux dernières équations, avec l'équation connue

$$1+A+B+C = 0,$$

on aura l'équation

$$Z = z^3+z^2-\left(\frac{n-1}{3}\right)z-\frac{1}{27}\left(nN_2+3-(n+2)^2+9n\right) = 0,$$

qui aura pour racines les trois quantités A, B, C.

On sait que lorsque n est un nombre premier de la forme $6p+1$, l'équation

$$4n = a^2+27b^2,$$

pourra toujours être résolue en nombres entiers, mais n'admettra qu'une seule solution; de manière que le nombre n étant donné, a et b seront déterminés, et l'équation $Z=0$, pourra recevoir l'autre forme

$$Z = z^3+z^2-\left(\frac{n-1}{3}\right)z+\frac{1}{27}\left((n-1)^2-n(n+1\pm a)\right) = 0;$$

et partant en égalant les coefficiens de ces deux équations $Z=0$, on aura l'équation

$$N_2 = n\pm a-2,$$

qui exprime un rapport fort singulier entre N_2 et a.

Puisque

$$N_2 = n\pm a-2,$$

et que la valeur de a est comprise entre zéro et $\sqrt{(4n-27)}$, le nombre N_2 ne pourra jamais avoir une valeur moindre que

$$n-\sqrt{(4n-27)}-2;$$

et par conséquent le nombre N_2 pourra augmenter indéfiniment avec la valeur de n. Il résulte de là que passé une certaine limite, la congruence

$$x^3+y^3+1 \equiv 0 \pmod{n},$$

sera toujours résoluble sans faire ni x ni y, divisible par n.

Une autre conséquence assez importante que l'on déduit de l'analyse précédente, c'est que lorsqu'on aura déterminé le nombre N_2 des solutions entières, positives et moindres que n, de la congruence

$$x^3+y^3+1\equiv 0 \pmod{n},$$

on trouvera le nombre N_3 des solutions entières positives et moindres que n, de la congruence

$$x^3+y^3+u^3+1\equiv 0 \pmod{n},$$

par les formules

$$nN_3=n^3+A(1+3A)^3+B(1+3B)^3+C(1+3C)^3;$$
$$A+B+C=S_1;\quad A^2+B^2+C^2=S_2;$$
$$A^3+B^3+C^3=S_3;\quad A^4+B^4+C^4=S_4;$$
$$S_4+S_3-\left(\frac{n-1}{3}\right)S_2+\frac{1}{27}\left((n+2)^2-9n-nN_2-3\right)S_1=0;$$

les quantités S_1, S_2, S_3, ayant été déjà déterminées l'orsqu'on a formé l'équation $Z=0$. En général étant donné le nombre N_2, on pourra déterminer le nombre des solutions d'une congruence du troisième degré, contenant un nombre quelconque d'inconnues et ayant des coefficiens quelconques, pourvu qu'elle conserve le même module n.

En fesant $n=7$, on trouve $a=1$, $N_2=7-2+1=6$; et la congruence

$$x^3+y^3+1\equiv 0 \pmod{7},$$

aura toujours six solutions; ce qu'il est aisé de vérifier.

Maintenant soit n un nombre premier de la forme $6p+1$, et tel que l'on ait l'équation

$$4n=a^2+27x^2,$$

dans laquelle a est un nombre entier connu, et x un nombre entier indéterminé, mais tel qu'il satisfasse à la condition que n soit un nombre premier de la forme $6p+1$; il est clair que le nombre des solutions de la congruence

$$x^3\mp y^3+1\equiv 0 \pmod{n},$$

sera toujours $n\pm a-2$, indépendemment de la valeur de x. Ainsi lorsqu'il s'agit des congruences du troisième degré, il ne suffit plus, pour trouver le nombre de leurs solutions, de connaître la forme linéaire des nombres premiers qui servent de module, mais il faut connaître aussi l'un des nombres de la forme quadratique à laquelle ces modules peuvent se réduire; et l'on doit observer qu'à l'aide de la relation $N_2=n\mp a-2$, on pourra toujours assigner la valeur de a de manière que N_2 ait une valeur d'une forme donnée; quoiqu'il y ait certaines valeurs que N_2 ne pourra jamais prendre: ainsi on ne pourra jamais avoir les équations

$$N_2=n;\quad N_2=n-3;\ \text{etc.}$$

Si l'on exprime toujours par A, B, C, les trois racines de l'équation $Z=0$, que nous avons trouvée précédemment, on pourra déterminer trois fonctions entières de x, que l'on exprimera par p, q, r, telles que l'on ait toujours

$$27X = 27\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) = (p+Aq+Br)(p+Bq+Cr)(p+Cq+Ar) = 0.$$

Maintenant si l'on effectue les multiplications, et que l'on opère les réductions nécessaires, on trouvera

$$27n = \left\{\begin{array}{l} p^3-p^2(q+r)-\frac{p}{3}\left((n-1)q^2-(n+2)qr+(n-1)r^2\right) \\ -\frac{q^3}{27}\left((n-1)^2-n(n+1\pm a)\right) \\ +\frac{q^2r}{2}\left(\frac{(n+2)(n-1)}{9}\pm nb+\frac{(4-n)(n+1\pm a)}{3.9}\right) \\ +\frac{qr^2}{2}\left(\frac{(n+2)(n-1)}{9}\mp nb+\frac{(4-n)(n+1\pm a)}{3.9}\right) \\ -\frac{r^3}{27}\left((n-1)^2-n(n+1\pm a)\right) \end{array}\right.$$

en supposant toujours $4n = a^2+27b^2$. Et cette équation offrira le premier exemple d'une forme cubique à trois inconnues à laquelle on pourra réduire un nombre premier quelconque n, de la forme $6p+1$. On voit que l'on pourrait faire

$$\pm a = N_2+2-n; \quad \pm b = \sqrt{\left(\frac{4n-(N_2+2-n)^2}{27}\right)};$$

dans la formule précédente, et elle prendrait alors une autre forme.

L'analyse que nous venons d'exposer fournit le théorème suivant. Lorsque $nt+1$ est un nombre premier quelconque, et que n est un nombre premier de la forme $6p+1$, la congruence du troisième degré à deux inconnues

$$\left.\begin{array}{r} z^3-z^2(u+1)-\frac{z}{3}\left((n-1)u^2-(n+2)u+n-1\right)-\frac{u^3}{27}\left((n-1)^2-n(n+1\pm a)\right) \\ +\frac{u^2}{2}\left(\frac{(n+2)(n+1)}{9}\pm nb+\frac{(4-n)(n+1\pm a)}{3.9}\right) \\ +\frac{u}{2}\left(\frac{(n+2)(n+1)}{9}\mp nb+\frac{(4-n)(n+1\pm a)}{3.9}\right) \\ -\frac{1}{27}\left((n-1)^2-n(n+1\pm a)\right) \end{array}\right\} \equiv 0 \ (\text{mod. } nt+1)$$

sera toujours résoluble.

On pourrait déduire de ce théorème, de la relation $N_2 = n \pm a - 2$, et de quelques autres propositions que nous omettons ici, un grand nombre de propriétés nouvelles des résidus cubiques des nombres premiers qui ont la forme $6p+1$: mais nous ne pouvons pas les exposer dans ce mémoire.

Cependant nous ferons observer que puisque l'on a toujours $a^2 < 4n$, l'équation, que nous avons déjà trouvée,

$$Z = z^3 + z^2 - \left(\frac{n-1}{3}\right)z - \frac{1}{27}\left((3 \pm a)n - 1\right) = 0,$$

tombera dans le cas irréductible, et que par conséquent ses trois racines, que nous avons nommées A, B, C, seront toujours réelles; d'où il résulte que lorsque c est un nombre entier quelconque, est que n est un nombre premier de la forme $6p+1$, on aura toujours l'équation

$$\sum_{x=0}^{x=n} \sin \frac{2cx^3\pi}{n} = 0.$$

On trouvera de même en général

$$\sum_{x=0}^{x=n} \sin \frac{2cx^m\pi}{n} = 0,$$

toutes les fois que m sera un nombre impair, et que n sera un nombre premier; c étant d'ailleurs un nombre entier quelconque.

Supposons maintenant que n soit un nombre premier de la forme $8m+1$; on sait que l'on pourra toujours résoudre l'équation

$$n = a^2 + 16b^2,$$

et qu'elle n'aura qu'une seule solution. Si l'on cherche le nombre des solutions entières, positives et moindres que n, des congruences

$$x^4+1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\, n), \quad x^4+y^4+1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\, n), \quad x^4+y^4+u^4+1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\, n),$$

on sait que la première de ces trois congruences aura quatre solutions, que la seconde en aura un nombre N_2, et que la troisième en aura un nombre N_3; N_2 et N_3, étant deux nombres entiers inconnus. A présent si l'on décompose la série des nombres

$$1, 2, 3, \ldots . n-1,$$

en quatre séries, de la même manière que nous avons décomposé la suite

$$1, 2, 3, \ldots . n-1,$$

en trois séries, quand il s'agissait des congruences du troisième degré, on aura, après les réductions convenables, les équations

$$1 + A + B + C + D = 0;$$

$$4n = n + A(1+4A) + B(1+4B) + C(1+4C) + D(1+4D),$$
$$nN_2 = n^2 + A(1+4A)^2 + B(1+4B)^2 + C(1+4C)^2 + D(1+4D)^2,$$
$$nN_3 = n^3 + A(1+4A)^3 + B(1+4B)^3 + C(1+4C)^3 + D(1+4D)^3,$$

qui serviront à former l'autre équation

$$Z = z^4 + z^3 - 3mz^2 + \varphi(N_2)z + F(N_2, N_3) = 0,$$

qui aura pour racines les quatre quantités

$$A, B, C, D,$$

et dans laquelle le coefficient $\varphi(N_2)$ exprime une fonction de N_2, et le coefficient $F(N_2, N_3)$ représente une fonction de N_2 et N_3; fonctions qu'il sera très facile de déterminer en effectuant le calcul. Mais comme l'on a aussi par l'équation

$$n = a^2 + 16b^2,$$

l'autre équation

$$Z = z^4 + z^3 - 3mz^2 + \left(4m^2 - \frac{n(4m+1\pm a)}{8}\right)z + \tfrac{1}{4}m^2 - n\left(\frac{m}{2} - \frac{4m+1\pm a}{8}\right) = 0;$$

on trouvera d'abord, en égalant ces deux équations $Z = 0$, une équation entre N_2 et a, et puis une autre équation entre N_3 et a, ce qui donnera une équation entre N_2 et N_3; d'où il résulte que lorsqu'on connait le nombre des solutions de la congruence à deux inconnues

$$x^4 + y^4 + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

on aura tout de suite le nombre des solutions de la congruence à trois inconnues

$$x^4 + y^4 + u^4 + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

et par suite le nombre des solutions d'une congruence du quatrième degré, contenant un nombre quelconque d'inconnues, pourvu que le module n soit toujours un nombre premier de la forme $8m+1$. On aurait pu établir *a priori* le rapport qui existe entre N_2 et N_3, en observant que dans les quatre équations qui nous ont servi à déterminer les coefficiens de l'équation

$$Z = z^4 + z^3 - 3mz^2 + \varphi(N_2)z + F(N_2, N_3) = 0,$$

on peut négliger la dernière équation qui contient N_3, puisque la première équation

$$1 + A + B + C + D = 0,$$

peut se décomposer dans les deux autres

$$A + B = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{n}; \quad C + D = -\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Une simplification semblable pourra s'effectuer chaque fois que le degré de la congruence que l'on considère ne sera pas un nombre premier; et l'on voit que dans le cas actuel l'équation $Z = 0$, pourra se dé-

composer en deux équations du second degré, dont les coefficiens ne contiendront d'autre radical que $\sqrt{n}$.

En effectuant les calculs que nous n'avons fait qu'indiquer, on trouverait (par la comparaison des deux équations du quatrième degré $Z=0$, que nous avons trouvées précédemment) la relation

$$N_4 = n \pm 6a - 3;$$

en indiquant toujours par N_4 le nombre des solutions entières, positives et moindres que n, de la congruence

$$x^4 + y^4 + 1 \equiv 0 \pmod{n};$$

et par a le nombre entier qui est donné par l'équation $n = a^2 + 16b^2$. Il résulte de ce qui précède qu'au delà d'une certaine limite, N_4 ira toujours en croissant. Et en général on pourrait démontrer qu'étant donnée la congruence à deux inconnues

$$x^n + y^n + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

dans laquelle p est un nombre premier quelconque, on pourra toujours assigner une limite de p telle, que passé cette limite le nombre des solutions de cette congruence ira toujours en augmentant. Ce théorème n'est pas sans importance pour parvenir à la démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation

$$u^n + v^n = z^n,$$

en nombres entiers. Car il prouve que l'on tenterait envain de démontrer cette impossibilité, en voulant établir que si cette équation était résoluble, l'une des inconnues serait divisible par un nombre infini de nombres premiers. Nous faisons cette observation, parceque nous avons motif de croire que plusieurs analystes on tenté ce genre de démonstration, et puis parceque nous avons vu qu'un géomètre distingué, n'a pu démontrer dans aucun cas le théorème que nous avons découvert, et dont nous avons démontré par une méthode particulière les deux premiers cas.

Ce que nous venons de dire sur les congruences du troisième et du quatrième degré, ne renferme que les premiers élémens d'une théorie très-étendue sur les congruences de tous les degrés, théorie que nous exposerons dans une autre occasion; et nous donnerons ici l'énoncé d'un théorème général sur les congruences de tous les degrés; ce théorème est le suivant.

On peut toujours résoudre la congruence

$$x^n + a_1 y^n + a_2 z^n \ldots\ldots + a_N \equiv 0 \pmod{p},$$

qui renferme n inconnues et qui est du degré n; le module p étant d'ailleurs un nombre premier quelconque, et les coefficiens

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n,$$

étant des nombres entiers quelconques non divisibles par p.

On voit que ce théorème renferme comme cas particuliers les deux congruences

$$ax + b \equiv 0 \pmod{p},$$
$$x^2 + ay^2 + b \equiv 0 \pmod{p},$$

qui peuvent toujours se résoudre, lorsque le nombre premier p ne divise ni a ni b.

On passerait des congruences aux équations indéterminées, en observant qu'étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à plusieurs inconnues

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) = 0,$$

elle pourra se réduire à la congruence

$$\varphi(x, y, z, \ldots \text{etc.}) \equiv 0 \pmod{u},$$

dans laquelle le module u est un nombre entier indéterminé, ou même une fonction quelconque des inconnues $x, y, \ldots z$, etc. On peut résoudre par cette méthode plusieurs équations indéterminées, et même on peut trouver avec facilité les facteurs rationnels d'une équation numérique à une seule inconnue, pourvu que l'on détermine convenablement la forme de la fonction représentée par u. Mais cette méthode exige de longs développemens qui ne sauraient trouver place dans ce mémoire.

Tous les résultats obtenus dans ce mémoire, se trouvent exposés dans deux mémoires présentés en 1823, et en 1825 à l'Académie Royale des sciences de Paris.

21.

Mémoire sur la résolution de quelques équations indéterminées.

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Introduction.

Il existe un grand nombre d'équations indéterminées qui n'admettent qu'un petit nombre de solutions entières: mais quoique dans ce cas le problème devienne beaucoup moins compliqué, que lorsque le nombre des solutions est infini, les géomètres n'ont pas cherché à résoudre par une méthode spéciale le cas le plus simple, comme il paraissait naturel de le tenter. En généralisant une méthode que nous avons publiée pour la première fois en 1820, nous sommes parvenus à résoudre complètement un grand nombre d'équations indéterminées, algébriques ou transcendantes, de tous les degrés, contenant deux ou un plus grand nombre d'inconnues.

Lorsqu'on doit résoudre en nombres entiers une équation à plusieurs inconnues, si l'on peut trouver des fonctions de ces inconnues, telles que ces fonctions doivent toujours être comprises entre deux limites numériques données, quelle que soit la valeur que l'on attribue aux variables, il sera toujours possible de réduire l'équation proposée à une autre équation, dans laquelle le nombre des inconnues sera égal au nombre des inconnues de l'équation proposée, moins le nombre des fonctions dont on aura déterminé les limites. Ainsi lorsque le nombre de ces fonctions, augmenté de l'unité, sera égal au nombre des inconnues de l'équation proposée, on aura résolu complètement le problème.

Dans le mémoire publié en 1820, nous avons traité aussi des formes cubiques et de celles du quatrième degré, qui se reproduisent lorsqu'elles sont multipliées par des formes semblables. Maintenant nous reprenons la même matière en l'augmentant considérablement, et nous parvenons à démontrer qu'un nombre quelconque rationnel positif, est toujours la somme de quatre cubes positifs en nombres rationnels. Enfin nous résolvons dans ce mémoire, une classe assez étendue d'équations indéterminées de tous les degrés, dont Lagrange avait considéré les plus simples.

Analyse.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$\left\{\begin{matrix} Ab^n v^n \pm Aq^n y^n + \mathrm{F}_{n-1}(v,y) + \mathrm{F}_{n-2}(v,y) \dots + \mathrm{F}_{n-m}(v,y) \dots \\ \dots + \mathrm{F}_2(v,y) + \mathrm{F}_1(v,y) + T \end{matrix}\right\} = 0,$$

dans laquelle $\mathrm{F}_{n-m}(v,y)$ représente en général un polynome homogène en v et y, du degré $n-m$, à coefficiens rationnels. On pourra d'abord supposer que tous les coefficiens sont entiers, et que l'on cherche seulement les solutions entières et positives; car tous les autres cas se rapportent à celui-ci, en réduisant les fractions au même dénominateur, et en changeant les signes des variables lorsque cela est nécessaire. Puis on mettra l'équation proposée sous la forme

$$\left\{\begin{matrix} Ab^n v^n + Bv^{n-1} + v^{n-2}(a+by) + v^{n-3}(a_1+b_1 y + c_1 y^2) \\ \dots + v\,(a_m + b_m y + c_m y \dots + p_m y^{n-2}) \\ \pm Aq^n y + Gy^{n-1} + Hy^{n-2} \dots + Sy + T = 0 \end{matrix}\right\} = 0;$$

et en multipliant tous les termes de cette équation par $q^n b^n$, et en fesant $qy = z$, $bv = x$, on la transformera dans la suivante

$$\left\{\begin{matrix} Ab^n q^n x^n + Bq^n b x^{n-1} + b^2 x^{n-2}(aq^n + bq^{n-1}z) + b^3 x^{n-3}(a_1 q^n + b_1 q^{n-1} z + c_1 q^{n-2} z^2) \\ \dots + b^{n-1} x (a_m q^n + b_m q^{n-1} z \dots + p_m q^2 z^{n-2}) \pm Ab^n q^n z^n + Gqb^n z^{n-1} \dots + Tq^n b^n \end{matrix}\right\} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens de x^n et de y^n, seront égaux: si à présent l'on suppose $x > z$, et que l'on fasse $x = z + u$, on aura, en développant,

$$\text{44.}\quad \left\{\begin{matrix} Ab^n q^n((z+u)^n \pm z^n) + Bq^n b(z+u)^{n-1} + b^2(aq^n + bq^{n-1}z)(z+u)^{n-2} \\ \dots + Gqb^n z^{n-1} \dots + Tq^n b^n \end{matrix}\right\} = 0.$$

Maintenant le premier terme de cette équation, est un polynome homogène du degré n, en z et u, ayant tous ses coefficiens positifs; et tous les autres termes sont tels, que les mêmes puissances de z, qui dans le premier terme sont multipliées par des puissances données de u, seront multipliées dans les autres termes par des puissances moindres de u. De sorte que l'on pourra toujours trouver une valeur entière et positive de $u = L$, telle qu'en fesant $u = L + \delta$, (δ étant un nombre quelconque positif) tous les coefficiens de z, dans l'équation (44.), restent toujours positifs; et comme par supposition z ne peut avoir que des valeurs positives, l'équation (44.) dans laquelle on a fait $u > L$, ne saurait subsister. Par conséquent on devra faire

$$u = 0,\quad u = 1,\quad u = 2,\quad \dots\quad u = L;$$

et en substituant successivement ces valeurs dans l'équation (44.) on aura une série de $L+1$ équations à une seule inconnue, dont les facteurs rationnels, s'il en existe, fourniront toutes les valeurs positives de z qui résolvent l'équation (44.).

Nous avons supposé $x > z$, si l'on avait au contraire $z > x$, on ferait $z = x + u_1$, et l'on obtiendrait la limite de u_1 de la même manière que l'on a trouvé la limite de u.

De cette manière nous avons trouvé toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée; pour trouver les solutions entières et négatives, l'on n'aurait qu'à changer les signes des variables, comme nous l'avons déjà indiqué.

Soit proposée l'équation à deux inconnues

$$f(x, y) \cdot F(x, y) = F_1(x, y),$$

on pourra toujours en avoir toutes les solutions entières et positives, lorsque les trois fonctions

$$f(x, y), \quad F(x, y), \quad F_1(x, y),$$

étant rationnelles et entières, les signes des termes qui contiennent les plus grandes puissances de x et de y dans le polynome $f(x, y)$ seront tous égaux, et que les exposans de ces puissances ne seront pas moindres que ceux des puissances les plus élevées contenues dans le polynome $F_1(x, y)$; et on aura de même toutes les solutions entières et négatives, lorsqu'en changeant les signes des inconnues, les puissances les plus élevées de x et de y, comprises dans le polynome $f(x, y)$, seront toutes du même signe; ou du moins pourront se réduire, à l'aide de quelque artifice de calcul, à n'avoir que le même signe. En effet, en fesant

$$x = x_1 + u, \quad y = y_1 + t,$$

la fonction $f(x, y)$, se réduira aisément à avoir tous ses termes du même signe, et l'on déterminera les limites de u et de t, qui deviendront de cette manière des coefficiens numériques: alors on pourra trouver un nombre entier et positif A, tel que l'on ait toujours, pour des valeurs entières et positives des inconnues, en prenant $f(x_1, y_1)$ avec tous les termes positifs, l'inégalité

$$(A + r) f(x_1, y_1) > F_1(x_1, y_1);$$

(r étant une quantité positive quelconque) et l'on pourra toujours déterminer un autre nombre entier B tel que l'on ait (pour des valeurs entières et positives des inconnues, et en prenant encore la fonction $f(x_1, y_1)$ po-

sitivement) l'inégalité

$$(B-r)f(x_1, y_1) < F_1(x_1, y_1);$$

d'où il résulte que $F_1(x_1, y_1)$, ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs comprises entre B et A; de manière qu'en fesant successivement

$$F_1(x_1, y_1) = B, \quad F_1(x_1, y_1) = B+1, \ldots . \quad F_1(x_1, y_1) = A,$$

on aura un nombre $A-B+1$ d'équations qui, étant combinées avec l'équation proposée, fourniront par l'élimination un nombre égal d'équations à une seule inconnue, d'où l'on tirera toutes les solutions de l'équation proposée.

Il est facile d'appliquer ce principe aux équations contenant plus de deux inconnues, de la forme

$$f(x, y, z, \ldots \text{etc.})\, f_1(x, y, z, \ldots \text{etc.}) \ldots . f_n(x, y, z, \ldots \text{etc.}) = F(x, y, z, \ldots \text{etc.}),$$

pourvu que le nombre des facteurs qui composent le premier membre soit égal au moins au nombre des inconnues; et l'on voit que la forme des fonctions

$$f, f_1, \ldots . f_n, F,$$

peut être algébrique ou transcendante.

Soit proposé, par exemple, de trouver toutes les solutions entières et positives de l'équation transcendante

$$x^y (x^2 - y^2) = 2y^3,$$

que l'on pourra réduire à la forme suivante

$$(x-y^2)\left(1 + y \log x + \frac{y^2}{1.2}(\log x)^2 + \frac{y^3}{1.2.3}(\log x)^3 \ldots . + \text{etc.}\right) = 2y^3;$$

il est évident que les deux inégalités

$$x > 2, \quad x^2 - y^2 > 11,$$

ne pourront pas subsister ensemble, parceque si elles pouvaient exister en même tems, le premier membre de cette équation serait toujours plus grand que le second, tant que les nombres x et y resteraient positifs. Alors il faudra que l'on ait l'une des équations

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2; \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 1,$$
$$x^2 - y^2 = 2, \quad x^2 - y^2 = 3, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad x^2 - y^2 = 5, \quad x^2 - y^2 = 6,$$
$$x^2 - y^2 = 7, \quad x^2 - y^2 = 8, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 10, \quad x^2 - y^2 = 11.$$

Mais les équations

$$x^2 - y^2 = 2, \quad x^2 - y^2 = 6, \quad x^2 - y^2 = 10,$$

ne peuvent avoir aucune solution entière; et parmi les 12 équations qui restent, il n'y a que les deux équations $x = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, qui étant

combinées avec l'équation proposée servent à la résoudre: on déduit de là que l'équation

$$x^y(x^4-y^2)=2y^3,$$

ne peut se résoudre en nombres entiers et positifs, qu'en fesant $x=0$, $y=0$. On pourrait, de la même manière trouver les solutions entières et négatives de l'équation proposée.

L'équation

$$Ab^n x^n - Aq^n y^n = \mathrm{F}_{n-1}(x,y) + \mathrm{F}_{n-2}(x,y) \ldots\ldots + T,$$

qui est semblable à celle que nous avons déjà considérée, peut se résoudre assez facilement par la méthode que nous venons d'exposer; car cette équation peut se réduire à la forme

$$f(x,y).F(x,y) = F_1(x,y),$$

en fesant

$$F(x,y) = A(bx-qy);\ f(x,y) = b^{n-1}x^{n-1} + b^{n-2}x^{n-2}qy \ldots\ldots + q^{n-1}y^{n-1};$$
$$F_1(x,y) = \mathrm{F}_{n-1}(x,y) + \mathrm{F}_{n-2}(x,y) \ldots\ldots + T;$$

et on pourra de cette manière trouver toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée. Si l'on voulait résoudre l'équation

$$Ab^n x^n + Aq^n y^n = \mathrm{F}_{n-1}(x,y) + \mathrm{F}_{n-2}(x,y) \ldots\ldots + T,$$

il faudrait multiplier tous ses termes par $b^n x^n - q^n y^n$, afin de rendre le premier membre décomposable dans les deux facteurs

$$A(bx-qy),\ b^{2n-1}x^{2n-1} + b^{2n-2}x^{2n-2}qy \ldots\ldots + q^{2n-1}y^{2n-1},$$

le second desquels a tous ses termes positifs. De de cette manière l'on trouve toutes les solutions entières et positives; les solutions entières et négatives, s'obtiennent en changeant les signes des variables.

En général, étant proposé de résoudre en nombres entiers une équation à n inconnues, si l'on peut former, avec ces mêmes inconnues, m fonctions entières, chacune desquelles, pour des valeurs quelconques des inconnues, doive être moindre que $L+1$, et plus grande que L_1, (L et L_1 étant deux nombres entiers) en égalant successivement chacune de ces fonctions aux nombres

$$L_1+1,\quad L_1+2, \ldots\ldots L,$$

on aura $m(L-L_1)$ équations; et les solutions entières de l'équation proposée, devront se trouver parmi les racines entières de ces dernières équations; et si la nature des fonctions que l'on a trouvées est telle, qu'en combinant les divers systèmes d'équations qui en résultent avec l'équation proposée on puisse éliminer m inconnues, on obtiendra une équation plus

simple qui ne contiendra que $n-m$ inconnues; et lorsque $m=n-1$, l'équation proposée sera résolue complètement.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à coefficiens rationnels

$$45.\quad a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+e=z^2;$$

on pourra toujours supposer que les coefficiens de cette équation sont entiers, car s'ils ne l'étaient pas, ils deviendraient tels en les réduisant au même dénominateur, et en multipliant toute l'équation par le carré de ce dénominateur. De plus on supposera que les inconnues x et z, sont positives; car si elles sont négatives, on pourra changer leurs signes et les rendre positives; et l'on admettra que tous les coefficiens du premier membre sont positifs; car s'il y en avait de négatifs, on les rendrait tous positifs en posant $x=x_1+h$, et en déterminant h convenablement.

Maintenant si l'on multiplie par $4a^2$ tous les termes de l'équation (45.), et que l'on fasse $4a^2z^2=(2a^2x^2+bx+v)^2$, on aura en développant:

$$\left\{\begin{matrix} 4a^4x^4+4a^2bx^3+4a^2cx^2+4a^2dx+4a^2e \\ -4a^4x^4-4a^2bx^3-(4a^2v+b^2)x^2-2bvx-v^2\end{matrix}\right\}=0,$$

et partant

$$46.\quad (4a^2v+b^2-4a^2c)x^2+(2bv-4a^2d)x+v^2-4a^2e=0.$$

Dans cette dernière équation v peut être positif ou négatif; si on le suppose positif, il ne pourra jamais surpasser un nombre L qui, substitué pour v dans l'équation (46.), rendrait tous ses termes positifs; alors on devra faire successivement

$$v=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ L-1,$$

et on obtiendra par l'élimination toutes les solutions entières et positives qui correspondent à l'hypothèse de v positif. Soit v négatif et égal à $-t$, et soit $t<x$; en substituant cette valeur dans l'équation (46.), elle deviendra

$$47.\quad (b^2-4a^2c-4a^2t)x^2+(-2bt-4a^2d)x+(t^2-4a^2e)=0:$$

maintenant si l'on suppose que s soit la plus petite des valeurs entières de t qui satisfont à l'inégalité

$$4a^2(t+c)>b^2,$$

en substituant $s+\omega$, pour t dans l'équation (47.), (ω étant un nombre positif quelconque) on en déduira une autre équation de la forme

$$Ax^2+Bx+4a^2c=(s+\omega)^2,$$

qui a tous ses coefficiens positifs, mais qui est absurde parceque l'on a par supposition

$$x^2 > t^2 = (s+u)^2.$$

S'il existe donc une valeur de v, négative et moindre que x, qui satisfasse à l'équation proposée, elle devra se trouver parmi les nombres

$$-1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ -(s-1).$$

Si dans l'équation (46.), on a $v = -u$ et $u > x$, en divisant u par x, on trouvera le quotient n et le reste $r < x$, et en posant

$$4a^2z^2 = (2a^2x^2 + bx - nx - r)^2 = (2a^2x^2 + (b-n)x - r)^2,$$

on obtiendra

$$\left\{\begin{matrix} 4a^4x^4 + 4a^2bx^3 + 4a^2cx^2 + 4a^2dx + 4a^2e \\ -4a^4x^4 - 4a^2(b-n)x^3 + (4a^2r - (b-n)^2)x^2 + 2(b-n)rx - r^2 \end{matrix}\right\} =$$

$$4a^2nx^3 + (4a^2r + 4a^2c - (b-n)^2)x^2 + (2(b-n)r + 4a^2d)x + 4a^2e - r^2 = 0;$$

mais puisque $4a^2z^2 > 4a^4x^4$, on aura toujours $b > n$, et par conséquent on fera successivement

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ b-1;$$

et en substituant toutes ces valeurs dans l'équation précédente, on déterminera, comme auparavant, la limite de r.

De cette manière nous avons réduit l'équation proposée à dépendre d'un nombre donné d'équations à une seule inconnue, dont on sait trouver tous les facteurs rationnels.

Soit proposé, par exemple, de résoudre en nombres entiers et positifs l'équation à deux inconnues

$$x^4 + 4x^3 + 11 = z^2;$$

en fesant $z = x^2 + 2x + r$, on aura, après les réductions,

$$(4 + 2r)x^2 + 4rx + r^2 - 11 = 0;$$

si r est un nombre positif, on voit qu'on ne saurait avoir $r > 3$; si r est égal à un nombre négatif $-p$ et que l'on ait $p < x$, on obtiendra

$$(4 - 2p)x^2 - 4px + p^2 - 11 = 0;$$

et en fesant $p = 3$, ou $p > 3$, on trouvera une équation de la forme

$$ax^2 + bx + 11 = p^2,$$

qui est absurde parceque par supposition $x^2 > p^2$.

Lorsque r est un nombre négatif, et que l'on a $-r > x$, on fera $r = -(x+t)$; en supposant $-t < x$, et on obtiendra

$$x^4 + 4x^3 + 11 = (x^2 + x - t)^2$$

et par suite

$$2x^3 + (2t-1)x^2 + 2tx + 11 = t^2,$$

et puisque $x^2 > t^2$, on ne pourra pas avoir $t > 0$.

Il serait absurde de supposer $r = -(nx + t)$, et $n > 1$, parceque l'on aurait alors l'équation

$$z^2 = (x^2 - A)^2 < x^4,$$

qui ne saurait jamais s'accorder avec l'autre

$$z^2 = x^4 + 4x^3 + 11 > x^4.$$

Par conséquent l'on obtiendra le système suivant d'équations

$$z = x^2 + 2x + 1, \quad z = x^2 + 2x + 2, \quad z = x^2 + 2x,$$
$$z = x^2 + 2x + 3, \quad z = x^2 + 2x - 1, \quad z = x^2 + \;\; x,$$

qui étant combinées avec l'équation proposée doivent servir à déterminer les valeurs des inconnues. Maintenant si l'on effectue les éliminations, on ne trouve que les valeurs $x = 1$, $z = 4$, qui résolvent l'équation proposée, et qui donnent

$$1^4 + 4 \times 1^3 + 11 = 4^2.$$

L'équation que nous venons de traiter sert à résoudre l'autre

48. $$Ax^2 + (By^2 + Cy + D)x + Ey^3 + Fy^2 + Gy + H = 0,$$

lorsque B n'est point égal à zéro; en effet on trouve l'expression

$$x = \frac{-(By^2 + Cy + D) \pm \sqrt{[(By^2 + Cy + D) - 4A(Ey^3 + Fy^2 + Gy + H]}}{2A};$$

dans laquelle la quantité comprise sous le signe radical doit satisfaire à une équation de la forme

$$z^2 = a^2 y^4 + by^3 + cy^2 + dy + e;$$

et lorsqu'on aura obtenu toutes les solutions de cette équation, on aura résolu complètement l'équation proposée.

Si dans l'équation (48.), l'on fait

$$y = x + t, \quad H = a, \quad G = e, \quad F = f, \quad E = g,$$
$$D + g = b, \quad F = c, \quad B + E = d, \quad E + 2F = h,$$

on la transformera, après les substitutions, dans la suivante

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + et + ft^2 + gt^3 + hxt + (d + 2g)xt^2 + (2d + g)x^2 t,$$

qui est assez générale, et dont on pourra trouver toutes les solutions entières.

Si au lieu de l'équation (48.) on avait considéré la suivante

$$Ax^2 + (B + Cy \ldots + Dy^n + Ey^{n+1} \ldots + Fy^{n+p})x + Gy^{2n-1} + Hy^{2n-2} \ldots + I = 0,$$

on aurait pu la résoudre de la même manière, pourvu que tous les coefficiens $D, E, \ldots F$, ne s'évanouissent pas à la fois; et l'on en aurait déduit de nouvelles transformées plus générales que celle que nous venons de trouver; car la méthode dont nous avons fait usage pour résoudre l'équation (45.), peut s'appliquer également à l'autre plus générale

$$Aa^n x^{mn} + bx^{mn-1} + cx^{mn-2} \ldots + px + q = Ac^n z^n.$$

On a déjà vu que par $F_n(x, y)$, nous désignons une fonction homogène, rationnelle et entière, du degré n, entre x et y; en généralisant cette notation, nous représenterons dans la suite par $F_n(x, y, z, \ldots. \text{etc.})$, une fonction homogène, rationnelle et entière, du degré n, entre les inconnues

$$x, \; y, \; z, \; \ldots. \; \text{etc.}$$

Maintenant, étant donnée l'équation

$$F_2(x, y) + F_1(x, y) + f = 0,$$

si l'on peut trouver une solution rationnelle de celle-ci

$$F_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

la première sera résoluble aussi en nombres rationnels. En effet, si les valeurs $x = m$, $y = n$, satisfont à l'équation $F_2(x, y) = 0$, en fesant

$$x = mp + q, \quad y = np + r,$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation

$$F_2(x, y) + F_1(x, y) + f = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} (am^2 + bmr + cn^2)p^2 + (2amq + b(mr + nq) + 2cnr + dm + en)p \\ \qquad + aq^2 + bqr + cr^2 + dq + er + f \end{array} \right\} = 0;$$

et puisque par hypothèse on a $am^2 + bmn + cn^2 = 0$, on obtiendra l'équation

$$p = -\frac{aq^2 + bqr + cr^2 + dq + er + f}{2amq + bnq + bmr + 2cnr + dm + en},$$

dans laquelle les inconnues q, r, peuvent prendre des valeurs rationnelles quelconques, et en substituant cette valeur de p, dans les valeurs de x et de y, on obtiendra toutes les solutions rationnelles de l'équation proposée.

Il est clair que la même chose arriverait si l'on avait l'équation

49. $$F_2(x, y, z, \ldots. \text{etc.}) + F_1(x, y, z, \ldots. \text{etc.}) + f = 0;$$

qui renferme un nombre quelconque d'inconnues. Et il faut observer qu'étant donnée une solution $x = l$, $y = m$, $z = n$, ... etc., en nombres rationnels, de l'équation

$$F_2(x, y, z, \ldots. \text{etc.}) = 0,$$

on peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation (49.) en fesant

$$x = lp + q, \quad y = mp + r, \quad z = np + s, \quad \ldots. \; \text{etc.},$$

(les quantités $q, r, s, \ldots.$ etc., étant des nombres rationnels quelconques) et l'on voit que ces solutions seront toujours en nombre infini.

Par exemple, on sait qu'un nombre entier quelconque A est toujours la somme de quatre carrés en nombres entiers, on aura par conséquent

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

mais si l'on voulait connaître toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$A = x^2 + u^2 + y^2 + z^2,$$

on ferait

$$Ap^2 = (ap+q)^2 + (bp+r)^2 + (cp+s)^2 + (dp+t)^2,$$

et l'on aurait

$$p = -\frac{q^2+r^2+s^2+t^2}{2(aq+br+cs+dt)},$$

et la formule

$$A = \left(a+\frac{q}{p}\right)^2 + \left(b+\frac{r}{p}\right)^2 + \left(c+\frac{s}{p}\right)^2 + \left(d+\frac{t}{p}\right)^2,$$

(dans laquelle on peut donner à q, r, s, t, des valeurs rationnelles quelconques) exprimera toutes les manières de décomposer le nombre A en quatre carrés rationnels.

Il faut observer qu'étant donnée l'équation

50. $$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 + gx + hy + iz + k = 0,$$

si l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0,$$

est satisfaite en fesant $x = n$, $y = r$, $z = m$; on substituera dans l'équation proposée les valeurs

$$x = np + q, \quad y = rp + s, \quad z = mp + t,$$

et on aura

$$p = -\frac{aq^2 + bqs + cs^2 + dqt + est + ft^2 + gq + hs + it + k}{2(anq + crs + fmt) + b(sn + qr) + d(nt + qm) + e(rt + sm) + gn + hr + im},$$

où il faut observer que lorsqu'on pourra résoudre en nombres entiers l'équation

$$(2an + br + dm)q + (2cr + bn + em)s \pm (2fm + dn + er)t + gn + hr + im = 1,$$

qui contient les trois inconnues q, s, t, on pourra résoudre aussi l'équation (50.) en nombres entiers, d'une infinité de manières.

Si l'équation proposée se réduisait à la forme

$$ax^2 + cy^2 + fz^2 + k = 0,$$

pour tâcher de la résoudre en nombres entiers il faudrait faire

$$anq + crs + fmt = \pm 1.$$

Cependant il y a des cas dans lesquels l'équation proposée ne saurait être résolue en nombres entiers, quoiqu'elle puisse avoir une infinité de solutions fractionnaires.

Lagrange a démontré que lorsqu'on multiplie ensemble les deux formules

$$x^2 - ay^2 - bz^2 + abu^2 = F,$$
$$X^2 - aY^2 - bZ^2 + abU^2 = F_1,$$

on aura toujours l'équation

$$FF_1 = A^2 - aB^2 - bC^2 + abD^2,$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D, sont déterminées; maintenant si l'on fait

$$p = -\frac{x_1^2 - ay_1^2 - az_1^2 + abu_1^2}{2(Ax_1 - aBy_1 - bCz_1 + abDu_1)}$$

(les quantités x_1, y_1, z_1, u_1, étant des nombres rationnels quelconques) on aura

$$FF_1 = \left(A + \frac{x_1}{p}\right)^2 - a\left(B + \frac{y_1}{p}\right)^2 - b\left(C + \frac{z_1}{p}\right)^2 + ab\left(D + \frac{u_1}{p}\right)^2,$$

et cette formule comprendra toutes les manières dont on peut réduire le produit FF_1 à la forme

$$n^2 - aq^2 - br^2 + abs^2.$$

Notre analyse fournit beaucoup de nouvelles formules semblables, car en fesant

$$F = \mathrm{F}_2(x, y, z, u, \ldots \text{ etc.}) + A,$$
$$F_1 = \mathrm{F}_2(X, Y, Z, U, \ldots \text{ etc.}) + A,$$

on trouvera aisément que l'on a toujours

$$FF_1 = \mathrm{F}_2(p, q, r, s, \ldots \text{ etc.}) + A,$$

(les quantités p, q, r, s, ... etc., étant des fonctions rationnelles des quantités A, x, X, y, Y, z, Z, ... etc.) pourvu que l'on puisse résoudre l'équation

$$\mathrm{F}_2(x_1, y_1, z_1, u_1, \ldots \text{ etc.}) = 0,$$

en nombres rationnels. Ainsi, par exemple, si l'on fait

$$F = x^2 + 41y^2 - 113z^2 + at^4,$$
$$F_1 = X^2 + 41Y^2 - 113Z^2 + aT^4,$$

on aura

$$FF_1 = \left\{\begin{array}{l} as^2 + \left(\dfrac{19(FF_1 + 113r^2 - p^2 - 41q^2 - as^4)}{2(19p + 164q - 339r)} + p\right)^2 \\ \quad + 41\left(\dfrac{4(FF_1 + 113r^2 - p^2 - 41q^2 - as^4)}{2(19p + 164q - 339r)} + q\right)^2 \\ \quad + 113\left(\dfrac{3(FF_1 + 113r^2 - p^2 - 41q^2 - as^4)}{2(19p + 164q - 339r)} + r\right)^2 \end{array}\right.$$

les quantités p, q, r, s, étant des nombres rationnels quelconques.

Ce que nous venons de dire par rapport aux formules du second degré, peut s'appliquer aux équations indéterminées du troisième degré, et si l'équation à deux inconnues

$$\mathrm{F}_3(x, y) = 0,$$

est résoluble en nombres rationnels, l'autre

$$F_3(x,y)+F_2(x,y)+F_1(x,y)+k=0,$$

sera résoluble aussi: en effet étant proposée l'équation

51. $$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+k=0,$$

si l'on peut trouver deux nombres entiers m, n, tels que l'on ait

$$am^3+bm^2n+cmn^2+dn^3=0,$$

on pourra faire $x=mp+q$, $y=np+r$, et en substituant ces valeurs dans l'équation (51.), on aura une équation de la forme

52. $$Ap^3+Bp^2+Cp+D=0,$$

dans laquelle

$$A=am^3+bm^2n+cmn^2+dn^3=0;$$

et si l'on fait $B=0$, on pourra résoudre l'équation (52.) et l'on aura $p=-\frac{D}{C}$; et en éliminant q entre les équations

$$B=0,\quad p=-\frac{D}{C},$$

on obtiendra une équation de la forme

$$p=-F(r),$$

(dans laquelle $F(r)$ exprime une fonction rationnelle quelconque de r) qui fournira une infinité de solutions de l'équation proposée lorsqu'on donnera à r des valeurs rationnelles quelconques.

Il est clair que l'on parviendrait à un résultat semblable, si l'équation proposée contenait un plus grand nombre d'inconnues; car si l'équation

$$F_3(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})=0,$$

peut être résolue en nombres rationnels, l'autre équation

$$F_3(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})+F_2(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})+F_1(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})+f=0,$$

aura un nombre infini de solutions rationnelles. Maintenant si dans l'équation précédente on fait

$$f=-m,\quad F_3(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})=x^3+y^3-z^3-u^3,$$
$$F_2(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})=F_1(x,y,z,u,\ldots\text{ etc.})=0,$$

(m étant un nombre rationnel quelconque) puisque l'équation

$$x^3+y^3-z^3-u^3=0,$$

peut se résoudre en fesant $x=y=z=u$; on pourra résoudre aussi l'équation

$$x^3+y^3-z^3-u^3=m,$$

et l'on aura l'identité

52. $$m=\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3+\left(\frac{m-6q^3}{6q^2}\right)^3-\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3-\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3,$$

dans laquelle q est un nombre quelconque rationnel. De cette manière l'on a décomposé le nombre rationnel m en quatre cubes rationnels, dont deux seront positifs et deux négatifs. Mais on peut, lorsque m est un nombre positif, réduire le second nombre de cette équation à ne contenir que des cubes positifs, et c'est ce que nous allons prouver à présent.

Supposons q positif et tel que l'on ait $6q^3 < m$; il est clair qu'alors les deux premiers cubes du second nombre de l'équation (52.) seront positifs, tandis que les deux autres seront négatifs. De plus dans l'identité

$$53. \quad a^3 - b^3 = a^3\left(\frac{a^3-2b^3}{a^3+b^3}\right)^3 + b^3\left(\frac{2a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^3,$$

le second membre est la somme de deux cubes positifs lorsqu'on a $a^3 > 2b^3$, car à plus forte raison on aura $2a^3 > b^3$; si l'on fait donc

$$a = \frac{m+6q^3}{6q^2}, \quad b = \frac{m}{6q^2},$$

l'équation (53.) se transformera dans la suivante:

$$54. \quad \left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3 = \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3 \\ +\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3\left(\frac{2(m+6q^3)^3-m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3\end{array}\right\}$$

dans laquelle les deux cubes qui composent le second membre seront positifs lorsqu'on aura

$$(m+6q^3)^3 > 2m^3.$$

Supposons maintenant que cette inégalité soit satisfaite, et reprenons l'identité (53.) en y fesant

$$a = \left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right), \quad b = \frac{m}{6q^2},$$

il est clair que nous aurons l'équation

$$55. \quad \left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3 =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3\left\{\frac{\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3-2\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3}{\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3+\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3}\right\}^3 \\ \qquad +\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3\left\{\frac{2\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3-\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3}{\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^3-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3+\left(\frac{m}{6q^2}\right)^3}\right\}^3\end{array}\right\},$$

dans laquelle le premier cube du second membre pourra s'écrire de cette manière

$$\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)^2-2m^3}{(m+6q^3)^2+m^3}\right)^3\left(\frac{(m+6q^3)((m+6q^3)^2-2m^3)^2-2m^3((m+6q^3)^2+m^3)^2}{(m+6q^3)^2((m+6q^3)^2-2m^3)^2+m^3((m+6q^3)^2+m^3)^2}\right)^3$$

et afin que ce cube soit positif il suffira que l'inégalité

$$56.\quad (m+6q^3)((m+6q^3)^2-2m^3)^2>2m^3((m+6q^3)^2+m^3)^2,$$

soit satisfaite; et l'on voit que cette inégalité renferme l'autre

$$(m+6q^3)^2>2m^3,$$

(puisque les deux nombres m et q, sont positifs par supposition) et que lorsque l'inégalité (56.) sera satisfaite, le second cube du second membre de l'équation (55.) sera positif aussi, puisque si l'inégalité (56.) est satisfaite l'autre

$$2(m+6q^3)^2((m+6q^3)-2m^3)^2>m^3((m+6q^3)^2+m^3)^2,$$

sera satisfaite aussi. Il suffira donc de satisfaire à l'inégalité (56.) pour que les deux cubes du second membre de l'équation (54.), et les deux cubes du second membre de l'équation (55.) soient positifs.

Soit, pour abréger, $6q^3=z$, l'inégalité (56.) deviendra, en extrayant la racine cubique,

$$(z+m)((z+m)^2-2m^3)-m((z+m)^2+m^3)\sqrt[3]{2}>0,$$

d'où l'on déduira, en ordonnant le premier membre par les puissances de z,

$$57.\quad z^4+m(4-\sqrt[3]{2})z^3+m^2(6-3\sqrt[3]{2})z^2+m^3(2-3\sqrt[3]{2})z-m^4(1+2\sqrt[3]{2})>0.$$

On a supposé $m>6q^3$, ou bien $m>z$; en fesant donc $m=Az$, on aura $A>1$, et en substituant cette valeur de m dans l'inégalité (57.), on aura, après avoir divisé par z^4, l'autre inégalité

$$1+(4-\sqrt[3]{2})A+(6-3\sqrt[3]{2})A^2+(2-3\sqrt[3]{2})A^3-(1+2\sqrt[3]{2})A^4>0,$$

et celle-ci, en y fesant $A=1+x$, se transformera dans la suivante

$$58.\quad 12-9\sqrt[3]{2}+(18-24\sqrt[3]{2})x+(6-24\sqrt[3]{2})x^2-(2+11\sqrt[3]{2})x^3-(1+2\sqrt[3]{2})x^4>0,$$

dans laquelle il sera toujours possible de trouver pour x un nombre rationnel positif qui lui satisfasse; en effet puisque l'on a $126>100\sqrt[3]{2}$, on aura aussi

$$12-9\sqrt[3]{2}>\tfrac{33}{50},$$

et x devra être un nombre tel que la somme de tous les termes qu'il multiplie dans l'inégalité (58.) soit moindre que $\frac{33}{50}$. On fera à cet effet $100\sqrt[3]{2}=126$, car tous les termes qui sont multipliés par x dans l'inégalité (58.) étant négatifs, on ne devra craindre aucune erreur en prenant pour $\sqrt[3]{2}$ un nombre un peu plus grand que la valeur exacte de ce radical. Par cette substitution l'inégalité (58.) se transformera dans la suivante

$$33-622x-1212x^2-793x^3-226x^4>0;$$

d'où l'on déduira, en fesant $x = \frac{1}{y}$,

$$y^4 - \tfrac{618}{33} y^3 - \tfrac{1212}{33} y^2 - \tfrac{393}{33} y - \tfrac{324}{33} > 0:$$

et comme $-\frac{1212}{33}$ est le plus grand coefficient négatif de cette inégalité, elle sera toujours satisfaite en fesant

$$y = \tfrac{1212}{33} + 1 = \tfrac{415}{11},$$

et à plus forte raison en fesant

$$y = \tfrac{415}{11} + u,$$

(u étant une quantité positive quelconque) d'où il résulte que la valeur de

$$x = \frac{11}{415 + 11u} < \frac{11}{415},$$

satisfera à l'inégalité (58.).

Maintenant l'on a

$$m = Az = (1 + x)z = \left(1 + \frac{11}{415 + 11u}\right)z = 6\left(\frac{426 + 11u}{415 + 11u}\right)q^3,$$

et partant

$$q^3 = \left(\frac{415 + 11u}{426 + 11u}\right)\frac{m}{6};$$

mais comme par hypothèse $q^3 < \frac{m}{6}$, il faudra trouver un nombre rationnel positif q, tel que q^3 soit compris entre

$$\frac{m}{6} \text{ et } \frac{415m}{426 \times 6};$$

et il est clair qu'on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de q^3 comprises entre ces limites, valeurs qui satisferont à toutes les *inégalités de condition* que nous venons de trouver.

Maintenant puisque le binome

$$\left(\frac{m + 6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3,$$

se réduit à la somme de deux cubes positifs, à l'aide de l'identité (54.), et que d'après l'analyse précédente on peut réduire l'autre binome

$$\left(\frac{m + 6q^3}{6q^2}\right)^3 \left(\frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3,$$

à la somme de deux cubes positifs à l'aide de l'équation (55.), il est clair que l'on pourra réduire le second membre de l'équation

$$m = \left(\frac{m + 6q^3}{6q^2}\right)^3 + \left(\frac{m - 6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3$$

à la somme de quatre cubes positifs; et partant on aura pour résultat, qu'un nombre quelconque rationnel positif peut toujours se décomposer, d'une infinité de manières, en quatre cubes positifs, en nombres rationnels.

Lagrange en cherchant les formes cubiques qui se reproduisent, lorsqu'elles sont multipliées entre elles, trouva la formule

$$59.\quad \left\{\begin{matrix} x^3+ax^2y+(a^2-2b)x^2z+bxy^2+(ab-3c)xyz \\ +(b^2-2ac)xz^2+cy^3+acy^2z+bcyz^2+c^2z^3 \end{matrix}\right\},$$

qui étant multipliée par une formule semblable donne un produit de la même forme. D'après les principes que nous venons d'exposer on peut trouver un grand nombre d'expressions nouvelles, de la même espèce que la formule (59.), et qui ne sont pas comprises dans celle-ci. En effet étant données les deux équations,

$$F = F_3(x,\ y,\ z,\ u,\ \ldots\ \text{etc.}) + A,$$
$$F_1 = F_3(x_1,\ y_1,\ z_1,\ u_1,\ \ldots\ \text{etc.}) + A,$$

on pourra toujours faire

$$FF_1 = F_3(r,\ s,\ t,\ v,\ \ldots\ldots\ \text{etc.}) + A,$$

(les quantités r, s, t, v, ... etc., étant des fonctions rationnelles des quantités A, x, x_1, y, y_1, z, z_1 .... etc.) pourvu que l'équation

$$F_3(X,\ Y,\ Z,\ U,\ \ldots\ \text{etc.}) = 0,$$

puisse être résolue en nombres rationnels. Ainsi par exemple en fesant

$$F = x^3+y^3+z^3+u^3,\quad F_1 = X^3+Y^3+Z^3+U^3,$$

on aura l'identité

$$FF_1 = \left\{\begin{matrix} \left(\frac{FF_1+(r+s+t)^3-r^3-s^3-t^3}{3((r+s+t)^2+r^2-s^2-t^2}-r-s-t\right)^3+\left(\frac{FF_1+(r+s+t)^3-r^3-s^3-t^3}{3((r+s+t)^2+r^2-s^2-t^2)}+r\right)^3 \\ +\left(s-\frac{FF_1+(r+s+t)^3-r^3-s^3-t^3}{3((r+s+t)^2+r^2-s^2-t^2)}\right)^3+\left(t-\frac{FF_1+(r+s+t)^3-r^3-s^3-t^3}{3((r+s+t)^2+r^2-s^2-t^2)}\right)^3 \end{matrix}\right.$$

dans laquelle r, s, t, sont des quantités indéterminées.

Euler a démontré pour la première fois, qu'un nombre quelconque rationnel positif est toujours égal à la somme de quatre carrés en nombres rationnels; il a démontré aussi, que le produit d'une somme de quatre carrés, par une somme de quatre carrés, est semblablement la somme de quatre carrés: l'analyse précédente montre que l'on peut généraliser ces deux théorèmes, et les étendre aux troisièmes puissances.

La méthode que nous avons exposée n'est plus générale, lorsque les formules que l'on considère passent le troisième degré; et c'est à ce degré qu'**Euler** et **Lagrange** se sont arrêtés dans leurs recherches. Cependant on peut trouver des formules de tous les degrés qui se reproduisent lorsqu'elles sont multipliées par des formules semblables. Ainsi, par exemple, pour le quatrième degré on a les deux formules

$$3x^4+y^4-z^4-3u^4,\quad 30x^4+2y^4-20z^4-12u^3,$$

qui représentent rationnellement tous les nombres rationnels, et chacune desquelles se reproduit lorsqu'elle est multipliée par une formule semblable.

Lagrange en partant de la formule (59.) a trouvé une infinité de solutions entières de l'équation

$$F_3(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = z^2;$$

et il a cru que cette équation offrirait beaucoup de difficultés si on voulait la résoudre autrement que par sa méthode: nous allons voir maintenant qu'elle est un cas particulier d'une équation générale dont on peut toujours avoir une infinité de solutions entières.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation

$$60.\quad \left.\begin{matrix} F_n(x_1, y_1, z_1, \ldots \text{etc.}) + F_m(x_2, y_2, z_2, \ldots \text{etc.}) \\ \ldots\ldots\ldots + F_p(x_r, y_r, z_r, \ldots \text{etc.}) \end{matrix}\right\} = F_q(x_s, y_s, z_s \ldots \text{etc.}),$$

dans laquelle on exprime toujours en général par

$$F_p(x_r, y_r, z_r, \ldots \text{etc.}),$$

un polynome homogène, rationnel et entier, du degré p (p étant un nombre entier positif) à coefficiens entiers entre les variables

$$x_r, y_r, z_r, \ldots \text{etc.};$$

si l'un quelconque des exposans $n, m, \ldots p, q$, n'a de facteur commun avec aucun des autres exposans, on pourra toujours résoudre d'une infinité de manières l'équation (60.). En effet, soit q l'exposant qui n'a de facteur commun avec aucun des autres exposans $n, m, \ldots p$; on mettra u à la place des inconnues $x_s, y_s, z_s, \ldots$ etc. dans le polynome

$$F_q(x_s, y_s, z_s, \ldots \text{etc.}),$$

et en supposant que la somme des coefficiens du polynome

$$F_q(x_s, y_s, z_s, \ldots \text{etc.}),$$

soit égale à b, on aura

$$F_q(u, u, u, \ldots \text{etc.}) = bu^q;$$

puis en fesant, pour abréger, le nombre a égal au produit $n \times m \times \ldots \times p$, on écrira dans l'équation (60.), $(bX)^{\frac{a}{n}}$ à la place de x, $(bY)^{\frac{a}{n}}$ à la place de y, $(bZ)^{\frac{a}{n}}$ à la place de z, ... etc.; puis on écrira $(bY_1)^{\frac{a}{m}}$, à la place de x_1, $(bY_1)^{\frac{a}{m}}$ à la place de y_1, $(bZ_1)^{\frac{a}{m}}$ à la place de z_1, ... etc.; et ainsi de suite jusqu'au dernier polynome du premier membre dans lequel on écrira $(bX_r)^{\frac{a}{p}}$ à la place de x_r, $(bY_r)^{\frac{a}{p}}$ à la place de y_r, $(bZ_r)^{\frac{a}{p}}$ à la place de z_r, ... etc.; où il faut observer que les quantités

$$X,\ Y,\ Z,\ \ldots\ \text{etc.},$$
$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ \ldots\ \text{etc.},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$X_r,\ Y_r,\ Z_r,\ \ldots\ \text{etc.},$$

expriment des nombres entiers quelconques.

Maintenant pour déterminer la valeur de u, l'on fera

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{b}\,F_n\left((bX)^{\frac{a}{n}},\ (bY)^{\frac{a}{n}},\ (bZ)^{\frac{a}{n}},\ \ldots\ \text{etc.}\right) \\ +\frac{1}{b}\,F_m\left((bX_1)^{\frac{a}{m}},\ (bY_1)^{\frac{a}{m}},\ (bZ_1)^{\frac{a}{m}},\ \ldots\ \text{etc.}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +\frac{1}{b}\,F_p\left((bX_r)^{\frac{a}{p}},\ (bY_r)^{\frac{a}{p}},\ (bZ_r)^{\frac{a}{p}},\ \ldots\ \text{etc.}\right) \end{array}\right\} = u,$$

et il est clair que u sera un nombre entier. A présent si l'on multiplie tous les termes de cette équation par u^{at}, (t étant l'un des nombres entiers et positifs qui résolvent l'équation à deux inconnues $at+1=qv$) et que dans l'équation (60.) l'on fasse

$$x = (bXu^t)^{\frac{a}{n}},\quad y=(bYu^t)^{\frac{a}{n}},\quad z=(bZu^t)^{\frac{a}{n}},\ \ldots\ \text{etc.},$$
$$x_1 = (bX_1u^t)^{\frac{a}{m}},\quad y_1=(bY_1u^t)^{\frac{a}{m}},\quad z_1=(bZ_1u^t)^{\frac{a}{m}},\ \ldots\ \text{etc.},$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$x_r = (bX_ru^t)^{\frac{a}{p}},\quad y_r=(bY_ru^t)^{\frac{a}{p}},\quad z_r=(bZ_ru^t)^{\frac{a}{p}},\ \ldots\ \text{etc.},$$

on aura résolu l'équation proposée d'une infinité de manières, et l'on obtiendra l'identité

$$\left.\begin{array}{l} F_n\left((bXu^t)^{\frac{a}{n}},\ (bYu^t)^{\frac{a}{n}},\ (bZu^t)^{\frac{a}{n}},\ \ldots\ \text{etc.}\right) \\ +F_m\left((bX_1u^t)^{\frac{a}{m}},\ (bY_1u^t)^{\frac{a}{m}},\ (bZ_1u^t)^{\frac{a}{m}},\ \ldots\ \text{etc.}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +F_p\left((bX_ru^t)^{\frac{a}{p}},\ (bY_ru^t)^{\frac{a}{p}},\ (bZ_ru^t)^{\frac{a}{p}},\ \ldots\ \text{etc.}\right) \end{array}\right\} = F_q(u^v,\ u^v,\ u^v,\ \ldots\ \text{etc.}).$$

Il serait facile de généraliser cette méthode, et de l'appliquer à beaucoup d'autres équations composées de polynomes qui seraient toujours homogènes, mais qui pourraient être fractionnaires et même transcendans; néanmoins comme ces recherches ne présentent aucune difficulté, nous croyons ne pas devoir nous y arrêter plus long tems.

Ce mémoire fesait partie d'un travail sur la théorie des nombres présenté en 1823 à l'Académie Royale des Sciences de Paris.

22.

Théorème relatif à une certaine fonction transcendante.

(Par *E. F. A. Minding.*)

Parmi les cas les plus simples, qui peuvent servir à éclairer d'avance la théorie générale des intégrales à différentielles algébriques, — théorie dont l'immortel Abel a jeté les fondemens dans ce qu'on lit pag. 200. du quatrième volume de ce journal, — on doit compter celui de l'intégrale $\int dx \sqrt[3]{(1+\alpha x^3)}$, dont je viens ici proposer la propriété fondamentale.

Pour abréger je désingnerai par Δx la fonction $\sqrt[3]{(1+\alpha x^3)}$, dans laquelle α représente une constante quelconque, qu'il est superflu d'indiquer sous le singne Δ, attendu qu'elle restera la même dans le cours de cette note.

Déterminons d'abord les quantités variables a et b, que nous supposons être indépendantes entre elles, de manière que l'équation

$$(x^3+a)^3 - b^3x^3(1+\alpha x^3) = 0$$

ait parmi ses racines deux quantités variables quelconques, que nous désignerons par x_1 et x_2.

Celà posé, on pourra égaler l'expression

$$(x^3+a)^3 - b^3x^3(1+\alpha x^3)$$

à un produit de trois facteurs $x^3-x_1^3$, $x^3-x_2^3$, $x^3-x_3^3$, en représentant par x_3 une troisième racine de l'équation proposée, dont la valeur dépendra des variables données x_1 et x_2.

En effet en supposant

$$(x^3+a)^3 - b^3x^3(1+\alpha x^3) = x^3-x_1^3 . x^3-x_2^3 . x^3-x_3^3,$$

on aura

$$-3a+\alpha b^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3$$
$$3a^2-b^3 = x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3$$
$$-a^3 = x_1^3x_2^3x_3^3,$$

ou bien, plus simplement, $-a = x_1x_2x_3$.

Pour déterminer a et b en fonctions de x_1 et x_2, on pourra se servir des équations:

$$x_1^3+a = bx_1\Delta x_1$$
$$x_2^3+a = bx_2\Delta x_2.$$

On tire de là:

$$a = x_1 x_2 \frac{(x_1^2 \triangle x_2 - x_2^2 \triangle x_1)}{x_1 \triangle x_1 - x_2 \triangle x_2},$$

$$b = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \triangle x_1 - x_2 \triangle x_2},$$

$$x_3 = \frac{x_2^2 \triangle x_1 - x_1^2 \triangle x_2}{x_1 \triangle x_1 - x_2 \triangle x_2}.$$

Considérons maintenant la somme:

$$dx_1 \triangle x_1 + dx_2 \triangle x_2 + dx_3 \triangle x_3.$$

En substituant au lieu de $\triangle x_1$, $\triangle x_2$, $\triangle x_3$ les expressions équivalentes $\frac{x_1^2 + a}{b x_1}$, $\frac{x_2^2 + a}{b x_2}$, $\frac{x_3^2 + a}{b x_3}$, on trouve que la somme proposée est égale à la suivante:

$$\frac{1}{b}[x_1^2 dx_1 + x_2^2 dx_2 + x_3^2 dx_3] + \frac{a}{b}\left[\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3}\right],$$

qui revient à celle-ci:

$$\frac{1}{3b} d(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \frac{a}{b} \cdot \frac{d(x_1 x_2 x_3)}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{3b} d(-3a + a b^3) + \frac{da}{b} = a b\, db.$$

Donc on a: $dx_1 \triangle x_1 + dx_2 \triangle x_2 + dx_3 \triangle x_3 = a b\, db$, ou bien, en intégrant et remplaçant b par sa valeur trouvée ci-dessus:

$$\int dx_1 \triangle x_1 + \int dx_2 \triangle x_2 + \int dx_3 \triangle x_3 = \tfrac{1}{2} a \left[\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \triangle x_1 - x_2 \triangle x_2}\right]^2.$$

La quantité x_3 est déterminée par l'équation:

$$x_3 = \frac{x_2^2 \triangle x_1 - x_1^2 \triangle x_2}{x_1 \triangle x_1 - x_2 \triangle x_2}.$$

On aurait pu, après l'intégration, ajouter une constante; mais il est facile de se convaincre qu'en commençant les intégrations par des valeurs zéro de x_1 et x_2, la constante s'évanouit.

En égalant entre elles les quantités arbitraires x_1 et x_2, les résultats précédens se changent comme il suit:

$$2\int dx_1 \triangle x_1 + \int dx_3 \triangle x_3 = \tfrac{1}{2} a \left[\frac{3x_1^2 \triangle x_1}{1 + 2a x_1^2}\right]^2,$$

$$x_3 = -\frac{x_1(2 + a x_1^2)}{1 + 2a x_1^2}.$$

De là découle immédiatement ce que nous venons de dire par rapport à la constante d'intégration.

---

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
8,00	3,173 3259 084	43429 439	3,173 3258 107	43429 458	9,999 9999 023	
8,01	3,177 6688 523	43429 439	3,177 6687 565	43429 458	9,999 9999 042	
02	3,182 0117 962	439	3,182 0117 023	457	061	
03	3,186 3547 400	439	3,186 3546 480	457	080	
04	3,190 6976 839	440	3,190 6975 937	458	098	
05	3,195 0406 279	439	3,195 0405 395	457	116	
8,06	3,199 3835 718	43429 440	3,199 3834 852	43429 456	9,999 9999 134	
07	3,203 7265 158	439	3,203 7264 308	457	150	
08	3,208 0694 597	440	3,208 0693 765	456	168	
09	3,212 4124 037	440	3,212 4123 221	457	184	
10	3,216 7553 477	440	3,216 7552 678	456	201	
8,11	3,221 0982 917	43429 441	3,221 0982 134	43429 456	9,999 9999 217	
12	3,225 4412 358	440	3,225 4411 590	456	232	
13	3,229 7841 798	441	3,229 7841 046	455	248	
14	3,234 1271 239	441	3,234 1270 501	456	262	
15	3,238 4700 680	441	3,238 4699 957	455	277	
8,16	3,242 8130 121	43429 441	3,242 8129 412	43429 455	9,999 9999 291	
17	3,247 1559 562	442	3,247 1558 867	455	305	
18	3,251 4989 004	441	3,251 4988 322	455	318	
19	3,255 8418 445	442	3,255 8417 777	455	332	
20	3,260 1847 887	442	3,260 1847 232	455	345	
8,21	3,264 5277 329	43429 442	3,264 5276 687	43429 454	9,999 9999 358	
22	3,268 8706 771	441	3,268 8706 141	455	370	
23	3,273 2136 212	442	3,273 2135 596	454	384	
24	3,277 5565 654	443	3,277 5565 050	454	396	
25	3,281 8995 097	442	3,281 8994 504	454	407	
8,26	3,286 2424 539	43429 442	3,286 2423 958	43429 454	9,999 9999 419	
27	3,290 5853 981	443	3,290 5853 412	454	431	
28	3,294 9283 424	442	3,294 9282 866	454	442	
29	3,299 2712 866	443	3,299 2712 320	454	454	
30	3,303 6142 309	443	3,303 6141 774	453	466	
8,31	3,307 9571 752	43429 443	3,307 9571 227	43429 454	9,999 9999 475	
32	3,312 3001 195	443	3,312 3000 681	453	486	
33	3,316 6430 638	443	3,316 6430 134	453	496	
34	3,320 9860 081	444	3,320 9859 587	453	506	
35	3,325 3289 525	443	3,325 3289 040	453	516	
8,36	3,329 6718 968	43429 444	3,329 6718 493	43429 453	9,999 9999 525	
37	3,334 0148 412	443	3,334 0147 946	453	534	
38	3,338 3577 855	444	3,338 3577 399	452	544	
39	3,342 7007 299	444	3,342 7006 851	453	552	
40	3,347 0436 743	444	3,347 0436 304	452	561	
8,41	3,351 3866 187	43429 444	3,351 3865 756	43429 453	9,999 9999 569	
42	3,355 7295 631	444	3,355 7295 209	452	578	
43	3,360 0725 075	444	3,360 0724 661	452	586	
44	3,364 4154 519	444	3,364 4154 113	452	594	
45	3,368 7583 963	444	3,368 7583 565	452	602	
8,46	3,373 1013 407	43429 445	3,373 1013 017	43429 453	9,999 9999 610	
47	3,377 4442 852	444	3,377 4442 470	452	618	
48	3,381 7872 296	445	3,381 7871 922	451	626	
49	3,386 1301 741	444	3,386 1301 373	452	632	
50	3,390 4731 185		3,390 4730 825		640	

k.	log. Cof. *k.*	D.	log. Sin. *k.*	D.	log. Tang. *k.*	D.
8,50	3,390 4731 185	43429 445	3,390 4730 825	43429 452	9,999 9999 640	
8,51	3,394 8160 630	43429 444	3,394 8160 277	43429 452	9,999 9999 647	
52	3,399 1590 074	445	3,399 1589 729	452	655	
53	3,403 5019 519	445	3,403 5019 181	451	662	
54	3,407 8448 964	445	3,407 8448 632	452	668	
55	3,412 1878 409	445	3,412 1878 084	451	675	
8,56	3,416 5307 854	43429 445	3,416 5307 535	43429 451	9,999 9999 681	
57	3,420 8737 299	445	3,420 8736 986	452	687	
58	3,425 2166 744	445	3,425 2166 438	452	694	
59	3,429 5596 189	445	3,429 5595 889	451	700	
60	3,433 9025 634	446	3,433 9025 340	451	706	
8,61	3,438 2455 080	43429 445	3,438 2454 791	43429 451	9,999 9999 711	
62	3,442 5884 525	445	3,442 5884 242	451	717	
63	3,446 9313 970	446	3,446 9313 693	451	723	
64	3,451 2743 416	445	3,451 2743 144	451	728	
65	3,455 6172 861	446	3,455 6172 595	451	734	
8,66	3,459 9602 307	43429 445	3,459 9602 046	43429 451	9,999 9999 739	
67	3,464 3031 752	446	3,464 3031 497	450	745	
68	3,468 6461 198	446	3,468 6460 947	451	749	
69	3,472 9890 644	445	3,472 9890 398	451	754	
70	3,477 3320 089	446	3,477 3319 849	460	760	
8,71	3,481 6749 535	43429 446	3,481 6749 299	43429 451	9,999 9999 764	
72	3,486 0178 981	446	3,486 0178 750	451	768	
73	3,400 3608 427	446	3,490 3608 201	450	774	
74	3,494 7037 873	445	3,494 7037 651	450	778	
75	3,499 0467 319	446	3,499 0467 101	451	782	
8,76	3,503 3896 766	43429 446	3,503 3896 552	43429 450	9,999 9999 787	
77	3,507 7326 211	446	3,507 7326 002	450	791	
78	3,512 0755 657	446	3,512 0755 452	450	795	
79	3,516 4185 103	447	3,516 4184 902	450	799	
80	3,520 7614 550	446	3,520 7614 352	450	802	
8,81	3,525 1043 996	43429 446	3,525 1043 802	43429 451	9,969 9999 806	
82	3,529 4473 442	446	3,529 4473 253	450	811	
83	3,533 7902 888	446	3,533 7902 703	450	815	
84	3,538 1332 334	447	3,538 1332 153	450	819	
85	3,542 4761 781	446	3,542 4761 603	450	822	
8,86	3,546 8191 227	43429 446	3,546 8191 053	43429 450	9,999 9999 826	
87	3,551 1620 673	447	3,551 1620 503	450	830	
88	3,555 5050 120	446	3,555 5049 953	450	833	
89	3,559 8479 566	447	3,559 8479 403	450	837	
90	3,564 1909 013	446	3,564 1908 853	44	840	
8,91	3,568 5338 459	43429 447	3,568 5338 302	43429 460	9,999 9099 843	
92	3,572 8767 906	447	3,572 8767 752	450	846	
93	3,577 2197 353	446	3,577 2197 202	450	849	
94	3,581 5626 799	447	3,581 5626 652	449	853	
95	3,585 9056 246	447	3,585 9056 101	450	855	
8,96	3,590 2485 693	43429 447	3,590 2485 551	43429 449	9,999 9999 868	
97	3,594 5915 140	447	3,594 5915 000	450	860	
98	3,598 9344 587	447	3,598 9344 450	449	863	
99	3,603 2774 034	447	3,603 2773 899	450	865	
9,00	3,607 6203 481		3,607 6203 349		868	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
9,00	3,607 6203 481	43429 447	3,607 6203 349	43429 449	9,999 9999 868	
9,01	3,611 9632 928	43429 447	3,611 9632 798	43429 450	9,999 9999 870	
02	3,616 3062 375	446	3,616 3062 248	449	873	
03	3,620 6491 821	447	3,620 6491 697	450	876	
04	3,624 9921 268	447	3,624 9921 147	449	879	
05	3,629 3350 715	447	3,629 3350 596	449	881	
9,06	3,633 6780 162	43429 447	3,633 6780 045	43429 450	9,999 9999 883	
07	3,638 0209 609	447	3,638 0209 495	449	886	
08	3,642 3639 056	447	3,642 3638 944	449	888	
09	3,646 7068 503	448	3,646 7068 393	450	890	
10	3,651 0497 951	447	3,651 0497 843	449	892	
9,11	3,666 3927 398	43429 447	3,655 3927 292	43429 449	9,999 9999 894	
12	3,659 7356 845	447	3,659 7356 741	450	896	
13	3,664 0786 292	447	3,664 0786 191	449	899	
14	3,668 4215 739	447	3,668 4215 640	449	901	
15	3,672 7645 186	448	3,672 7645 089	449	903	
9,16	3,677 1074 634	43429 447	3,677 1074 538	43429 449	9,999 9999 904	
17	3,681 4504 081	447	3,681 4503 987	449	906	
18	3,685 7933 528	447	3,685 7933 436	449	908	
19	3,690 1362 975	448	3,690 1362 885	449	910	
20	3,694 4792 423	447	3,694 4792 334	449	911	
9,21	3,608 8221 870	43429 448	3,698 8221 783	43429 449	9,999 9999 913	
22	3,703 1651 318	447	3,703 1651 232	449	914	
23	3,707 5080 765	447	3,707 5080 681	450	916	
24	3,711 8510 212	448	3,711 8510 131	449	919	
25	3,716 1939 660	447	3,716 1939 580	449	920	
9,26	3,720 5369 107	43429 448	3,720 5369 029	43429 449	9,999 9999 922	
27	3,724 8798 555	447	3,724 8798 478	449	923	
28	3,729 2228 002	448	3,729 2227 927	449	925	
29	3,733 5657 450	447	3,733 5657 376	449	926	
30	3,737 9086 897	448	3,737 9086 825	449	928	
9,31	3,742 2516 345	43429 447	3,742 2516 274	43429 448	9,999 9999 929	
32	3,746 5945 792	448	3,746 5945 722	449	930	
33	3,750 9375 240	447	3,750 9375 171	449	931	
34	3,755 2804 687	448	3,755 2804 620	449	933	
35	3,759 6234 135	447	3,759 6234 069	449	934	
9,36	3,763 9663 582	43429 448	3,763 9663 518	43429 449	9,999 9999 936	
37	3,768 3093 030	447	3,768 3092 967	448	937	
38	3,772 6522 477	448	3,772 6522 415	449	938	
39	3,776 9951 925	447	3,776 9951 864	449	939	
40	3,781 3381 372	448	3,781 3381 313	448	941	
9,41	3,785 6810 820	43429 447	3,785 6810 761	43429 449	9,999 9999 941	
42	3,790 0240 267	448	3,790 0240 210	449	943	
43	3,794 3669 715	448	3,794 3669 659	449	944	
44	3,798 7099 163	448	3,798 7099 108	449	945	
45	3,803 0528 611	447	3,803 0528 557	448	946	
9,46	3,807 3058 066	43429 448	3,807 3958 006	43429 449	9,999 9999 947	
47	3,911 7387 506	448	3,811 7387 454	449	948	
48	3,816 0816 964	447	3,816 0816 903	449	949	
49	3,820 4246 401	448	3,820 4246 352	448	951	
50	3,824 7675 849		3,824 7675 800		951	

38 *

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
9,50	3,824 7675 849	43429 448	3,824 7675 800	43429 446	9,999 9999 951	
9,51	3,829 1106 297	43429 447	3,829 1106 249	43429 449	9,999 9999 952	
52	3,833 4534 744	448	3,833 4534 698	448	954	
53	3,837 7964 192	448	3,837 7964 146	449	954	
54	3,842 1393 640	448	3,842 1393 595	448	955	
55	3,846 4823 088	447	3,846 4823 043	449	965	
9,56	3,850 8252 535	43429 447	3,850 8252 492	43429 449	9,999 9999 957	
57	3,855 1681 983	448	3,855 1681 941	448	958	
58	3,859 5111 438	447	3,850 5111 389	449	958	
59	3,863 8540 878	448	3,863 8540 838	448	960	
60	3,868 1970 326	448	3,868 1970 286	449	960	
9,61	3,872 5399 774	43429 448	3,872 5399 735	43429 448	9,999 9999 961	
62	3,876 8829 222	447	3,876 8829 183	448	961	
63	3,881 2258 669	448	3,881 2258 632	449	963	
64	3,885 5688 117	448	3,885 5688 081	449	964	
65	3,889 9117 565	448	3,889 9117 529	449	964	
9,66	3,894 2547 013	43429 448	3,894 2546 978	43429 448	9,999 9999 965	
67	3,898 5976 461	448	3,898 5976 426	449	965	
68	3,902 9405 909	447	3,902 9405 875	449	966	
69	3,907 2835 356	448	3,907 2835 324	448	968	
70	3,911 6264 804	448	3,911 6264 772	449	968	
9,71	3,915 9694 252	43429 448	3,915 9694 221	43429 448	9,999 9999 969	
72	3,920 3123 700	448	3,920 3123 669	449	969	
73	3,924 6553 148	448	3,924 6553 118	448	970	
74	3,928 9982 596	448	3,928 9982 566	449	970	
75	3,933 3412 044	448	3,933 3412 015	448	971	
9,76	3,937 6841 492	43429 448	3,937 6841 463	43429 448	9,999 9999 971	
77	3,942 0270 940	448	3,942 0270 911	449	971	
78	3,946 3700 388	447	3,946 3700 360	448	972	
79	3,950 7129 835	448	3,960 7129 808	449	973	
80	3,955 0559 283	448	3,955 0559 257	448	974	
9,81	3,959 3988 731	43429 448	3,959 3988 705	43429 449	9,999 9999 974	
82	3,963 7418 179	448	3,963 7418 154	448	975	
83	3,968 0847 627	448	3,968 0847 602	449	975	
84	3,972 4277 075	448	3,972 4277 051	448	976	
85	3,976 7706 523	448	3,976 7706 499	449	976	
9,86	3,981 1135 971	43429 448	3,981 1135 948	43429 448	9,999 9999 977	
87	3,985 4565 419	448	3,985 4565 396	448	977	
88	3,989 7994 867	448	3,989 7994 844	449	977	
89	3,994 1424 315	448	3,994 1424 293	448	978	
90	3,998 4853 763	448	3,998 4853 741	449	978	
9,91	4,002 8283 211	43429 448	4,002 8283 190	43429 448	9,999 9999 979	
92	4,007 1712 659	448	4,007 1712 638	448	979	
93	4,011 5142 107	448	4,011 5142 086	449	979	
94	4,015 8571 555	448	4,015 8571 535	448	980	
95	4,020 2001 003	448	4,020 2000 983	448	980	
9,96	4,024 6430 451	43429 448	4,024 6430 431	43429 449	9,999 9999 980	
97	4,028 8859 899	448	4,028 8859 880	448	981	
98	4,033 2289 347	448	4,033 2289 328	448	981	
99	4,037 5718 796	448	4,037 5718 776	449	981	
10,00	4,041 9148 243		4,041 9148 225		982	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
10,00	4,041 9148 243	43429 448	4,041 9148 225	43429 448	9,999 9999 982	
10,01	4,046 2577 691	43429 448	4,046 2577 673	43429 449	9,999 9999 982	
02	4,050 6007 139	448	4,050 6007 122	448	983	
03	4,054 9436 587	448	4,054 9436 570	448	983	
04	4,059 2866 035	448	4,059 2866 018	449	983	
05	4,063 6295 483	448	4,063 6295 467	448	984	
10,06	4,067 9724 931	43429 448	4,067 9724 916	43429 449	9,999 9999 984	
07	4,072 3154 379	448	4,072 3154 364	448	985	
08	4,076 6583 827	448	4,076 6583 812	448	985	
09	4,081 0013 275	448	4,081 0013 260	449	985	
10	4,086 3442 723	448	4,085 3442 709	448	986	
10,11	4,089 6872 171	43429 448	4,089 6872 157	43429 448	9,999 9999 986	
12	4,094 0301 619	448	4,094 0301 605	448	986	
13	4,098 3731 067	448	4,098 3731 053	449	986	
14	4,102 7160 515	448	4,102 7160 502	448	987	
15	4,107 0589 963	448	4,107 0589 959	448	987	
10,16	4,111 4019 411	43429 448	4,111 4019 398	43429 449	9,999 9999 987	
17	4,115 7448 859	448	4,115 7448 847	448	988	
18	4,120 0878 307	448	4,120 0878 295	448	988	
19	4,124 4307 755	449	4,124 4307 743	449	988	
20	4,128 7737 204	448	4,128 7737 192	448	988	
10,21	4,133 1166 652	43429 448	4,133 1166 640	43429 448	9,999 9999 988	
22	4,137 4596 100	448	4,137 4596 088	448	988	
23	4,141 8025 548	448	4,141 8025 536	449	988	
24	4,146 1454 996	448	4,146 1454 985	448	989	
25	4,150 4884 444	448	4,150 4884 433	448	989	
10,26	4,154 8313 892	43429 448	4,154 8313 881	43429 449	9,999 9999 989	
27	4,159 1743 340	448	4,159 1743 330	448	989	
28	4,163 5172 786	448	4,163 5172 778	448	990	
29	4,167 8602 236	449	4,167 8602 226	449	990	
30	4,172 2031 685	448	4,172 2031 675	448	990	
10,31	4,176 5461 133	43429 448	4,176 5461 123	43429 448	9,999 9999 990	
32	4,180 8890 581	448	4,180 8890 571	448	990	
33	4,185 2320 029	448	4,185 2320 019	449	990	
34	4,189 5749 477	448	4,189 5749 468	448	991	
35	4,193 9178 925	448	4,193 9178 916	448	991	
10,36	4,198 2608 373	43429 448	4,198 2608 364	43429 449	9,999 9999 991	
37	4,202 6037 821	448	4,202 6037 813	448	992	
38	4,206 9467 269	448	4,206 9467 261	448	992	
39	4,211 2896 717	448	4,211 2896 709	448	992	
40	4,215 6326 165	448	4,215 6326 157	449	992	
10,41	4,219 9755 613	43429 449	4,219 9755 606	43429 448	9,999 9999 992	
42	4,224 3185 062	448	4,224 3185 054	448	992	
43	4,228 6614 510	448	4,228 6614 502	448	992	
44	4,233 0043 958	448	4,233 0043 950	449	992	
45	4,237 3473 406	448	4,237 3473 399	448	993	
10,46	4,241 6902 854	43429 448	4,241 6902 847	43429 448	9,999 9999 993	
47	4,246 0332 302	448	4,246 0332 295	448	993	
48	4,250 3761 750	448	4,250 3761 743	449	993	
49	4,254 7191 198	449	4,254 7191 192	448	993	
50	4,259 0620 647		4,259 0620 640		993	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
10,50	4,259 0620 647	43429 448	4,259 0620 640	43429 448	9,999 9999 993	
10,51	4,263 4050 095	43429 448	4,263 4050 088	43429 448	9,999 9999 993	
52	4,267 7479 543	448	4,267 7179 536	449	993	
53	4,272 0908 991	448	4,272 0908 985	448	994	
54	4,276 4338 439	448	4,276 4338 433	448	994	
55	4,280 7767 887	448	4,280 7767 881	448	994	
10,56	4,285 1197 335	43429 448	4,285 1197 329	43429 449	9,999 9999 994	
57	4,289 4626 783	449	4,289 4626 778	448	994	
58	4,293 8056 232	448	4,293 8066 226	448	994	
59	4,298 1485 680	448	4,298 1486 674	448	994	
60	4,302 4915 128	448	4,302 4915 122	449	994	
10,61	4,306 8344 576	43429 448	4,306 8344 571	43429 448	9,999 9999 995	
62	4,311 1774 024	448	4,311 1774 019	448	995	
63	4,315 5203 472	448	4,315 5203 467	449	995	
64	4,319 8632 920	448	4,319 8632 916	448	996	
65	4,324 2062 368	448	4,324 2062 364	448	996	
10,66	4,328 5491 816	43429 449	4,328 5491 812	43429 449	9,999 9999 996	
67	4,332 8921 265	448	4,332 8921 261	448	996	
68	4,337 2350 713	448	4,337 2350 709	448	996	
69	4,341 5780 161	448	4,341 5780 157	448	996	
70	4,345 9209 609	448	4,345 9209 605	448	996	
10,71	4,350 2639 057	43429 448	4,350 2639 053	43429 449	9,999 9999 996	
72	4,354 6068 505	448	4,354 6068 502	448	996	
73	4,358 9497 953	449	4,358 9497 950	448	996	
74	4,363 2927 402	448	4,363 2927 398	448	996	
75	4,367 6356 850	448	4,367 6356 846	448	996	
10,76	4,371 9786 298	43429 448	4,371 9786 294	43429 449	9,999 9999 996	
77	4,376 3215 746	448	4,376 3215 743	448	996	
78	4,380 6645 194	449	4,380 6645 191	448	996	
79	4,385 0074 643	448	4,385 0074 639	448	996	
80	4,389 3504 091	448	4,389 3504 087	448	996	
10,81	4,393 6933 539	43429 448	4,393 6933 535	43429 449	9,999 9999 996	
82	4,398 0362 987	448	4,398 0362 984	448	997	
83	4,402 3792 435	448	4,402 3792 432	448	997	
84	4,406 7221 883	449	4,406 7221 880	448	997	
85	4,411 0651 332	448	4,411 0651 328	448	997	
10,86	4,415 4080 780	43429 448	4,415 4080 776	43429 449	9,999 9999 997	
87	4,419 7510 228	448	4,419 7510 225	448	997	
88	4,424 0939 676	448	4,424 0939 673	448	997	
89	4,428 4369 124	448	4,428 4369 121	448	997	
90	4,432 7798 572	448	4,432 7798 569	449	997	
10,91	4,437 1228 020	43429 449	4,437 1228 018	43429 448	9,999 9999 997	
92	4,441 4657 469	448	4,441 4657 466	448	997	
93	4,445 8086 917	448	4,445 8086 914	448	997	
94	4,450 1516 365	448	4,450 1516 362	448	997	
95	4,454 4945 813	448	4,454 4945 810	449	997	
10,96	4,458 8375 261	43429 448	4,458 8376 259	43429 448	9,999 9999 998	
97	4,463 1804 709	449	4,463 1804 707	448	998	
98	4,467 5234 158	448	4,467 5234 155	448	998	
99	4,471 9663 606	448	4,471 9663 603	449	998	
11,00	4,476 2093 054		4,476 2093 052		998	

k.	log. Cos. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
11,00	4,476 2093 054	43429 448	4,476 2093 052	43429 448	9,999 9999 998	
11,01	4,480 5522 502	43429 448	4,480 5522 500	43429 448	9,999 9999 998	
02	4,484 8951 950	449	4,484 8951 948	448	998	
03	4,489 2381 399	448	4,489 2381 396	448	998	
04	4,493 5810 847	448	4,493 5810 844	449	998	
05	4,497 9240 295	448	4,497 9240 293	448	998	
11,06	4,502 2669 743	43429 448	4,502 2669 741	43429 448	9,999 9999 998	
07	4,506 6099 191	448	4,506 6099 189	448	998	
08	4,510 9528 639	449	4,510 9528 637	448	998	
09	4,515 2958 088	448	4,515 2958 085	449	998	
10	4,519 6387 536	448	4,519 6387 534	448	998	
11,11	4,523 9816 984	43429 448	4,523 9816 982	43429 448	9,999 9999 998	
12	4,528 3246 432	448	4,528 3246 430	448	998	
13	4,532 6675 880	448	4,532 6675 878	448	998	
14	4,537 0105 328	449	4,537 0105 326	449	998	
15	4,541 3534 777	448	4,541 3534 776	448	998	
11,16	4,545 6964 225	43429 448	4,545 6964 223	43429 448	9,999 9999 998	
17	4,550 0393 673	448	4,550 0393 671	448	998	
18	4,554 3823 121	448	4,554 3823 119	448	998	
19	4,558 7252 569	448	4,558 7252 567	449	998	
20	4,563 0682 017	449	4,563 0682 016	448	998	
11,21	4,567 4111 466	43429 448	4,567 4111 464	43429 448	9,999 9999 998	
22	4,571 7540 914	448	4,571 7540 912	448	998	
23	4,576 0970 362	448	4,576 0970 360	449	998	
24	4,580 4399 810	448	4,580 4399 809	448	999	
25	4,584 [illegible] 258	448	4,584 7829 257	448	999	
11,26	4,589 1258 706	43429 449	4,589 1258 705	43429 448	9,999 9999 999	
27	4,593 4688 155	448	4,593 4688 153	448	999	
28	4,597 8117 603	448	4,597 8117 601	449	999	
29	4,602 1547 051	448	4,602 1547 050	448	999	
30	4,606 4976 499	448	4,606 4976 498	448	999	
11,31	4,610 8405 947	43429 449	4,610 8405 946	43429 448	9,999 9999 999	
32	4,615 1835 396	448	4,615 1835 394	448	999	
33	4,619 5264 844	448	4,619 5264 842	449	999	
34	4,623 8694 292	448	4,623 8694 291	448	999	
35	4,628 2123 740	448	4,628 2123 739	448	999	
11,36	4,632 5553 188	43429 448	4,632 5553 187	43429 448	9,999 9999 998	
37	4,636 8982 636	449	4,636 8982 635	448	999	
38	4,641 2412 085	448	4,641 2412 083	449	999	
39	4,645 5841 533	448	4,645 5841 532	448	999	
40	4,649 9270 981	448	4,649 9270 980	448	999	
11,41	4,654 2700 429	43429 448	4,654 2700 428	43429 448	9,999 9999 999	
42	4,658 6129 877	448	4,658 6129 876	448	999	
43	4,662 9559 325	449	4,662 9559 324	449	999	
44	4,667 2988 774	448	4,667 2988 773	448	999	
45	4,671 6418 222	448	4,671 6418 221	448	999	
11,46	4,675 9847 670	43429 448	4,675 9847 669	43429 448	9,999 9999 999	
47	4,680 3277 118	448	4,680 3277 117	448	999	
48	4,684 6706 566	449	4,684 6706 565	449	999	
49	4,689 0136 015	448	4,689 0136 014	448	999	
50	4,693 3565 463		4,693 3565 462		999	

k.	log. Cof. k.	D.	log. Sin. k.	D.	log. Tang. k.	D.
11,50	4,693 3566 463	43429 448	4,693 3566 462	43429 448	9,999 9999 999	
11,51	4,697 6994 911	43429 448	4,697 6994 910	43429 448	9,999 9999 999	
52	4,702 0424 359	448	4,702 0424 358	448	999	
53	4,706 3853 807	448	4,706 3853 806	449	999	
54	4,710 7283 255	449	4,710 7283 256	448	999	
55	4,715 0712 704	448	4,715 0712 703	448	999	
11,56	4,719 4142 152	43429 448	4,719 4142 151	43429 448	9,999 9999 999	
57	4,723 7571 600	448	4,723 7571 599	448	999	
58	4,728 1001 048	448	4,728 1001 047	449	999	
59	4,732 4430 496	449	4,732 4430 496	448	999	
60	4,736 7859 945	448	4,736 7859 944	448	999	
11,61	4,741 1289 393	43429 448	4,741 1289 392	43429 448	9,999 9999 999	
62	4,745 4718 841	448	4,745 4718 84	448	999	
63	4,749 8148 289	448	4,749 8148 288	449	999	
64	4,754 1577 737	449	4,754 1577 737	448	999	
65	4,758 5007 186	448	4,758 5007 185	448	999	
11,66	4,762 8436 634	43429 448	4,762 8436 633	43429 448	9,999 9999 999	
67	4,767 1866 082	448	4,767 1866 081	448	999	
68	4,771 5296 530	448	4,771 5296 529	449	999	
69	4,775 8724 978	448	4,775 8724 978	448	999	
70	4,780 2154 426	449	4,780 2154 426	448	999	
11,71	4,784 5583 875	43429 448	4,784 5583 874	43429 448	9,999 9999 999	
72	4,788 9013 323	448	4,788 9013 322	448	999	
73	4,793 2442 771	448	4,793 2442 770	449	999	
74	4,797 5872 219	448	4,797 5872 219	448	999	
75	4,801 9301 667	449	4,801 9301 667	448	999	
11,76	4,806 2731 116	43429 448	4,806 2731 115	43429 448	9,999 9999 999	
77	4,810 6160 564	448	4,810 6160 563	448	999	
78	4,814 9590 012	448	4,814 9590 011	449	999	
79	4,819 3019 460	448	4,819 3019 460	448	999	
80	4,823 6448 908	448	4,823 6448 908	448	999	
11,81	4,827 9878 356	43429 449	4,827 9878 356	43429 448	9,999 9999 999	
82	4,832 3307 805	448	4,832 3307 804	448	999	
83	4,836 6737 253	448	4,836 6737 252	449	999	
84	4,841 0166 701	448	4,841 0166 701	448	999	
85	4,845 3596 140	448	4,845 3596 140	448	999	
11,86	4,849 7025 597	43429 449	4,849 7025 597	43429 448	9,999 9999 999	
87	4,854 0455 046	448	4,854 0455 045	448	999	
88	4,858 3884 494	448	4,858 3884 493	449	999	
89	4,862 7313 942	448	4,862 7313 942	448	999	
90	4,867 0743 390	448	4,867 0743 390	448	999	
11,91	4,871 4172 838	43429 448	4,871 4172 838	43429 448	9,999 9999 999	
92	4,875 7602 287	448	4,875 7602 286	448	999	
93	4,880 1031 736	448	4,880 1031 734	449	999	
94	4,884 4461 183	448	4,884 4461 183	448	999	
95	4,888 7890 631	448	4,888 7890 631	448	999	
11,96	4,893 1320 079	43429 448	4,893 1320 079	43429 448	9,999 9999 999	
97	4,897 4749 527	449	4,897 4749 527	449	999	
98	4,901 8178 976	448	4,901 8178 976	448	999	
99	4,906 1608 424	448	4,906 1608 424	448	999	
12,00	4,910 5037 87[illegible]		4,910 5037 872		999	

(Der Schlufs folgt im nächsten Hefte.)

24.

Remarques sur un théorème énoncé par M. Fourier.

(Par Mr. *Stern*, docteur en philos à Göttingue.)

L'ouvrage précieux de Mr. Fourier intitulé „analyse des équations déterminées" dont l'auteur, frappé par la mort, n'a pu publier que la première partie, est précédé d'un exposé synoptique, dans lequel on trouve non seulement les propositions qui sont démontrées dans les deux premiers livres que la première partie contient, mais aussi celles qui devaient former le sujet de la seconde partie; cette partie peut donc être en quelque sorte rétablie. Dans un mémoire sur les fractions continues qui paraîtra bientôt dans ce journal j'espère restituer le contenu essentiel du cinquième livre et je m'occuperai plus tard du sixième qui contient l'application des séries récurrentes à la théorie des équations. Cette application découverte par D. Bernoulli a été cultivée tour à tour par Euler, Lagrange et M. Legendre. Mais tous ces efforts l'ont laissée fort imparfaite; en effet leur méthode ne fait connaître que la plus grande et la plus petite des racines, du moins d'une manière directe, et celles-ci seulement quand elles sont réelles. M. Fourier est allé beaucoup plus loin. Il annonce dans l'exposé mentionné (pag. 70. et suiv.) qu'à l'aide de ses théorèmes on peut trouver la valeur de toutes les racines, soit réelles, soit imaginaires, et qu'ainsi les rapports des séries récurrentes avec la théorie des équations sont beaucoup plus étendus qu'on ne l'avait pensé jusqu'à présent. Mais malheureusement il n'a énoncé que deux de ces théorèmes et l'un d'eux est en outre incorrect. Pour le moment je me contente de démontrer ces théorèmes et de restituer l'un deux; je les appliquerai alors à la résolution des équations du 3ième et du 4ième degré.

Pour traiter la chose de la manière la plus simple, je formerai la série récurrente d'après la méthode indiquée par Lagrange.

Soit proposée l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots . = 0.$$

Je suppose que cette équation n'a pas de racines égales, car si elle en avait, on les découvrirait aisément par les méthodes connues. Désignons par s, t, u, v, x, ... les racines de l'équation rangées par ordre

de grandeur, abstraction faite du signe. Si l'équation a des racines imaginaires, on conçoit que deux des racines imaginaires conjugées ont été multipliées l'une par l'autre, le produit est toujours réel et c'est ce produit qui, étant comparé au carré de chaque racines réelle, marque la place que doit occuper dans l'ordre des racines le couple des deux racines imaginaires conjuguées.

On aura

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)\ldots$$

et l'on déduira de cette équation identique les rapports

$$A_1 = -A,$$
$$A_2 = -AA_1 - 2B,$$
$$A_3 = -AA_2 - BA_1 - 3C,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

en posant

$$A_1 = s + t + u + v + \ldots$$
$$A_2 = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 + \ldots$$
$$A_3 = s^3 + t^3 + u^3 + v^3 + \ldots$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$A_n = s^n + t^n + u^n + v^n + \ldots$$

Supposons d'abord que la première racine est réelle. Alors les termes $A_1, A_2, A_3 \ldots$ constituent une série récurrente que je désignerai par (S); en divisant chaque terme par celui qui le précède on approche de plus en plus et indéfiniment de la racine s, c'est la règle connue de **Bernoulli**. Pour trouver la valeur de la seconde racine t, on prend trois termes consécutifs A_1, A_2, A_3, on retranche du produit des extrêmes le carré du terme moyen et l'on opère de la même manière pour trois autres termes consécutifs A_2, A_3, A_4; A_3, A_4, A_5; ainsi de suite. De cette manière on aura une nouvelle suite récurrente que je désignerai par (S_1); en divisant chaque terme de cette suite par celui qui le précède, la suite de quotiens sera convergente et elle aura pour limite le produit st des deux premières racines.

Car supposons que l'exposant n est assez grand pour que l'on ait à très-peu près

$$A_n = s^n + t^n,$$

on approche de plus en plus de la verité, en posant

$$A_{n+1} = s^{n+1} + t^{n+1},$$
$$A_{n+2} = s^{n+2} + t^{n+2},$$

$$A_{n+3} = s^{n+3} + t^{n+3},$$
$$A_{n+4} = s^{n+4} + t^{n+4},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Ainsi on aura

$$A_n \cdot A_{n+2} - (A_{n+1})^2 = s^n \cdot t^n \; (s-t)^2,$$
$$A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2 = s^{n+1} \cdot t^{n+1} (s-t)^2,$$
$$A_{n+2} \cdot A_{n+4} - (A_{n+3})^2 = s^{n+2} \cdot t^{n+2} (s-t),$$

ou

$$\frac{A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2}{A_n \cdot A_{n+2} - (A_{n+1})^2} = st,$$
$$\frac{A_{n+2} \cdot A_{n+4} - (A_{n+3})^2}{A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2} = st,$$
etc.

c'est-à-dire que les quotiens s'approcheront de plus en plus de la valeur st. Voilà le second théorème de M. Fourier démontré.

Si au lieu de prendre trois termes consécutifs de la série (S), on en prend quatre A_1, A_2, A_3, A_4, si du produit des deux termes extrêmes, on retranche le produit des termes moyens, on trouve

$$A_n \cdot A_{n+3} - A_{n+1} \cdot A_{n+2} = s^n \; t^n \cdot (s^3 - s^2 t - s t^2 + t^3),$$
$$A_{n+1} \cdot A_{n+4} - A_{n+2} \cdot A_{n+3} = s^{n+1} \cdot t^{n+1} (s^3 - s^2 t - s t^2 + t^3),$$
etc.

Ainsi on a une nouvelle série (S_2) dans laquelle les quotiens continus ont encore pour limite le produit st. C'est en quoi je me trouve en opposition avec l'assertion réitérée de M. Fourier, car selon son premier théorème la limite de ces quotiens est la somme $s+t$ des deux premières racines.

La suite des quotiens de la première série (S) cesse d'être convergente si la racine s est imaginaire, alors on n'aura jamais à très-peu près

$$A_n = s^n,$$

mais il est facile de voir que les quotiens continues des séries (S_1) et (S_2) ne cessent de converger vers la limite st, parceque la somme $s^n + t^n$ est toujours réeile, s et t étant des racines conjuguées. On connait donc le produit des deux racines imaginaires, pour trouver leurs valeurs il faut en connaitre encore une autre fonction. On la trouve en considérant que le $n^{ième}$ terme de la série (S_2) est $= s^n \cdot t^n (s+t)(s-t)^2$ et le $n^{ième}$ terme de la série $(S_1) = s^n \cdot t^n (s-t)^2$, d'où il suit qu'en divisant chaque terme de la série (S_2) par le terme correspondant de la série (S_1) on formera une

suite de quotiens, qui approcheront de plus en plus de la somme $s+t$ des deux premières racines. Cette somme n'est donc pas donnée par les quotiens d'une seule série, mais par des quotiens tirés des deux séries différentes. C'est ainsi qu'on doit restituer le premier théorème de M. Fourier.

Pour faire voir que ce qui précède suffit pour résoudre toutes ces équations du troisième degré, je ne saurais faire mieux que de parcourir quelques exemples qu'Euler a traités (Introd. in anal. inf. §. 349.).

Ex. 1. Soit proposée l'équation

$$x^3-2x-4=0.$$

On aura

$(S)=0$, 4, 12, 8, 40, 64, 112, 288, 480, 1024, 2112, 3968, 8320, 16384, 32512, 66048, 130560, 262144, 525312, 1046528, ...

Cette série a des quotiens convergens.

En s'arrêtant au 20ième terme, on a

$$s=\frac{1046528}{525312}=1{,}992\ldots.,$$

en s'arrêtant au 19ième, on a

$$s=\frac{525312}{262144}=2{,}004;$$

je prends $s=2$, ce qui est sa vraie valeur.

La série (S_1) devient

$(S_1)=-16$, -112, 4, 66, -1088, 384, 5888, -29184, 64512, ...

Les quotiens de cette série étant divergens, il faut en conclure que les racines t et u sont imaginaires. Connaissant la valeur de la racine s, on peut trouver les valeurs des racines t et u à l'aide des équations

$$s+t+u=0,$$
$$stu=4.$$

On parvient au même but en substituant dans l'équation proposée $\frac{2}{y}$ au lieu de x, l'équation se change alors en

$$1.\quad y^3+y^2-2=0,$$

et en désignant les deux premières racines de cette nouvelle équation par y_1, y_2, on a $t=\frac{2}{y_1}$, $u=\frac{2}{y_2}$.

La série (S) déduite de l'équation (1.) sera

$(S)=-1$, 1, 5, -7, 9, 1, -15, 33, -31, 1, 65, -127, 129, 1, -255, 513, -511, 1, 1025, -2047, 2049, 1, ...

D'ailleurs on aura

$(S_1) = -6, -32, -4, -88, -136, -192, -624, -928, -2016,$
$-4352, -7744, -16768, -32896, -64512, -132864, -260608,$
$-523776, -1052672, -2089044, -4200448, \ldots.$
$(S_2) = 2, 44, 68, 96, 312, 464, 1008, 2176, 3872, 8384, 16448, 32256,$
$66412, 130304, 261888, 526336, 1044992, 2100224, 4195328, \ldots.$

On tire de cette dernière série les valeurs approchées

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{2100224}{1044992} = 2{,}009 \ldots, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{4195328}{2100224} = 1{,}997 \ldots;$$

je prends $y_1 \cdot y_2 = 2$.

On aura en outre

$$y_1 + y_2 = \frac{2100224}{-1052672} = -1{,}995, \quad y_1 + y_2 = \frac{4195328}{-2089044} = -2{,}008;$$

prenant $y_1 + y_2 = -2$, on aura

$$y_1 \cdot y_2 = \quad 2,$$
$$y_1 + y_2 = -2,$$

ou

$$y_1 = -1 + \sqrt{-1}, \quad y_2 = -1 - \sqrt{-1},$$
$$t = -1 - \sqrt{-1}, \quad u = -1 + \sqrt{-1}.$$

Ex. 2. Soit proposée l'équation

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0.$$

On aura

$$(S) = 4, 0, -8, 0, 64, 192, 256, 0, -512, 0, \ldots.$$

Les quotiens de cette série étant divergens on pourroit en conclure que la première racine est imaginaire, mais dans ce cas il faudrait que la série (S_1) eût des quotiens convergens. Cette série sera

$$(S_1) = -32, 64, -512, -4096, -20480, -131072, 262144, \ldots;$$

les quotiens continus sont divergens et il faut en conclure que l'équation proposée n'a pas une racine première, c'est à dire qu'elle a une racine réelle dont le carré est égal au produit des deux autres racines qui sont imaginaires. Le dernier terme de l'équation doit donc être égal à la troisième puissance de la racine réelle, c'est à dire qu'on aura $s = \sqrt[3]{8} = 2$ et $t.u = 4$, d'ailleurs on a $s + t + u = 4$, ou $t + u = 2$, d'où il suit

$$t = 1 + \sqrt{-3}, \quad u = 1 - \sqrt{-3}.$$

Ex. 3. Soit proposée l'équation

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0.$$

On aura

$(S) = 3, 1, -3, -7, -7, 1, 17, 33, 33, 1, -63, -127, -127, 1,$
$257, 513, 513, 1, -1023, -2047 \ldots.$

$(S_1) = -10,\ -16,\ -28,\ -56,\ -120,\ -256,\ -528,\ -1056,\ -2080,$
$-4096,\ -8128,\ -16256,\ -32640,\ -65536,\ -131328,\ -262656, \ldots$

$(S_2) = -18,\ -28,\ -46,\ -112,\ -214,\ -528,\ -1072,\ -2112,\ -4128,$
$-8128,\ -16192,\ -32512,\ -65408,\ -131328,\ -262912,\ -525312, \ldots$

Ainsi on a

$$st = -\frac{262656}{-131328} = 2,$$

$$s + t = -\frac{525312}{-262656} = 2,$$

d'où l'on déduit

$$s = 1 + \sqrt{-1}, \quad t = 1 - \sqrt{-1}.$$

L'équation

$$s + t + u = 3 \text{ donne } u = 1.$$

On voit aisément que le même procédé suffit pour résoudre toute équation du quatrième degré, car, étant donnée l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

on trouve les deux premières racines s, t, en formant les séries (S), (S_1), (S_2), et l'on déduit alors des équations

$$1)\quad s + t + u + v = -a,$$
$$2)\quad s \cdot t \cdot u \cdot v = d,$$

les valeurs des deux dernières racines, si l'on ne veut pas les chercher par la voie directe en prenant $x = \frac{1}{y}$, et cherchant la valeur de y. Seulement si les racines extrêmes s et v, sont réelles et les racines t, u imaginaires, il faut chercher la valeur de la racine s par la série (S) et la valeur de la racine u en substituant $\frac{1}{y}$ au lieu de x dans l'équation proposée, et cherchant la valeur de y, on trouvera alors les valeurs des racines t et u à l'aide des équations (1.) et (2.).

Par exemple, étant proposée l'équation

$$x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4,$$

on aura

$(S) = 1,\ -7,\ -14,\ 29,\ 96,\ -34,\ -503,\ -347,\ 2083,\ 3838,\ -5959,$
$-24782,\ 3548,\ 123987, \ldots$

$(S_1) = -63,\ -399,\ -2185,\ -10202,\ -49444,\ -241211,\ -1168158,$
$-5670675,\ -27142841,\ -130622997,\ -635290056, \ldots$

$(S_2) = -69,\ -266,\ -2308,\ -11323,\ -50414,\ -245363,\ -1207713,$
$-5926781,\ -28750264,\ -134058714,\ -656910997, \ldots$

Les deux premières racines de l'équation sont donc imaginaires.

La série (S_1) donne

$$st = -\frac{635290056}{-130622997} = 4{,}863,$$

et la série (S_2) donne

$$st = -\frac{650910997}{-134058714} = 4{,}856,$$

on aura aussi

$$s + t = \frac{650910997}{635290056} = 1{,}0242\ldots.$$

Je prends

$$st = 4{,}86,$$
$$s + t = 1{,}025,$$

ainsi on aura

$$s = \frac{1{,}025 + \sqrt{(-18{,}489)}}{2}, \quad t = \frac{1{,}025 - \sqrt{(-18{,}489)}}{2},$$

d'ailleurs on a

$$s + t + u + v = 1,$$
$$s \,.\, t \,.\, u \,.\, v = -4,$$

ou

$$u + v = -0{,}025,$$
$$uv = -\frac{4}{4{,}86},$$

d'où l'on déduit les valeurs approchées

$$u = -\frac{1}{20} - \sqrt{\left(\frac{80243}{97200}\right)},$$
$$v = -\frac{1}{20} + \sqrt{\left(\frac{80243}{97200}\right)}.$$

L'équation a donc deux racines imaginaires et deux racines réelles dont l'une est comprise entre 0 et 1 et l'autre entre −1 et 0. M. Fourier, en traitant la même équation *), a trouvé que l'une des racines est comprise entre −10 et −1. Mais on découvre facilement qu'il s'est glissé une erreur dans le calcul, en effet la suite des signes correspondante à (-4) est

$$+ - + - +.$$

Le 20. Août 1832.

---

*) Analyse des équat. pag. 143.

25.

Nachrichten von Büchern.

Aufgaben-Systeme und Sammlungen aus der ebenen Geometrie, zu einem selbstständigen Unterricht in der Analysis, geordnet und durch Gesetze vorbereitet von H. v. Holleben *und* P. Gerwien, *Lieut. im 21sten und 22sten Inf. Reg. und Lehrer im Königl. Preuſs. Kadetten-Korps. 1ster Theil. Geometrische Analysis. 1ster Band. Anleitungen und Gesetze.* $19\frac{1}{2}$ *Bog. gr.* 8. *und* 19 *Figuren-Tafeln. Preis* 1 *Rthlr,* 10 *Sgr. 2ter Band. Aufgaben.* $34\frac{1}{4}$ *Bog. gr.* 8. *und* 42. *Steintafeln. Preis* 3 *Rthlr.* 10 *Sgr.*

Das eben angeführte geometrische Werk hat eine doppelte Bestimmung. Einmal soll dasselbe als Handbuch für den Lehrer bei einem selbstständigen Unterricht in der geometrischen und algebraischen Analysis dienen, und ferner hat es den Zweck, eine Bearbeitung der hauptsächlichsten Aufgaben-Systeme der niederen Geometrie, welche sich durch Kombination einer bestimmten Anzahl von Elementen ergeben, darzubieten; in welcher Art beim Dreieck z. B. die folgenden Elemente benutzt worden sind: Seiten, Winkel, Höhen, die Seiten halbirende Transversalen, die Winkel halbirende Transversalen, Radius des Kreises um das Dreieck, Radius des Kreises im Dreieck, Summen der Seiten, Differenzen der Seiten, Differenzen der Winkel. Die eine Bestimmung haben wir durch eine sorgfältige Auswahl des Stoffs und durch wirkliche Erfahrungen im Unterricht zu erreichen gesucht, so daſs z. B. die hierbei so wichtige Anordnung des Materials in Rücksicht der Folge der Aufgaben und ihrer Vorbereitung durch Oerter, Daten u. s. w. im ganzen ersten Bande ein Resultat wiederholt in den Unterrichtsstunden angestellter Versuche ist. Die andere Bestimmung dagegen haben wir uns bemüht durch Benutzung des bekannten Materials, und vorzüglich durch eine Jahre lang fortgesetzte eigene Ausbildung der Systeme zu erfüllen. Einen Theil der Erfolge dieser vorher angegebenen Bemühungen bilden die zwei bis jetzt herausgekommenen Bände über die geometrische Analysis. Der erste Band (Anleitungen und Gesetze). ist zum Unterricht in der Stunde bestimmt, und enthält Oerter, Daten, Lehrsätze, Aufgaben u. s. w., welche sich gegenseitig vorbereitend und unabhängig vom zweiten Bande geordnet sind. In dem zweiten Bande (Aufgaben) dagegen sind durch Zusammendrängung des Stoffs mittelst eigener Zeichen u. s. w. ungefähr 2000 Dreiecks-, Vierecks-, Kreis- (Schneidung- und Berührung-) Linien- und Punkt-Aufgaben nebst den mit denselben im Zusammenhange stehenden Gesetzen abgehandelt, von denen die leichteren sämmtlich in Rücksicht auf den Unterricht, zur Beschäftigung des Schülers auſserhalb der Stunden, geordnet sind, und die schwierigeren Aufgaben, ferner einige Sätze, welche zu der Eigenschaft des Dreiecks gehören, daſs ein bei demselben vorhandener Kreis 32 zu demselben Dreieck gehörende Kreise berührt, und endlich die geometrische Bestimmung von 21 bei einem Dreieck vorhandenen Centrallinien den Schluſs dieses Bandes bilden. Die Lösung der in diesen beiden Bänden fehlenden Aufgaben durch die höhere Geometrie oder mittelst der algebraischen Analysis, und die Ausarbeitung der Anleitungen zum Unterricht in dieser Analysis sollen den ersten Bänden nachfolgen, sobald es die Umstände erlauben.

Berlin, den 5ten October 1832.

Gerwien. v. Holleben.

26.

Mémoire sur la résolution des équations indéterminées á l'aide des séries.

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Introduction.

Les formules qui servent à résoudre en termes finis les problèmes analytiques sont si peu nombreuses, qu'il n'y aurait que des questions très-simples que l'on pourrait traiter dans le calcul des séries. Cependant jusqu'à présent on n'avait jamais tenté d'appliquer ce calcul aux équations indéterminées, que l'on tâchait de résoudre par des transformations, en s'aidant des propriétés spéciales des nombres, que le génie de quelques grands géomètres avait pu découvrir; quoique dans le seul cas de l'analyse indéterminée, les méthodes d'approximation fournissent des solutions exactes. Car comme, lorsqu'il s'agit d'équations indéterminées, les inconnues doivent avoir des valeurs entières, il est clair qu'ayant trouvé deux limites entre lesquelles doit être comprise la valeur d'une inconnue, cette valeur ne peut être que l'un des nombres entiers compris entre ces deux limites. D'où il résulte qu'en égalant successivement à tous ces nombres entiers l'inconnue dont il s'agit, on pourra, par l'élimination, ôter cette inconnue de l'équation proposée, qui se réduira de cette manière à un système d'équations dans lesquelles le nombre des inconnues sera diminué de l'unité.

Dans ce mémoire nous appliquons le calcul des séries aux équations indéterminées. Notre méthode est fondée sur ce théorème très-simple, que lorsqu'on a une équation dont chaque membre se compose de deux termes, l'un desquels est un nombre entier, et l'autre est une fraction moindre que l'unité, il faudra que les deux nombres entiers soient égaux entre eux, de même que les deux fractions. Il résulte de là que lorsque d'une équation indéterminée à deux inconnues, on aura déduit la valeur d'une fonction donnée des inconnues développée en série convergente, de manière qu'une partie de la série soit une fonction entière des inconnues,

et l'autre partie soit une fonction fractionnaire telle qu'on puisse la rendre plus petite que l'unité, en donnant aux inconnues une valeur plus grande que des limites données, il faudra que ces inconnues soient comprises entre ces limites, ou bien on pourra égaler à zéro la partie fractionnaire, et la partie entière de la série fournira de cette manière une nouvelle équation à deux inconnues qui devra exister en même tems que l'équation proposée, et qui servira à résoudre celle-ci complètement.

Nous appliquons d'abord ces principes à des équations indéterminées très-simples, en montrant comment, par le développement en séries, on peut les décomposer en deux autres équations, dont l'une en termes finis ne renferme que des quantités entières. Puis nous résolvons des équations plus compliquées algébriques ou transcendantes. Nous montrons ensuite comment l'on peut résoudre les équations dans lesquelles il faut extraire les racines, d'un ordre quelconque, de certains polynomes donnés, et nous fesons voir que dans ce cas, afin que notre méthode soit applicable, il faut satisfaire à la condition que l'on puisse extraire la racine de l'ordre dont il s'agit, du terme qui contient le plus grand exposant. Enfin nous résolvons l'équation proposée par rapport à l'une des inconnues, lorsque cette résolution est possible, en fesant observer que dans ce cas, lorsque, en donnant aux inconnues ou à l'une d'elles seulement des valeurs plus grandes qu'un nombre donné, les racines deviennent imaginaires, il faudra nécessairement prendre pour les inconnues des valeurs moindres que ce nombre, et l'équation proposée sera résolue complètement.

En traitant de cette manière les équations indéterminées qui sont du second degré par rapport à l'une des inconnues, nous montrons quelles sont les conditions auxquelles on doit satisfaire afin de pouvoir résoudre complètement ces équations. Nous trouvons aussi les conditions auxquelles doivent satisfaire les équations qui sont du troisième degré par rapport à l'une des inconnues, afin qu'on puisse les résoudre complètement à l'aide des formules qui donnent les racines des équations du troisième degré. On pourrait faire les mêmes considérations sur les équations qui sont du quatrième degré par rapport a l'une des inconnues, quoique dans ce cas ces recherches se compliquent beaucoup. Mais comme passé le quatrième degré on n'a aucune méthode pour trouver les racines des équations algébriques, nous ne pourrions pas aller plus loin par des formules finies, et nous avons dû recourir aux méthodes d'approximation.

Si l'on cherche, par le théorème de Lagrange, l'expression en séries des racines d'une équation algébrique quelconque, on obtient plusieurs développemens, parmi lesquels il faut choisir ceux qui deviennent convergens lorsqu'on y substitue les valeurs des coefficiens. En général ces développemens contiennent des radicaux, mais quelquefois ils en sont délivrés, selon le degré de l'équation proposée et le nombre des termes qu'elle renferme. Maintenant, si l'on suppose qu'il s'agisse de résoudre une équation indéterminée à deux inconnues, il est clair que l'on pourra la résoudre, par le theorème de Lagrange, par rapport à l'une des inconnues, en considérant les coefficiens comme des fonctions de l'autre inconnue. Alors lorsque la série sera convergente, et que l'on pourra faire disparaître les irrationnels qu'elle contiendra, on obtiendra une équation composée d'une partie entière et d'une partie fractionnaire; et si l'on rend celle-ci plus petite que l'unité (en donnant à l'inconnue qu'elle renferme une valeur plus grande qu'une limite donnée), on aura une nouvelle équation qui devra subsister en même tems que l'équation proposée, ou bien il faudra donner à l'une des inconnues une valeur moindre que la limite dont on vient de parler: et dans les deux cas l'équation proposée sera résolue complètement.

En traitant de cette manière les équations qui sont du second ou du troisième degré par rapport à l'une des inconnues, nous retrouvons les conditions que nous avons déjà obtenues en considérant la forme des racines; et même nous trouvons de nouveaux cas de solution. Enfin nous montrons de quelle manière on peut résoudre les équations plus générales, et nous exposons quelques artifices analytiques qui peuvent servir à la résolution de plusieurs équations indéterminées.

Lorsque la série dont on doit faire usage pour avoir la valeur de la racine cherchée contient des quantités irrationnelles, notre méthode exige pour être applicable, que l'on puisse résoudre une nouvelle équation indéterminée avant d'obtenir la résolution de l'équation proposée; mais lorsque l'irrationnalité ne se montre pas, il suffira d'obtenir une série convergente qui fournira la résolution complète du problème; et il faut remarquer que les conditions qui doivent être satisfaites dans tous les cas, afin de résoudre par cette méthode les équations indéterminées à deux inconnues, ne regardent que les termes qui dans chaque coefficient de l'in-

connue, par rapport à laquelle on a résolu l'équation, renferment les plus grandes puissances de la variable.

En général au lieu de chercher le développement en séries d'une racine de l'équation proposée, on pourra chercher une fonction quelconque des inconnues, et si la suite que l'on obtient de cette manière peut devenir convergente, on aura résolu complètement l'équation proposée.

La méthode que nous exposons dans ce mémoire sert à trouver la résolution d'un infinité d'équations indéterminées de tous les degrés, que l'on ne saurait résoudre d'aucune manière par les principes connus. On peut aussi l'appliquer aux équations contenant un plus grand nombre d'inconnues, en les résolvant successivement par rapport à toutes les inconnues l'une après l'autre.

Analyse.

Etant donnée l'équation

$$61.\quad A+\alpha = B+\beta,$$

dans laquelle A et B sont deux nombres entiers, et α et β sont deux quantités positives quelconques (en observant qu'on peut toujours les rendre positives) plus petites que l'unité, il est clair que l'on aura

$$A=B,\quad \alpha=\beta.$$

Il résulte de là que si d'une équation à deux inconnues $\varphi(x,y)=0$, on peut tirer, d'une manière quelconque, une équation de la forme (61.), on pourra déterminer, par l'élimination entre les deux équations

$$\varphi(x,y)=0,\quad A=B,$$

les valeurs de x et de y. En général étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à n inconnues

$$\varphi(x,y,z,)\ldots\text{ etc.})=0,$$

si l'on en peut déduire, par des opérations quelconques, les m équations

$$A_1+\alpha_1=B_1+\beta_1,\ A_2+\alpha_2=B_2+\beta_2,\ \ldots\ A_m+\alpha_m=B_m+\beta_m,$$

dans lesquelles les quantités

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_m,\ B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_m,$$

sont des nombres entiers, et les quantités

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m,$$

sont des fractions positives (ce qu'on peut toujours supposer), plus petites que l'unité, on trouvera les équations

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \ldots . \; A_m = B_m,$$

qui étant combinées avec l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots . \text{ etc.}) = 0,$$

donneront, après l'élimination, une équation qui ne contiendra plus que $n-m$ inconnues.

Nous répéterons ici la remarque que nous avons déjà faite précédemment, que si par un procédé quelconque, on est parvenu à tirer de l'équation

$$\varphi(x, y, z, \ldots . \text{ etc.}) = 0,$$

une valeur approchée δ de x telle, que l'on sache seulement que la valeur de δ doit être toujours comprise entre M et N, on trouvera la valeur exacte de x en l'égalant successivement à tous les nombres entiers compris entre M et N.

Maintenant soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation

$$y = \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots . + a_n x^n}{b + b_1 x + b_2 x^2 \ldots . + b_m x^m};$$

on fera d'abord

$$a + a_1 x \ldots . + a_n x^n = X_n, \quad b + b_1 x \ldots . + b_m x^m = X_m,$$

et en général X_r représentera un polynome en x du degré r à coefficiens rationnels: par conséquent il s'agira de résoudre en nombres entiers l'équation

$$y = \frac{X_n}{X_m}$$

dans laquelle nous distinguerons trois cas différens, selon que l'on aura

$$m > n, \quad m = n, \quad m < n.$$

Soit $m > n$; on pourra déterminer facilement un nombre entier L tel qu'en substituant pour x dans la fraction $\frac{X_n}{X_m}$ la valeur $L + \alpha$ (α étant une quantité quelconque réelle et positive) on ait toujours (abstraction faite des signes) $X_m > X_n$; on pourra de même déterminer une seconde limite inférieure L_1 telle que si l'on fait $x = L_1 - \alpha$, on ait encore $X_m > X_n$; et comme si l'équation proposée est résoluble il faudra que la fraction $\frac{X_n}{X_m}$ soit un nombre entier, on ne pourra donner à x que les valeurs suivantes

$$x = L_1, \; x = L_1 + 1, \ldots . \; x = L;$$

de sorte qu'en éliminant x successivement entre l'équation proposée et l'une des équations précédentes, on aura un nombre $L + 1 - L_1$ d'équations en y, dont les racines entières, s'il en existe, fourniront toutes les solutions de l'équation proposée.

Lorsque $m = n$, on divisera X_n par X_m et on obtiendra un quotient $\frac{a_m}{b_m}$ plus un reste qui sera de la forme $\frac{X_{m-1}}{X_m}$, en indiquant toujours par X_{m-1} un polynome en x du degré $m-1$ à coefficiens rationnels. Maintenant on aura, lorsque $n = m$,

$$y = \frac{X_n}{X_m} = \frac{a_m}{b_m} + \frac{X_{m-1}}{X_m},$$

et partant

$$b_m y = a_m + b_m \frac{X_{m-1}}{X_m},$$

d'où il résulte qu'en fesant $b_m y - a_m = z$, on devra résoudre en nombres entiers l'équation

$$z = b_n \frac{X_{m-1}}{X_m}$$

dont nous savons déjà trouver toutes les solutions entières.

Lorsque $n > m$, on fera $n = m + p$, et en effectuant la division on trouvera l'équation

$$y = \frac{X_n}{X_m} = Ax^p + A_1 x^{p-1} \ldots\ldots + A_p + \frac{X_{m-1}}{X_m},$$

dans laquelle les coefficiens A, A_1, ... A_p, sont des nombres rationnels, et X_{m-1} est un polynome en x du degré $m-1$ à coefficiens rationnels. A présent si l'on réduit tous les coefficiens de cette équation au dénominateur commun D, on aura

$$Dy = D(Ax^p + A_1 a^{p-1} \ldots, + A_p) + \frac{DX_{m-1}}{X_m},$$

et par conséquent

$$Dy - D(Ax^p + A_1 x^{p-1} \ldots\ldots + A_p) = \frac{DX_{m-1}}{X_m},$$

et comme le premier membre de cette équation est un nombre entier, si on l'égale à z, on devra résoudre l'équation

$$z = \frac{X_{m-1}}{X_m},$$

dont nous savons déjà trouver toutes les solutions entières,

A l'aide de l'équation

$$y = \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots\ldots + a_n x^n}{b + b_1 x + b_2 x^2 \ldots\ldots + b_m x^m} = \frac{X_n}{X_m},$$

on peut résoudre l'autre plus générale

$$\varphi(x, y) = \frac{X_n}{X_m},$$

en indiquant par $\varphi(x, y)$ une fonction rationnelle et entière des nombres

entiers x et y; car puisque le premier membre de cette équation est un nombre entier, on pourra trouver toutes les valeurs de x qui rendent entier le second membre, et comme le nombre des valeurs entières que peut prendre le second membre est toujours limité, si on les représente par v_1, v_2, ... v_r, on aura les équations

$$\varphi(x,y) = v_1, \quad \varphi(x,y) = v_2, \quad \ldots\ldots \quad \varphi(x,y) = v_r,$$

qui devront exister en même tems que l'équation

$$\varphi(x,y) = \frac{X_n}{X_m},$$

et qui serviront, par l'élimination, à trouver toutes le solutions de celle-ci.

L'équation, que nous venons de traiter en renferme un grand nombre d'autres plus générales. Ainsi par exemple étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation

$$F(x).F_1(y) = f(x).f_1(y),$$

dans laquelle F, F_1, f, f_1, expriment de fonctions entières et rationnelles, on fera d'abord

$$F(x) = X_n, \quad f(x) = X_m, \quad F_1(y) = Y_p, \quad f_1(y) = Y_q,$$

en exprimant toujours par X_n et X_m des polynomes en x, entiers et rationnels des degrés n et m, et par Y_p et Y_q des polynomes en y, entiers et rationnels des degrés p et q, et l'on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{X_n}{X_m} = \frac{f_1(y)}{F_1(y)} = \frac{Y_q}{Y_p};$$

d'où l'on déduira une équation de la forme

$$X_{n-m} + \frac{X_{m-1}}{X_m} = Y_{q-p} + \frac{Y_{p-1}}{Y_p},$$

et par conséquent on pourra trouver pour x et y, des limites telles, qu'en prenant pour ces inconnues des valeurs hors de ces limites, on ait toujours, après avoir réduit tous les coefficiens fractionnaires au même dénominateur D, l'équation

$$DX_{n-m} = DY_{p-q},$$

qui étant combinée avec l'équation proposée fournira toutes les valeurs des inconnues, qui ne sont pas comprises entre les limites dont on vient de parler; et comme les valeurs comprises entre ces limites peuvent se déterminer séparément avec facilité, on aura toutes les solutions entières de l'équation proposée. Dans l'analyse précédente nous avons supposé $n > m$, mais si l'on avait $n = m$, ou $n < m$, on renverserait la fraction, et l'on aurait

$$\frac{X_m}{X_n} = \frac{Y_p}{Y_q};$$

et en général il serait facile de résoudre cette équation dans tous les cas.

Soient X_n, X_m, X_r, X_p, des polynomes quelconques en x entiers, des degrés n, m, r, p, et supposons que l'on ait $p > r$, $n > m$; si l'on doit trouver toutes les solutions entières de l'équation

62. $$y = \frac{X_n}{X_m}\left(A + A_1\frac{X_r}{X_p} + A_2\left(\frac{X_r}{X_p}\right)^2 \ldots + A_{t-1}\left(\frac{X_r}{X_p}\right)^{t-1} + A_t\left(\frac{X_r}{X_p}\right)^t + \text{etc.}\right),$$

dans laquelle la valeur du rapport $\frac{A_t}{A_{t-1}}$ ne peut jamais surpasser une limite L, on poussera la série jusqu'au terme $t+1^{me}$, (en prenant pour t le plus petit nombre entier qui satisfait à l'inégalité $pt + m > rt + n$, laquelle sera toujours possible puisque $p > r$) et on aura, après avoir effectué les divisions et après avoir multiplié par le dénominateur commun D, une équation de la forme

$$Dy = ax^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} \ldots + a_{n-m} + \frac{f(x)}{f_1(x)},$$

dans laquelle la fraction $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ représente une série convergente, dont la valeur pourra se réduire aussi petite que l'on voudra, en donnant à x des valeurs qui ne soient pas comprises entre deux limites l, l_1, que l'on déterminera aisément. On voit par là que l'équation proposée sera résolue complètement, par les principes que nous avons exposés précédemment, quelle que soit la nature de la fonction, algébrique ou transcendante, qui est exprimée par le second membre de l'équation (62.).

Soit proposé maintenant de résoudre en nombres entiers l'équation

63. $$Aa^r x^{pn} + bx^{pn-1} \ldots + dx + e = Aq^n y^{mn} + b_1 y^{mn-1} \ldots + d_1 y + e_1,$$

on pourra d'abord multiplier tous ses termes par A^{n-1}, et en fesant ensuite

$$A^{n-1}(bx^{pn-1} \ldots + dx + e) = r, \quad A^{n-1}(b_1 y^{mn-1} \ldots + d_1 y + e) = s,$$

on aura

$$Aax^p \sqrt[n]{\left(1 + \frac{r}{A^n a^n x^{pn}}\right)} = Aqy^m \sqrt[n]{\left(1 + \frac{s}{A^n q^n y^{mn}}\right)},$$

et partant

$$Aax^p\left(1 + \frac{r}{nA^n a^n x^{pn}} - \text{etc.}\right) = Aqy^m\left(1 + \frac{s}{nA^n q^n y^{mn}} - \text{etc.}\right),$$

et cette équation étant traitée de la même manière que l'équation (62.), nous conduira nécessairement à la résolution de l'équation proposée, puisque les séries qu'elles contient sont toujours convergentes, lorsqu'on donne à x et y des valeurs plus grandes que des quantités données.

Si l'on exprime en général (comme on l'a déjà fait dans le mémoire précédent) par $F_r(x, y)$, un polynome homogène et entier en x et y, du degré r, on pourra résoudre aussi l'équation

$$a^n y^{mn} = b^n x^{pn} + F_{n-1}(x, y) + F_{n-2}(x, y) \ldots + c = b^n x^{pn} + f(x, y);$$

car en extrayant la racine n^{me}, on aura

$$a y^m = b x^p \sqrt[n]{\left(1 + \frac{f(x, y)}{b^n x^{pn}}\right)} = b x^p \left(1 + \frac{f(x, y)}{n b^n x^{pn}} - \text{etc.}\right),$$

ou bien

$$b x^p = a x^m \sqrt{\left(1 - \frac{f(x, y)}{a^n y^{mn}}\right)} = a y^m \left(1 - \frac{f(x, y)}{n a^n y^{mn}} - \text{etc.}\right),$$

et il faudra faire usage de la première ou de la seconde série, selon que l'on aura $x > y$, ou $y > x$; et dans les deux cas on pourra déterminer deux limites de x et y, telles qu'en prenant pour ces inconnues des nombres entiers hors de ces limites, on ait l'équation

$$F(x, y) = F_1(x, y),$$

qui devra exister en même tems que l'équation proposée, dont on pourra, de cette manière, trouver toutes les solutions entières.

On peut résoudre par les mêmes principes l'équation

$$y = \frac{X_p}{\sqrt[n]{(a^n x^{mn} + b x^{mn-1} \ldots + c)}},$$

qui donnera

$$y = \frac{X_p}{a x^m + a_1 x^{m-1} \ldots + a_m + \frac{a_{m+1}}{x} + \text{etc.}}$$

d'où l'on déduira une équation de la forme

$$D y = X_{p-m} + \frac{X_{m-1}}{X_m},$$

qui servira à trouver toutes les solutions entières de l'équation proposée. L'équation

$$y = \frac{X_p}{\sqrt[n]{(a^n x^{mn} + b x^{mn-1} \ldots + c)}}$$

peut se résoudre aussi en observant que l'on a

$$y^n = \frac{(X_p)^n}{a^n x^{mn} + b x^{mn-1} \ldots + c},$$

et il est clair que l'on pourra résoudre de la même manière les équations de la forme

$$y = \frac{X_p}{\sqrt[r]{(X_{ar})}} \left(A + A_1 \frac{X_s}{X_t} + A_2 \left(\frac{X_s}{X_t}\right)^2 + \text{etc.}\right),$$

pourvu que l'on ait $s > t$, et que le rappport de deux coefficiens consé-

cutifs quelconques, de la série comprise dans le second membre, ne puisse jamais devenir infini.

L'équation (63.) renferme la suivante

$$A^2x^2 = a^2y^{2m} + by^{2m-1} \ldots + py + q,$$

qui sert à trouver la résolution complète, en nombres entiers, de l'équation

64. $x^2(ay^n+by^{n-1}\ldots+cy+d)+x(ey^r+fy^{r-1}\ldots+gy+h)+iy^m+ky^{m-1}\ldots+l=0,$

lorsque $2r > n+m$, et lorsque $2r$ étant moindre que $n+m$ on peut faire en nombres entiers $-aiy^{m+n} = p^2y^{2s}$. En effet, en résolvant l'équation (64.) par rapport à x, on trouve

$$2x(ay^n+by^{n-1}\ldots+cy+d)+ey^r+fy^{r-1}\ldots+gy+h = \sqrt{((ey^r+fy^{r-1}\ldots+gy+h)^2-4(ay^n+by^{n-1}\ldots+cy+d)(iy^m+ky^{m-1}\ldots+l))},$$

et puisque le premier membre de cette équation est un nombre entier, le second devra l'être aussi, et il faudra résoudre en nombres entiers l'équation

$$(ey^r+fy^{r-1}\ldots+gy+h)^2-4(ay^n+by^{n-1}\ldots+cy+d)(iy^m+ky^{m-1}\ldots+l)=z^2,$$

ce qu'on pourra toujours faire par notre méthode lorsque on aura $2r>n+m$, et lorsque on aura $2r<n+m$ et $-iay^{n+m}=p^2y^{2s}$. Il faut observer ici que puisque de l'équation

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

on déduit

$$2Ax+B=\pm\sqrt{(B^2-4AC)},$$

la résolution (64.) dérive, dans le cas de $2r>n+m$, de la forme des racines des équations du second degré qui admettent sous le radical le coefficient B élevé au carré, sans qu'il soit nécessaire de satisfaire à aucune autre condition; tandis que dans l'autre cas il faut satisfaire en nombres entiers aux équations $-ia=p^2$, $m+n=2s$. Lorsque $2r<n+m$, et que le produit ia est positif, on pourra toujours avoir toutes les solutions positives de l'équation (64.); tandis qui si le produit ia est négatif, on pourra avoir toutes les solutions négatives de la même équation. Mais si l'on a $2r<n+m$, $m+n=2s$, et que le produit ai soit positif, on pourra résoudre complètement l'équation (64.). Et l'on voit que toutes les conditions précédentes ne regardent que les termes qui, dans les coefficiens des diverses puissances de x comprises dans l'équation (64.), contiennent les plus grandes puissances de y.

Soit proposé maintenant de résoudre en nombres entiers l'équation du troisième degré à deux inconnues

$$65. \quad Y_r x^3 + Y_n x + Y_m = 0,$$

dans laquelle on a

$$Y_r = a y^r + a_1 y^{r-1} \dots + a_r,$$
$$Y_n = b y^n + b_1 y^{n-1} \dots + b_n,$$
$$Y_m = c y^m + c_1 y^{m-1} \dots + c_m,$$

si l'on cherche les trois racines de l'équation (65.), on aura par les formules connues

$$= \sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} + \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} - \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)},$$

$$= \sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} + \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} - \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right),$$

$$= \sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} + \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)}\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + \sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} - \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right),$$

et si l'on suppose que l'on ait (abstraction faite des signes)

$$\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} > \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3},$$

on pourra développer en série le radical

$$\sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)},$$

par les puissances ascendantes de $\frac{Y_n}{3Y_r}$, et l'on obtiendra la série convergente

$$\frac{Y_m}{2Y_r} + \left(\frac{(Y_n)^3}{2.27(Y_r)^3}\right)\left(\frac{2Y_r}{Y_m}\right) \dots + \text{etc.},$$

qui, étant substituée dans la formule

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} + \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_m)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)},$$

donnera

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} + \frac{Y_m}{2Y_r} + \left(\frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)\left(\frac{Y_r}{Y_m}\right) + \text{etc.}\right)} = \sqrt[3]{\left(\left(\frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)\left(\frac{Y_r}{Y_m}\right) + \text{etc.}\right)}$$

et l'on voit que si l'on peut satisfaire à l'équation $\frac{a}{c} = u^3$, en nombres rationnels, et à l'équation $r - m = 3s$ en nombres entiers, on pourra extraire la racine cubique de la quantité $\frac{Y_r}{Y_m}$; de même si l'on substitue la valeur du radical

$$\sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_r)^3}{27(Y_r)^3}\right)},$$

dans la formule

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2Y_r} - \sqrt{\left(\frac{(Y_m)^2}{4(Y_r)^2} + \frac{(Y_n)^3}{27(Y_r)^3}\right)}\right)},$$

on trouvera

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{2\,Y_r}-\frac{Y_m}{2\,Y_r}-\left(\frac{(Y_n)^3)}{27(Y_r)^3}\right)\left(\frac{Y_r}{Y_m}\right)-\text{etc.}\right)}=\sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{Y_r}-\text{etc.}\right)},$$

et si l'on pourra faire

$$\frac{Y_m}{Y_r}=A^3y^{3t}+By^{3t-1}+\text{etc.},$$

il est clair que l'on pourra extraire la racine cubique de la quantité

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{Y_m}{Y_r}+\text{etc.}\right)},$$

et l'on voit que l'on trouvera les mêmes conditions que nous avons déjà obtenues, c'est à dire l'équation $\frac{a}{c}=u^3$, qui devra être résoluble en nombres rationnels, et l'équation $r-m=3s$ que l'on devra résoudre en nombres entiers.

Il résulte de l'analyse précédente, que lorsqu'en donnant à y des valeurs qui ne sont pas comprises entre deux limites données L et L_1, on peut satisfaire (abstraction faite des signes) à l'inégalité

$$\frac{Y_r(Y_m)^2}{(Y_n)^3}>\frac{4}{27},$$

il sera toujours possible de trouver toutes les solutions entières de l'équation (65.), si l'on peut résoudre l'équation $\frac{a}{c}=u^3$, en nombres rationnels, et l'équation $r-m=3s$, en nombres entiers. En effet les valeurs de y qui ne se trouveront pas parmi les nombres entiers compris entre L et L_1, fourniront une équation de la forme

$$Dx=Ay^s+By^{s-1}\ldots.+C+\frac{\delta}{\delta_1},$$

dans laquelle on pourra réduire la fraction $\frac{\delta}{\delta_1}$ (qui est une fonction de y) aussi petite que l'on voudra, en prenant pour y des nombres entiers qui ne se trouvent pas compris entre deux nouvelles limites l, l_1; et partant il faudra donner à y des valeurs entières comprises entre ces limites l, l_1, ou bien l'on aura l'équation

$$Dx=Ay^s+By^{s-1}\ldots.+C,$$

qui devra exister en même tems que l'équation (65.); et dans les deux cas on pourra trouver toutes les solutions entières de l'équation proposée, par la méthode que nous avons exposée précédemment.

Si en donnant à y des valeurs non comprises entre deux limites finies l et l_1, l'on avait (abstraction faite des signes)

$$\frac{Y_r (Y_m)^2}{(Y_n)^3} < \frac{4}{27},$$

on trouverait aisément (par une analyse semblable à celle dont nous venons de faire usage) que pour résoudre complètement dans ce cas par notre méthode l'équation (65.), il faudrait pouvoir résoudre l'équation $\frac{b}{a} = u^2$, en nombres rationnels, et l'équation $n - r = 2s$, en nombres entiers.

On pourrait appliquer les mêmes principes aux équations qui sont du quatrième degré par rapport à l'une des inconnues; mais dans ce cas les calculs qu'il faudrait effectuer deviendraient très-longs, et d'ailleurs passé le quatrième degré l'on se trouverait arrêté par l'impossibilité de résoudre les équations algébriques des degrés supérieurs. Nous allons reprendre maintenant cette théorie dans toute sa généralité, à l'aide du théorème de **Lagrange** qui sert à exprimer en séries les racines des équations algébriques, et nous exposerons avec plus de détail ce que nous avons à peine indiqué dans l'analyse précédente.

Etant proposée l'équation

$$66. \quad a - bx + cx^n = 0,$$

on sait, par le théorème de **Lagrange**, que lorsqu'on a (abstraction faite des signes)

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

une des racines de cette équation sera exprimée par la série convergente

$$67. \quad \frac{a}{b}\left(1 + \frac{ca^{n-1}}{b^n} + \frac{2nc^2a^{2n-2}}{2.b^{2n}} + \frac{3n(3n-2)c^3a^{3n-3}}{2.3.b^{3n}} + \text{etc.}\right),$$

et les autres $n-1$ racines seront données par la série convergente

$$68. \quad r\left(1 - \frac{a}{(n-1)br} - \frac{na^2}{2(n-1)^2b^2r^2} - \frac{(n-1)2na^3}{2.3(n-1)^3b^3r^3} - \text{etc.}\right),$$

dans laquelle il faut substituer pour r successivement les $n-1$ racines de l'équation

$$z^{n-1} - \frac{b}{c} = 0.$$

Lorsqu'on a (abstraction faite des signes)

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

les n racines de l'équation proposée seront exprimées par la série convergente

$$69. \quad r\left(1 - \frac{br}{na} + \frac{(3-n)b^2r^2}{2.n^2a^2} - \frac{(4-n)(4-2n)b^3r^3}{2.3.n^3a^3} + \text{etc.}\right),$$

dans laquelle il faudra substituer pour r successivement les n racines de l'équation

$$z^n + \frac{a}{c} = 0.$$

Il résulte de là, que lorsque (abstraction faite des signes) l'on a

$$\frac{c\,a^{n-1}}{b^n} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

l'équation (66.) aura autant de racines réelles qu'il y en a dans les deux équations

$$b z - a = 0, \quad c z^{n-1} - b = 0,$$

et que lorsque (abstraction faite des signes) on a

$$\frac{c\,a^{n-1}}{b^n} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

il y aura autant de racines réelles qu'il y en a dans l'équation

$$c z^n + a = 0.$$

Maintenant si l'on suppose

$$a = \pm\alpha, \quad b = -\beta, \quad c = \gamma,$$

(α, β, γ, étant trois quantités positives) et si l'on prend pour n un nombre impair quelconque, on aura les deux équations

$$\gamma z^{n-1} + \beta = 0, \quad \gamma z^n - \alpha = 0,$$

dont la première aura toutes ses racines imaginaires, tandis que la seconde n'aura qu'une seule racine réelle; et par conséquent l'équation

$$70. \quad \gamma x^n + \beta x - \alpha = 0,$$

(dans laquelle α, β, γ, sont trois quantités positives) aura toujours une seule racine réelle, quelle que soit la valeur des coefficiens α, β, γ.

A présent si dans l'équation (70.) on fait, par exemple,

$$\alpha = p y^{mn} + q, \quad \beta = r y^{mn-2} + s, \quad \gamma = t,$$

(p, r, t, étant trois quantités positives) on aura, après les substitutions,

$$71. \quad p y^{mn} + q = (r y^{mn-2} + s) x + t x^n,$$

et par suite (abstraction faite des signes) la quantité

$$\frac{c\,a^{n-1}}{b^n} = \frac{\gamma(-\alpha)^{n-1}}{(-\beta)^n} = \frac{t(-p y^{mn} - q)^{n-1}}{(-r y^{mn-2} - s)^n}$$

sera plus grande ou plus petite que $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$, selon le rapport de m à n.

Soit $nm > 2n$, alors on pourra trouver deux limites L et L_1 de y telles qu'en prenant pour y des nombres entiers quelconques qui ne soient pas compris entre ces limites, on ait toujours (abstraction faite des signes)

$$72. \quad \frac{t(-p y^{mn} - q)^{n-1}}{(-r y^{mn-2} - s)^n} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Lorsque cette inégalité est satisfaite, pour trouver toutes les valeurs de x qui résolvent l'équation (71.), il faudra faire usage des deux séries (67.), (68.); et en substituant dans la première de ces séries les valeurs

$$a = -\alpha = -py^{mn} - q, \quad b = -\beta = -ry^{mn-2} - s, \quad c = \gamma = t,$$

on aura

$$73. \quad x = \left(\frac{py^{mn}+q}{ry^{mn-2}+s}\right)\left\{\begin{aligned}1 &+ \frac{t(-py^{mn}-q)^{n-1}}{(-ry^{mn-2}-s)^n} + \frac{2nt^2(-py^{mn}-q)^{2n-2}}{2(-ry^{mn-2}-s)^{2n}} \\ &+ \frac{3n(3n-2)t^3(-py^{mn}-q)^{3n-3}}{2.3(-ry^{mn-2}-s)^{3n}} \ldots + \text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Mais comme par hypothèse l'on a $mn > 2n$, ou bien $m > 2$, et que chaque terme de la série précédente peut se réduire aussi petit que l'on voudra en donnant à y des valeurs entières qui ne soient pas comprises entre deux limites L, L_1, facilement assignables, on aura toujours (lorsque y n'est pas compris entre ces limites) une équation de la forme

$$Nx = Ay^2 + By + C + \frac{\delta}{\delta_1},$$

dans laquelle N, A, B, C, sont des nombres entiers, et $\frac{\delta}{\delta_1}$ est une fraction plus petite que l'unité; d'où l'on déduira l'équation

$$Nx = Ay^2 + By + C,$$

qui devra exister en même tems que l'équation (71.), et qui servira à trouver toutes les valeurs de y non comprises entre les limites L, L_1; mais comme d'ailleurs les valeurs de y comprises entre ces limites peuvent se trouver séparément, l'équation (71.) sera résolue complètement quant à la série (67.); et si l'on suppose que les coefficiens de l'équation (71.) restent toujours positifs, quelle que soit la valeur de y, il est clair que l'équation (71) ne fournira qu'une seule racine réelle pour x, qui sera représentée par l'équation (73.); ainsi dans ce cas l'équation (71.) sera résolue complètement, pourvu que l'inégalité (72.) soit satisfaite.

Si les coefficiens de l'équation (71.) ne sont positifs, que pour des valeurs de y comprises entre les limites L, L_1, on pourra, par l'analyse précédente, trouver toutes les solutions de cette équation qui correspondent à des valeurs entières de y comprises entre L et L_1.

Il est clair que si l'équation

$$py^{mn} + q = (ry^{mn-2} + s)x + tx^n,$$

est résoluble par la méthode que nous venons d'exposer, on pourra résoudre aussi l'équation plus générale

$$74. \quad py^{mn} + p_1 y^{mn-1} + p_2 y^{mn-2} \ldots + q_1 y + q = (ry^{mn-2} + r_1 y^{mn-3} \ldots + s_1 y + s)x + tx^n,$$

dans laquelle les coefficiens

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ q_1,\ q,\ r,\ r_1\ \ldots\ s_1,\ s,\ t,$$

sont des nombres rationnels quelconques. En effet l'on pourra toujours, dans chaque coefficient de x, rendre le terme qui contient la puissance la plus élevée de y plus grand que la somme de tous les autres, et alors les conditions d'inégalité ne porteront que sur les termes qui contiennent ces plus grandes puissances; et comme les autres conditions ne regardent que ces termes, il en résulte que si l'équation (71.) est résoluble, l'équation (74.) sera résoluble aussi.

Si au lieu de l'équation (74.), on voulait résoudre en nombres entiers l'équation plus générale

$$ay^{mn}+by^{mn-1}+cy^{mn-2}\ldots+d=(ey^{mn-p}+fy^{mn-p-1}\ \ldots+g)x+hx^n,$$

dans laquelle les coefficiens e, h, sont positifs, il suffirait d'avoir $m>p$, pour en obtenir toutes les solutions entières, ou du moins toutes les solutions entières positives, par notre méthode.

En général étant proposée l'équation à coefficiens rationnels

$$ay^n+by^{n-1}\ldots+cy+d+(ey^p+fy^{p-1}\ldots+g)x+hx^m,$$

on pourra, par la méthode que nous avons exposée, trouver toutes ses solutions entières pourvu que le produit eh reste toujours positif et que l'on ait (abstraction faite des signes)

$$\frac{h(ay^n+by^{n-1}\ldots+d)^{m-1}}{(ey^p+fy^{p-1}\ldots+g)^m}<\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}.$$

Ainsi par exemple on pourra toujours trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$ay^7+by^6+cy^5+dy^4+ey^3+fy^2+gy+h$$
$$=x(iy^6+ky^5+ly^4+my^3+ny^2+py+q)+rx^5,$$

pourvu que le produit ir soit positif.

Lorsque dans l'équation (70.) le coefficient β est négatif, l'équation

$$\gamma z^{n-1}+\beta=0,$$

aura deux racines réelles, et alors si la condition

$$\frac{\gamma\alpha^{n-1}}{\beta^n}<\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

est satisfaite (abstraction faite des signes) outre la série (67.), il faudra considérer la série (68.), qui fournira deux nouvelles racines réelles de l'équation (70.), en y substituant les valeurs des coefficiens. Mais afin que notre méthode puisse s'appliquer à la série (68.), il faudra que l'on ait

$$\frac{\beta}{\gamma} = -(a^{n-1}y^{mn-m} + by^{mn-m-1} \ldots + \text{etc.}),$$

car alors l'équation

$$z^{n-1} + \frac{\beta}{\gamma} = 0,$$

donnera les deux valeurs réelles

$$z = \pm(ay^m + by^{m-1} + \text{etc.}),$$

et ces deux valeurs étant combinées avec la série (68.), fourniront toutes les solutions entières de l'équation proposée.

Si l'on a, dans l'équation

$$a - bx + cx^n = 0,$$

(abstraction faite des signes)

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

on ne pourra plus faire usage des deux séries (67.) et (68.) pour obtenir les valeurs de x, car dans ce cas ces deux séries deviendraient divergentes: alors il faudra recourir à la série (69.) qui renferme le radical $\left(\frac{-a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}$, et il est clair que l'équation proposée aura une ou deux racines réelles selon que le nombre n sera impair ou pair; en observant cependant que lorsque n sera pair, et que la fraction $\frac{a}{c}$ sera positive, l'équation $a - bx + cx^n = 0$, n'aura aucune racine réelle, tant que l'inégalité précédente sera satisfaite.

Maintenant si l'on suppose que les coefficiens a, b, c soient des fonctions de y, il faudra, pour appliquer les principes que nous avons exposés précédemment, que l'on ait toujours

$$\frac{ca^{n-1}}{b^n} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

et ensuite

$$-\frac{a}{c} = -\frac{dy^{mn} + ey^{mn-1} \ldots + py + q}{c} = g^n y^{mn} + hy^{mn-1} + \text{etc.},$$

car alors on trouvera

$$\sqrt[n]{\left(\frac{-a}{c}\right)} = gy^m + ky^{m-1} + ly^{m-2} \ldots + \text{etc.},$$

et en substituant cette valeur dans la série (69.), on parviendra aisément à la résolution complète en nombres entiers de l'équation proposée.

En général étant proposée l'équation à deux inconnues

75. $$\left.\begin{matrix} x^n(ay^m + by^{m-1} \ldots + cy + d) + (ey^r + fy^{r-1} \ldots + hy + i)x \\ -(ky^p + ly^{p-1} \ldots qy + s) \end{matrix}\right\} = 0,$$

on pourra toujours la résoudre complètement en nombres entiers dans les cas suivans.

1°. Lorsque n étant un nombre impair, et les deux termes ay^m, ey^r, ayant le même signe, on peut trouver deux limites finies L, L_1, telles, qu'en prenant pour y des valeurs entières qui ne soient pas comprises entre ces limites, on ait toujours (abstraction faite des signes)

$$76.\quad \frac{a\,k^{n-1}\,y^{m+pn-p}}{e^n\,y^{rn}} < \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

2°. L'équation (75.) sera résolue complètement lorsque (n étant un nombre entier quelconque, et l'inégalité (76.) étant satisfaite, mais les deux termes ay^m, ey^r, n'ayant pas le même signe) on pourra résoudre l'équation $\frac{e}{a} = u^{n-1}$, en nombres rationnels, et l'équation $r - m = (n-1)z$, en nombres entiers.

3°. L'équation (75.) pourra être résolue complètement en nombres entiers, (quels que soient les signes des termes ay^m, ey^r,) lorsqu'il sera possible de trouver deux limites finies L, L_1, telles qu'en prenant pour y des valeurs entières non comprises entre ces limites, on ait toujours

$$77.\quad \frac{a\,k^{n-1}\,y^{m+np-p}}{e^n\,y^{rn}} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

et que l'on pourra résoudre l'équation $\frac{k}{a} = u^n$, en nombres rationnels, et l'équation $p - m = nz$, en nombres entiers.

4°. Lorsque l'inégalité (77.) étant toujours satisfaite, l'exposant n sera un nombre pair, et les deux termes ky^p, ay^m, auront des signes différens, on pourra trouver toutes les solutions entières de l'équation (75.).

Il faut observer ici que souvent les conditions précédentes ne sont satisfaites, dans l'équation (75.), qu'entre des limites données des inconnues; alors au lieu de trouver toutes les solutions entières de l'équation proposée, on aura seulement, par notre méthode, les solutions comprises entre deux limites connues. Ainsi, par exemple, quelquefois on trouvera toutes les solutions positives de l'équation (75.), sans que l'on puisse obtenir les solutions négatives.

Si dans l'équation (75.) on fait $n = 2$, et si l'on suppose que l'inégalité (76.), qui dans le cas actuel se réduit à celle ci

$$4\,a\,k\,y^{m+p} < e^2\,y^{2r},$$

soit toujours satisfaite en donnant à y des valeurs non comprises entre deux limites finies L, L_1, il est clair que l'on pourra résoudre complète-

ment l'équation proposée à l'aide des deux séries (67.) et (68.), car la seconde n'aura, dans le cas de $n=2$, qu'une seule valeur qui sera toujours rationnelle.

Lorsque l'on a, au contraire (abstraction faite des signes)

$$4akY^{m+p} > e^2 y^{2r},$$

en donnant à y des valeurs quelconques non comprises entre deux limites finies l, l_1, il faudra faire usage de la série (69.), et afin qu'elle ne contienne aucun terme irrationnel, on devra pouvoir résoudre l'équation $\frac{k}{a}=z^2$, en nombres rationnels, et l'équation $p-m=2s$, en nombres entiers. Il est clair que ces deux équations se réduisent aux deux suivantes $ak=u^2$, $p+m=2t$, qui sont celles que nous avons déjà obtenues.

Les deux équations précédentes doivent être résolubles dans le cas que le terme aky^{m+p} soit positif, mais lorsqu'il est négatif, et que l'on a

$$4aky^{m+p} > e^2 y^{2r},$$

la série (69.) aura deux valeurs imaginaires; et partant les valeurs de x qui correspondent à des valeurs de y non comprises entre des limites finies L, L_1, seront toujours imaginaires; mais comme les valeurs entières de y comprises entre ces limites, se déterminent aisément, on aura résolu complètement l'équation proposée, sans qu'il soit nécessaire de satisfaire aux deux conditions que nous avons trouvées précédemment.

Soit maintenant $n=3$ dans l'équation (75.), et supposons que l'inégalité (76.) soit satisfaite, dans le cas actuel elle se réduira à l'autre

$$\frac{ak^3 y^{m+2p}}{e^3 y^{3r}} < \frac{4}{27},$$

et il faudra faire usage des deux séries (67.) et (68.), pour obtenir les valeurs entières de x qui résolvent l'équation proposée. A présent si dans la série (67.), on substitue les valeurs des coefficiens de l'équation (75.), on aura une série convergente qui fournira, à l'aide de notre méthode, toutes les solutions entières de l'équation (75.) qui correspondent à l'une des formes des racines. Pour obtenir toutes les autres solutions entières, il faut considérer les valeurs de x fournies par la série (68.); et comme celle-ci, lorsque $n=2$, contient le radical $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$ qui, pour l'équation (75.), se transforme dans l'autre

$$78. \quad \left(-\frac{ey^r+fy^{r-1}\ldots\ldots+i}{ay^m+by^{m-1}\ldots\ldots+d}\right)^{\frac{1}{2}},$$

il faudra, pour y appliquer notre méthode, que l'on ait l'équation $-\frac{e}{a}=u^2$,

en nombres rationnels, et l'équation $r-m=2s$, en nombres entiers, et l'on voit que dans ce cas l'équation (75.) sera résolue complètement. Mais si la quantité comprise entre les crochets dans le radical (78.) demeure toujours négative, pour des valeurs quelconques de y non comprises entre deux limites finies L, L_1, il est clair que le radical (78.) deviendra imaginaire dans les mêmes circonstances; alors la série (68.) ne donnera que des valeurs imaginaires de x, excepté pour des valeurs entières de y comprises entre les limites L, L_1, valeurs que l'on considérera séparément. Ainsi dans ce cas l'équation (75.) sera résolue complètement à l'aide de la série (67.), pourvu que l'inégalité

$$27\,a\,k^2 y^{m+2p} < 4\,e^3 y^{3r}$$

soit satisfaite, et sans qu'il soit nécessaire de vérifier aucune autre condition.

Si l'on avait au contraire

$$27\,a\,k^2\,y^{m+2p} > 4\,e^3\,y^{3r},$$

il faudrait recourir à la série (69.), et comme celle-ci contient le radical $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$ qui, pour l'équation (75.), devient

$$-\left(\frac{ky^p+l\,y^{p-1}\ldots+s}{ay^m+by^{m-1}\ldots+d}\right)^{\frac{1}{3}},$$

on devra, afin que notre méthode soit applicable, pouvoir résoudre l'équation $\frac{k}{a}=u^3$, en nombres rationnels, et l'équation $p-m=3s$, en nombres entiers; et si ces deux conditions sont satisfaites, l'équation (75.) sera résolue complètement.

L'analyse précédente montre qu'en appliquant la série de Lagrange aux équations indéterminées qui sont du second ou du troisième degré par rapport à l'une des inconnues, on rencontre les mêmes conditions que la forme des racines nous avait fait découvrir, et que même l'on trouve de nouveaux cas de solution. En appliquant notre méthode aux équations des degrés supérieurs, on trouve la résolution complète d'un grand nombre d'équations indéterminées, qu'on n'aurait pu traiter d'aucune manière par les méthodes connues.

Si au lieu de l'équation (66.) on avait l'autre

$$a-bx^m+cx^{m+n}=0,$$

on sait que la série (67.) contiendrait le radical $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$, et alors si a, b, c, étaient des fonctions de y, la première série aussi fournirait deux équa-

tions de condition de la forme

$$\frac{k}{e} = u^m, \quad p - r = ms,$$

dont la première devrait être résoluble en nombres rationnels, et la seconde en nombres entiers; et il est clair que ces équations deviennent identiques dans le cas de $m = 1$.

En général étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$a + bx + cx^2 \ldots + dx^n = 0,$$

dans laquelle les coefficiens $a, b, c, \ldots d$, sont des polynomes en y entiers et rationnels, à coefficiens rationnels, on réduira d'abord tous ces coefficiens au dénominateur commun, et puis on les multipliera par ce dénominateur pour les rendre tous entiers; ensuite on cherchera par le théorème de Lagrange les diverses séries qui représentent les n valeurs de x, et l'on trouvera toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les termes qui dans les coefficiens $a, b, c, \ldots d$, contiennent les plus grandes puissances de y, afin que l'équation proposée soit résoluble par notre méthode, en observant que lorsque ces conditions, qui regardent les termes contenant les plus grandes puissances de y, seront satisfaites dans une équation donnée, on pourra changer d'une manière quelconque les autres termes, qui ne contiennent pas les plus grandes puissances de y, et toutes les équations que l'on obtiendra de cette manière seront toujours résolubles.

Pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$F(x, y) = 0,$$

(dans laquelle $F(x, y)$ exprime une fonction quelconque entière et rationnelles des inconnues x et y, à coefficiens rationnels) il peut être utile de considérer quelques puissances de l'une des inconnues comme des coefficiens algébriques; de cette manière on réduit l'équation proposée à une autre plus simple, et lorsqu'en résolvant cette nouvelle équation par la série de Lagrange, notre méthode est encore applicable, on obtiendra la résolution complète de l'équation proposée. On pourrait aussi dans plusieurs cas résoudre complètement de la même manière des équations contenant trois ou un plus grand nombre d'inconnues; mais ces recherches exigeraient de trop longs développemens, et ne sauraient trouver place ici.

En général au lieu de chercher par le théorème de Lagrange l'expression en série des racines de l'équation proposée, ont peut chercher le développement d'une fonction quelconque des inconnues. Ainsi, par exemple, étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$\varphi(x, y) = 0,$$

si l'on peut trouver une fonction entière $F(x, y)$ des mêmes inconnues telle, qu'étant développée par les puissances descendantes d'une autre fonction entière $f(x, y)$ de cette manière

$$F(x, y) = B + \frac{B_1}{f(x, y)} + \frac{B_2}{(f(x, y))^2} \dots + \text{ etc.},$$

le rapport de deux coefficiens consécutifs demeure toujours positif, et ne puisse jamais atteindre une limite entière A, on trouvera $2B$ pour la limite de $F(x, y)$, lorsqu'on donnera à la fonction $f(x, y)$, une valeur égale ou plus grande que $2A$; alors en éliminant une des inconnues entre l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et l'une quelconque des suivantes

$$F(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 1, \quad F(x, y) = 2, \quad \dots, \quad F(x, y) = 2B - 1,$$

ou bien entre la même équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et l'une des suivantes

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 1, \quad f(x, y) = 2, \quad \dots, \quad f(x, y) = 2A - 1,$$

on aura un nombre $2(A + B)$ d'équations à une seule inconnue, dont les racines entières exprimeront toutes les solutions entières de l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

Nous avons supposé que tous les coefficiens B, B_1, B_2, ... etc., avaient le même signe; mais s'ils avaient des signes alternatifs, en fesant $f(x, y) > 2A$, on n'aurait plus $F(x, y) < 2B$. Cependant en fesant $f(x, y) > AB$, la valeur de $F(x, y)$ serait toujours comprise entre B et $B - 1$, et l'on serait assuré qu'il faudrait avoir en même tems

$$F(x, y) = B, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

ou bien l'équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

devrait exister en même tems que l'une des suivantes

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 1, \quad f(x, y) = 2, \quad \dots \quad f(x, y) = AB,$$

et l'équation proposée serait résolue complètement.

L'esprit de la méthode que nous avons exposée dans ce mémoire consiste en ceci, qu'étant proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$F(x, y) = 0,$$

on devra chercher une fonction entière des inconnues $f(x, y)$, telle que l'on ait l'équation

$$79. \quad f(x, y) = f_1(x, y) + \frac{\delta}{\delta_1},$$

dans laquelle $f_1(x, y)$ est aussi une fonction entière de x et y, et δ, δ_1, sont deux fonctions des mêmes inconnues, telles qu'en prenant en même tems (abstraction faite des signes) pour x des valeurs entières non comprises entre les deux limites finies $+L$ et $-L$, et pour y des valeurs entières non comprises entre les deux limites finies $+L$ et $-L_1$, on ait toujours (abstraction faite des signes) $\frac{\delta}{\delta_1} < 1$.

Maintenant il est clair qu'en prenant en même tems pour x des valeurs non comprises entre $+L$ et $-L$, et pour y des valeurs non comprises entre $+L_1$ et $-L_1$, l'équation (79.) se réduira à l'autre

$$80. \quad f(x, y) = f_1(x, y),$$

qui devra exister en même tems que l'équation $F(x, y) = 0$, et qui donnera, par l'élimination, toutes les solutions de l'équation proposée, non comprises en même tems entre les limites trouvées précédemment. Mais si les deux inconnues x et y, n'étaient pas comprises à la fois entre ces limites, l'équation (80.) n'aurait plus lieu; cependant alors comme l'on devrait avoir (abstraction faite des signes) $x < \pm L$, ou $y < \pm L_1$, on poserait les équations

$$x = 0, \quad x = \pm 1, \quad x = \pm 2, \; \ldots \; x = \pm(L-1),$$

ou bien les autres

$$y = 0, \quad y = \pm 1, \quad y = \pm 2, \; \ldots \; y = \pm(L_1 - 1),$$

et on pourrait éliminer une inconnue entre l'une quelconque de ces équations, et l'équation

$$F(x, y) = 0,$$

qui serait de cette manière résolue complètement, puisqu'ayant trouvé d'abord les valeurs entières de x non comprises entre les limites $-L$ et $+L$, et les valeurs entières de y non comprises entre les limites $-L_1$

et $+L_1$, et puis les solutions comprises entre ces limites, on aura toutes les solutions entières possibles de l'équation proposée.

Les méthodes que nous avons exposées dans le mémoire précédent et dans celui-ci, contiennent les premiers élémens d'une théorie générale sur la résolution complète des équations indéterminées qui ont un nombre fini de solutions entières. Cette théorie présente de grandes difficultés lorsqu'on veut l'appliquer aux cas particuliers, et demande des recherches fort laborieuses qui ne sauraient trouver place ici, mais que nous esperons pouvoir exposer dans une autre circonstance.

27.

De resolutione algebraica aequationis $X^{257}=1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata.

(Cont. Diss. Vol. IX. Fasc. 1., 2. et 3.)

(Auct. *Richelot*, Doct. phil. Regiom.)

XII.

Transeamus ad hoc ultimum negotium, nimirum ad valores functionum f ex functionibus F determinandos. Numerus functionum f est $=128$, inter quas una est determinata semper eadem:

$$f_{128} = p_0 + p_1 + p_2 + \text{etc.} \quad + p_{127} = f_{128m} = -1.$$

Iam vero ad ceteras 127 determinandas functiones f, inter eas ipsas hanc aequationem generalem constare, clarum est:

$$f_x \cdot f_x = F^x R^x, f_{2x} = F_x \cdot f_{2x},$$

si loco ipsius $F^x R^x$ signum hoc F_x introducitur brevitatis causa. Ibi pro x sensim numeris 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 substitutis, oriuntur hae aequationes:

$$26. \quad \begin{cases} f_1^2 = F_1 \cdot f_2, & f_2^2 = F_2 \cdot f_4, & f_4^2 = F_4 \cdot f_8, & f_8^2 = F_8 \cdot f_{16}, \\ f_{16}^2 = F_{16} \cdot f_{32}, & f_{32}^2 = F_{32} \cdot f_{64}, & f_{64}^2 = F_{64} \cdot f_{128}, & f_{128}^2 = F_{128} \cdot f_{128}. \end{cases}$$

His vero aequationibus adhibitis fit

$$27. \quad f_1^{128} = (F_1)^{64} \cdot (F_2)^{32} \cdot (F_4)^{16} \cdot (F_8)^8 \cdot (F_{16})^4 \cdot (F_{32})^2 \cdot F_{64} \cdot F_{128}.$$

Quae aequatio centisimi vigesimi octavi ordinis totidem secum fert valores quantitatis determinandae f_1 tales:

$$z, \quad zR, \quad zR^2, \quad zR^3, \quad \text{etc.} \quad zR^{127},$$

si z est una positiva realis radix aequationis (27.), sive:

$$z = \sqrt[128]{(F_1^{64} \cdot F_2^{32} \cdot F_4^{16} \cdot F_8^{8} \cdot F_{16}^{4} \cdot F_{32}^{2} \cdot F_{64} \cdot F_{128})}.$$

Sed functionem f_1 128 valoribus diversis uti debere, ex initio articuli huius facile intelligitur. Ibi invenitur:

$$f_1 = p_0 + p_1 R + p_1 R^2 + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127},$$

ubi quantitates

$$p_0, \; p_1, \; p_2, \; \text{etc.} \quad = [2, 1], \; = [2, 3], \; = [2, 3^2], \; \text{etc.}$$

adhuc in 128 suppositionibus stare potuerunt, prout fuit:

$$\sigma = \cos\frac{2\pi}{257} \pm i\sin\frac{2\pi}{257},\quad \text{vel} = \cos\frac{4\pi}{257} \pm i\sin\frac{4\pi}{257},\quad \text{etc.}$$
$$\text{vel} = \cos\frac{256\pi}{257} \pm i\sin\frac{256\pi}{257},$$

quippe quorum 128 valorum, σ indeterminatum quemlibet habente, etiam quinam 128 suorum valorum functioni f_1 tribuatur, prorsus arbitrio nostro permitti posse, concluditur.

Ponamus igitur $f_1 = z$. Inde derivantur, aequationibus (26.) rursus adhibitis, nec non theorematibus (6.) et (7.) revocatis:

$$28.\quad \begin{cases} f_1 = \sqrt[128]{(F_1^{64}.F_2^{32}.F_4^{16}.F_8^{8}.F_{16}^{4}.F_{32}^{2}.257)}, \\ f_2 = \frac{f_1^2}{F_1} = \sqrt[64]{(F_2^{32}.F_4^{16}.F_8^{8}.F_{16}^{4}.F_{32}^{2}.257)}, \\ f_4 = \frac{f_2^2}{F_2} = \sqrt[32]{(F_4^{16}.F_8^{8}.F_{16}^{4}.F_{32}^{2}.257)}, \\ f_8 = \frac{f_4^2}{F_4} = \sqrt[16]{(F_8^{8}.F_{16}^{4}.F_{32}^{2}.257)}, \\ f_{16} = \frac{f_8^2}{F_8} = \sqrt[8]{(F_{16}^{4}.F_{32}^{2}.257)}, \\ f_{32} = \frac{f_{16}^2}{F_{16}} = \sqrt[4]{(F_{32}.257)}, \\ f_{64} = \frac{f_{32}^2}{F_{32}} = \sqrt[2]{(257)}, \\ f_{128} = \frac{f_{64}^2}{F_{64}} = -1, \end{cases}$$

ubi signum radicale $\sqrt[h]{a}$ semper unam realem positivam radicem aequationis $X^h = a$ significat.

Ut ceterae 120 functiones adhuc indeterminatae, definiantur, primum earum numerus quam minimus reddatur. Quam ob rem theoremate (19.) revocato:

$$f_x\, f_{128-x} = 257;$$

iam colligitur, nonnisi functiones f_3 usque ad f_{63} remanere determinandas.

In aequationibus (28.), prima excepta, R^{2n+1} loco ipsius R posito, invenimus has:

$$28'.\quad f_{2(2n+1)} = \frac{f^2_{(2n+1)}}{F_{(2n+1)}},\quad f_{4(2n+1)} = \frac{f^2_{2(2n+1)}}{F_{2(2n+1)}},\quad \text{etc.}$$

Functione igitur $f_{(2n+1)}$ determinata, omnes functionum formae $f_{2^h(2n+1)}$ sine ulla ambiguitate inde derivantur. Itaque reductus est numerus determinandarum functionum ad 31; nempe remanserunt functiones

$$f_3,\ f_5,\ f_7,\ f_9,\ \text{etc.}\quad f_{63}$$

determinandae.

Hae vero functiones, licet eadem ratione ac f_1 determinabiles, tamen non eidem arbitrio subiici possunt.

Ex aequatione (27.) enim quidem deduci potest, ubique R^{2n+1} pro R posito, haec:

28''. $f_{(2n+1)}^{128} = \{F_{(2n+1)}^{64} \cdot F_{2(2n+1)}^{32} \cdot F_{4(2n+1)}^{16} \cdot F_{8(2n+1)}^{8} \cdot F_{16(2n+1)}^{4} \cdot F_{32(2n+1)}^{2} \cdot F_{64(2n+1)} \cdot F_{128(2n+1)}\}$.

Tamen inter 128 valores functionis $f_{(2n+1)}$, hinc ortos, is est eligendus, qui cum suppositione antea de $f_{(1)}$ facta congruat; arbitrium enim inter valores functionum f, a quantitate σ dependens, ea nunc tali posita, qualis conditioni $f_1 = z$ satisfaciat, prorsus tollitur. Ad aliud igitur hic confugiendum fuit, artificium novum, nunc exponendum.

Determinentur enim functionum f_3, f_7, f_{15}, f_{31}, f_{63} potestates, adhibitis solis aequationibus (28.) et (19.). Exempli causa in aequat. (28.) pro R, R^3, R^6, R^{12}, R^{24}, R^{48} posito, habemus respective

$$f_3^2 = F_3 f_6,$$
$$f_6^2 = F_6 f_{12},$$
$$f_{12}^2 = F_{12} f_{24},$$
$$f_{24}^2 = F_{24} f_{48},$$
$$f_{48}^2 = F_{48} f_{96} = \frac{257 F_{48}}{f_{32}},$$

Inde derivatur;

$$f_3^{32} = \frac{F_3^{16} F_6^{8} F_{12}^{4} F_{24}^{2} F_{48}\ 257}{f_{32}}.$$

Similiter fiunt

$$f_7^{16} = \frac{F_7^{8} F_{14}^{4} F_{28}^{2} F_{56} \cdot 257}{f_{16}}, \qquad f_{31}^{4} = \frac{F_{31}^{2} F_{62} \cdot 257}{f_4},$$
$$f_{15}^{8} = \frac{F_{15}^{4} F_{30}^{2} F_{60} \cdot 257}{f_8}, \qquad f_{63}^{2} = \frac{F_{63} \cdot 257}{f_2}.$$

Ex his theorematibus coniunctis cum prima aequationum (28.) struantur hae quantitates:

$$29. \quad \begin{cases} \left(\frac{f_1 f_3}{f_4}\right)^{32} = \frac{F_1^{16} F_2^{8} \cdot F_3^{16} F_6^{8} F_{12}^{4} F_{24}^{2} F_{48}}{F_4^{12} F_8^{6} F_{16}^{3} F_{32}^{2}}, \\ \left(\frac{f_1 f_7}{f_8}\right)^{16} = \frac{F_1^{8} F_2^{4} F_4^{2} F_7^{8} F_{14}^{4} F_{28}^{2} F_{56}}{F_8^{7} F_{16}^{4} F_{32}^{2}}, \\ \left(\frac{f_1 f_{15}}{f_{16}}\right)^{8} = \frac{F_1^{4} F_2^{2} F_4 \cdot F_{15}^{4} F_{30}^{2} F_{60}}{F_{16}^{4} F_{32}^{2}}, \\ \left(\frac{f_1 f_{31}}{f_{32}}\right)^{4} = \frac{F_1^{2} F_2 \cdot F_{31}^{2} F_{62}}{F_{32}^{2}}, \\ \left(\frac{f_1 f_{63}}{f_{64}}\right)^{2} = F_1 F_{63}. \end{cases}$$

Jam si theorema (16.), unde aequationes $F_{48}=F_{16}$, $F_{56}=F_8$, $F_{60}=F_4$, $F_{62}=F_2$ sequuntur, adhibeamus nec non in universum per $\sqrt[32]{a}$, $\sqrt[16]{b}$, $\sqrt[8]{c}$, $\sqrt[4]{d}$, $\sqrt[2]{f}$ unam realem positivam radicem respective aequationum:

$$X^{32}=a,\quad X^{16}=b,\quad X^8=c,\quad X^4=d,\quad X^2=f$$

significemus, omnes igitur radices respective per

$$\sqrt[32]{(a)}R^{4e_1},\quad \sqrt[16]{(b)}R^{8i_1},\quad \sqrt[8]{(c)}R^{16k_1},\quad \sqrt[4]{(d)}R^{32l_1},\quad \sqrt[2]{(e)}R^{64m_1}$$

exprimamus, ubi e_1 unus est numerorum 0, 1, 2, ... 31,

i_1 - - - - 0, 1, ... 15,

k_1 - - - - 0, 1, ... 7,

l_1 - - - - 0, 1, 2, 3,

m_1 - - - - 0, 1,

hae derivantur aequationes:

$$30.\quad \frac{f_1 f_3}{f_4} = \sqrt[16]{\left(\frac{F_1^8 F_2^4 F_3^8 F_6^4 F_{12}^2 F_4}{F_4^8 F_8^2 F_{16} F_{32}}\right)} R^{4e_1},$$

$$31.\quad \frac{f_1 f_7}{f_8} = \sqrt[8]{\left(\frac{F_1^4 F_2^2 F_4 F_7^4 F_{14}^2 F_{28}}{F_8^2 F_{16} F_{32}}\right)} R^{8i_1},$$

$$32.\quad \frac{f_1 f_{15}}{f_{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{F_1^2 F_2 F_4 F_{15}^2 F_{30}}{F_{16}^2 F_{32}}\right)} R^{16k_1},$$

$$33.\quad \frac{f_1 f_{31}}{f_{32}} = \sqrt[2]{\left(\frac{F_1 F_2 F_{31}}{F_{32}}\right)} R^{32l_1},$$

$$34.\quad \frac{f_1 f_{63}}{f_{64}} = \sqrt[2]{(F_1 F_{63})} R^{64m_1}.$$

Ex quinque ultimis aequationibus, alias veras derivari ubique in functionibus f et F, R^{2n+1} pro R positis, ex utriusque functionis natura elucet. Nullo modo vero potestas illa ipsius R eidem substitutioni subiicitur, quippe qua substitutione proprie in aequationibus (29.) introducenda, ad novas aequationes puras ordinum 32, 16, 8, 4, 2 respective inter quarum radices verae sunt eligendae, venimus.

Hanc ob rem numeri $e_{(2n+1)}$, $i_{(2n+1)}$, $k_{(2n+1)}$, $l_{(2n+1)}$, $m_{(2n+1)}$, quos numeros e_1, i_1, k_1, l_1, m_1, in aequationibus (30.), (31.), (32.), (33.), (34.) R^{2n+1} loco ipsius R posito, fieri ponamus, prorsus segregato calculo determinandi videntur.

Iam vero inter aequationes, hac substitutione ortas, eas quibus ad sequentia utamur, proponamus.

Primum ex aequatione (34.) invenimus, si $4n+1 < 64$ est, 16 aequationes huius formae:

$$\frac{f_{(4n+1)}\,f_{63(4n+1)}}{f_{64(4n+1)}} = R^{64\,m_{(4n+1)}}\sqrt{(F_{(4n+1)}\cdot F_{63(4n+1)})}$$

sive quia

$$f_{63(4n+1)} = f_{64-(4n+1)} \quad \text{et} \quad F_{63(4n+1)} = F_{64-(4n+1)},$$

nec non

$$f_{64(2n+1)} = f_{64},$$

esse per se clarum est:

$$35. \quad \frac{f_{(4n+1)}\,f_{64-(4n+1)}}{f_{64}} = \sqrt[2]{(F_{4n+1}\cdot F_{64-(4n+1)})}\,R^{64\,m_{(4n+1)}}.$$

Ex aequatione (33.) invenimus, R^{4n+1} pro R substituto, ubi $4n+1<32$ sit, quia rursus $f_{31(4n+1)}=f_{(32-(4n+1))}$ nec non $f_{32}=f_{32(4n+1)}$ ponere licet, octo aequationes huius formae:

$$36. \quad \frac{f_{(4n+1)}\,f_{32-(4n+1)}}{f_{32}} = \sqrt[2]{\left(\frac{F_{(4n+1)}\,F_{2(4n+1)}\,F_{31(4n+1)}}{F_{32}}\right)}\,R^{32\,l_{(4n+1)}}.$$

Ex aequatione (32.), pro R respective R^5, R^9, R^{13} positis hae aequationes oriuntur:

$$37. \quad \begin{cases} \dfrac{f_5\,f_{75}}{f_{80}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{F_5^3\,F_{10}\,F_{20}\,F_{15}^2\,F_{22}}{F_{80}^2\,F_{32}}\right)}\,R^{16\,k_5}, \\[2ex] \dfrac{f_9\,f_7}{f_{16}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{F_9^3\,F_{18}\,F_{36}\,F_7^2\,F_{14}}{F_{16}^2\,F_{32}}\right)}\,R^{16\,k_9}, \\[2ex] \dfrac{f_{13}\,f_{67}}{f_{80}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{F_{13}^3\,F_{26}\,F_{52}\,F_{67}^2\,F_6}{F_{80}^2\,F_{32}}\right)}\,R^{16\,\lambda_{13}}. \end{cases}$$

Ex aequatione (31.), pro R, R^{19} posito, haec oritur:

$$38. \quad \frac{f_{19}\,f_5}{f_{24}} = \sqrt[8]{\left(\frac{F_5^2\,F_{10}\,F_{20}\,F_{19}^4\,F_{38}^2\,F_{32}}{F_{24}^2\,F_{16}^2\,F_{12}}\right)}\,R^{8\,i_{19}}.$$

Loco ipsarum functionum f hanc formam: $\sqrt{(257)}(\cos\omega+i\sin\omega)$ introducere licere, clarum est, unde ex theorem. 19. sequitur haec aequatio:

$$39.. \quad \omega_{128-x} = 360^0-\omega_x.$$

Itaque in omnibus his expressionibus (28.), (30.), (31.), (32.), (33.), (34.), (35.), (36.), (37.), (38.) reducantur formae quantitatum f, F, R per angulos ω, ϑ et $\frac{\pi}{64}$ expressae; nec non anguli η, ι, $\varkappa$, λ, μ attrahantur. Quibus factis, nanciscimur adhibitis aequat. (39.), (22.), (23.), (24.), (25.) has aequationes:

ex aequat. (28.)

$$\omega_1 = \frac{32\vartheta_1+16\vartheta_2+8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64},$$

$$\omega_2 = \frac{16\vartheta_2+8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32},$$

$$\omega_4 = \frac{8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{16},$$

$$\omega_8 = \frac{4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{8},$$

$$\omega_{16} = \frac{2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{4},$$

$$\omega_{32} = \frac{\vartheta_{32}}{2},$$

$$\omega_{64} = 0,$$

ex aequat. (30.)

$$\omega_1+\omega_3-\omega_4=\frac{8\vartheta_1+4\vartheta_2+8\vartheta_3+4\vartheta_6+2\vartheta_{12}+\vartheta_{24}-6\vartheta_4-3\vartheta_8-\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{16}+e_1\frac{\pi}{16}=\eta_1,$$

ex aequat. (31.)

$$\omega_1+\omega_7-\omega_8=\frac{4\vartheta_1+2\vartheta_2+\vartheta_4+4\vartheta_7+2\vartheta_{14}+\vartheta_{28}-3\vartheta_8-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{8}+i_1\frac{\pi}{8}=\iota_1,$$

$$\omega_5+\omega_{19}-\omega_{24}=\frac{4\vartheta_5+2\vartheta_{10}+\vartheta_{20}+4\vartheta_{19}+2\vartheta_{26}-\vartheta_{12}-3\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{8}+i_{19}\frac{\pi}{8}=\iota_{19},$$

ex aequat. (32.) et (37.):

$$\omega_1+\omega_{15}-\omega_{16}=\frac{2\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_4+2\vartheta_{15}+\vartheta_{30}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{4}+k_1\frac{\pi}{4}=\varkappa_1,$$

$$\omega_5+\omega_{48}-\omega_{53}=\frac{2\vartheta_5+\vartheta_{10}+\vartheta_{20}+2\vartheta_{48}+\vartheta_{32}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}+90^\circ}{4}+k_5\frac{\pi}{4}=\varkappa_5,$$

$$\omega_9+\omega_7-\omega_{16}=\frac{2\vartheta_9+\vartheta_{18}+\vartheta_{36}+2\vartheta_7+\vartheta_{14}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{4}+k_9\frac{\pi}{4}=\varkappa_9,$$

$$\omega_{13}+\omega_{48}-\omega_{61}=\frac{2\vartheta_{13}+\vartheta_{26}+\vartheta_{52}+2\vartheta_{48}+\vartheta_6-2\vartheta_3-\vartheta_{32}-90^\circ}{4}+k_{13}\frac{\pi}{4}=\varkappa_{13},$$

ex aequat. (33.) et (36.)

$$\omega_1+\omega_{31}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_{31}-\vartheta_{32}}{2}+l_1\frac{\pi}{2}=\lambda_1,$$

$$\omega_5+\omega_{27}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_5+\vartheta_{10}+\vartheta_{27}-\vartheta_{32}}{2}+l_5\frac{\pi}{2}=\lambda_5,$$

$$\omega_9+\omega_{23}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_9+\vartheta_{18}+\vartheta_{23}-\vartheta_{32}}{2}+l_9\frac{\pi}{2}=\lambda_9,$$

$$\omega_{13}+\omega_{19}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{13}+\vartheta_{26}+\vartheta_{19}-\vartheta_{32}}{2}+l_{13}\frac{\pi}{2}=\lambda_{13},$$

$$\omega_{17}+\omega_{15}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{17}+\vartheta_{30}+\vartheta_{15}-\vartheta_{32}}{2}+l_{17}\frac{\pi}{2}=\lambda_{17},$$

$$\omega_{21}+\omega_{11}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{21}+\vartheta_{22}+\vartheta_{11}-\vartheta_{32}}{2}+l_{21}\frac{\pi}{2}=\lambda_{21},$$

$$\omega_{25}+\omega_7-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{25}+\vartheta_{14}+\vartheta_7-\vartheta_{32}}{2}+l_{25}\frac{\pi}{2}=\lambda_{25},$$

$$\omega_{29}+\omega_3-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{29}+\vartheta_6+\vartheta_3-\vartheta_{32}}{2}+l_{29}\frac{\pi}{2}=\lambda_{29}.$$

Aequatio vero (35.) theoremate (24.) determinatur, unde sequitur:

$$\mu_{(4n+1)} = \omega_{(4n+1)} + \omega_{64-(4n+1)} = \vartheta_{(4n+1)} + \frac{3\pi}{2},$$

et

$$\mu_{(4n+3)} = \omega_{(4n+3)} + \omega_{64-(4n+3)} = \vartheta_{(4n+3)} + \frac{\pi}{2}.$$

In ceteris vero aequationibus nunc allatis, si substituantur valores angulorum ϑ, η, ι, $\varkappa$, λ, μ, facillime eliciuntur valores numerorum e, i, k, l, m. Inde etiam clarum fit, angulos η, ι, $\varkappa$, λ, μ non tam stricte fuisse computandos, adeo suffecisse in quonam quadranto sint anguli k, determinare.

Invenimus vero hac in via progredientes, has aequationes:

I. $\omega_1 + \omega_3 - \omega_4 = \frac{8\vartheta_1 + 4\vartheta_2 + 8\vartheta_3 + 4\vartheta_6 + 2\vartheta_{12} - \vartheta_{24} - 6\vartheta_4 - 3\vartheta_8 - \vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{16} + \frac{3\pi}{8}$,
$= 146^0\ 22'\ 30'',37.$

II. $\omega_1 + \omega_7 - \omega_8 = \frac{4\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_4 + \vartheta_{28} + 2\vartheta_{14} + 4\vartheta_7 - 3\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{8} + \frac{3\pi}{4}$,
$= 235^0\ \ 3'\ \ 8'',80.$

III. $\omega_5 + \omega_{19} - \omega_{24} = \frac{4\vartheta_5 + 2\vartheta_{10} + \vartheta_{20} + 4\vartheta_{19} - \vartheta_{13} + 2\vartheta_{26} - 3\vartheta_{24} - 2\vartheta_{16} + \vartheta_{32}}{8} + \frac{3\pi}{2}$,
$= 54^0\ \ 9'\ 49'',61.$

IV. $\omega_1 + \omega_{15} - \omega_{16} = \frac{2\vartheta_1 + 2\vartheta_{15} + \vartheta_2 + \vartheta_{30} + \vartheta_4 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{4} + \pi$,
$= 19^0\ 25'\ \ 5'',35.$

V. $\omega_5 + \omega_{48} - \omega_{53} = \frac{2\vartheta_5 + \vartheta_{10} + \vartheta_7 + \vartheta_{13} + 2\vartheta_{16} - 2\vartheta_{11} - \vartheta_{32}}{4} + \frac{\pi}{2}$,
$= 39^0\ 53'\ 54'',24.$

VI. $\omega_9 + \omega_7 - \omega_{16} = \frac{2\vartheta_9 + 2\vartheta_7 + \vartheta_{18} + \vartheta_{14} + \vartheta_{28} - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{4} + \frac{3\pi}{2}$,
$= 310^0\ \ 0'\ 13'',07.$

VII. $\omega_{13} + \omega_{48} - \omega_{61} = \frac{2\vartheta_{13} + \vartheta_{26} + \vartheta_7 + \vartheta_6 + 2\vartheta_{16} - 2\vartheta_3 - \vartheta_{32}}{4} + \frac{3\pi}{2}$,
$= 110^0\ 53'\ 45'',41.$

VIII. $\omega_1 + \omega_{31} - \omega_{32} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_{31} + \vartheta_2 - \vartheta_{32}}{2} + \frac{3\pi}{2}$,
$= 173^0\ 55'\ \ 7'',44.$

IX. $\omega_5 + \omega_{27} - \omega_{32} = \frac{\vartheta_5 + \vartheta_{27} + \vartheta_{10} - \vartheta_{32}}{2} + \frac{\pi}{2}$,
$= 91^0\ 38'\ 37'',43.$

X. $\omega_9 + \omega_{23} - \omega_{32} = \frac{\vartheta_9 + \vartheta_{23} + \vartheta_{18} - \vartheta_{32}}{2} + \frac{3\pi}{2}$,
$= 31^0\ 39'\ 54'',08.$

$$\text{XI.}\quad \omega_{13}+\omega_{19}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{13}+\vartheta_{19}+\vartheta_{26}-\vartheta_{32}}{2}+\frac{3\pi}{2},$$
$$=348^0\ 31'\ 7'',48.$$
$$\text{XII.}\quad \omega_{17}+\omega_{15}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{17}+\vartheta_{15}+\vartheta_{30}-\vartheta_{32}}{2}+\frac{\pi}{2},$$
$$=151^0\ 47'\ 42'',74.$$
$$\text{XIII.}\quad \omega_{21}+\omega_{11}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{21}+\vartheta_{11}+\vartheta_{22}-\vartheta_{32}}{2}+\frac{\pi}{2},$$
$$=34^0\ 35'\ 31'',74.$$
$$\text{XIV.}\quad \omega_{25}+\omega_{7}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{25}+\vartheta_{7}+\vartheta_{14}-\vartheta_{32}}{2}+\frac{3\pi}{2},$$
$$=118^0\ 47'\ 30'',09.$$
$$\text{XV.}\quad \omega_{29}+\omega_{3}-\omega_{32}=\frac{\vartheta_{29}+\vartheta_{3}+\vartheta_{6}-\vartheta_{32}}{2}+\frac{3\pi}{2},$$
$$=139^0\ 57'\ 41'',59.$$

$$\text{XVI.}\quad \omega_1+\omega_{63}=\mu_1=\vartheta_1+\frac{3\pi}{2},\qquad \text{XXIV.}\quad \omega_{17}+\omega_{47}=\mu_{17}=\vartheta_{17}+\frac{3\pi}{2},$$
$$\text{XVII.}\quad \omega_{31}+\omega_{33}=\mu_{31}=\vartheta_{31}+\frac{\pi}{2},\qquad \text{XXV.}\quad \omega_{15}+\omega_{49}=\mu_{15}=\vartheta_{15}+\frac{\pi}{2},$$
$$\text{XVIII.}\quad \omega_5+\omega_{59}=\mu_5=\vartheta_5+\frac{3\pi}{2},\qquad \text{XXVI.}\quad \omega_{21}+\omega_{43}=\mu_{21}=\vartheta_{21}+\frac{3\pi}{2},$$
$$\text{XIX.}\quad \omega_{27}+\omega_{37}=\mu_{27}=\vartheta_{27}+\frac{\pi}{2},\qquad \text{XXVII.}\quad \omega_{11}+\omega_{53}=\mu_{11}=\vartheta_{11}+\frac{\pi}{2},$$
$$\text{XX.}\quad \omega_9+\omega_{55}=\mu_9=\vartheta_9+\frac{3\pi}{2},\qquad \text{XXVIII.}\quad \omega_{25}+\omega_{39}=\mu_{25}=\vartheta_{25}+\frac{3\pi}{2},$$
$$\text{XXI.}\quad \omega_{23}+\omega_{41}=\mu_{23}=\vartheta_{23}+\frac{\pi}{2},\qquad \text{XXIX.}\quad \omega_7+\omega_{57}=\mu_7=\vartheta_7+\frac{\pi}{2},$$
$$\text{XXII.}\quad \omega_{13}+\omega_{51}=\mu_{13}=\vartheta_{13}+\frac{3\pi}{2},\qquad \text{XXX.}\quad \omega_{29}+\omega_{35}=\mu_{29}=\vartheta_{29}+\frac{3\pi}{2},$$
$$\text{XXIII.}\quad \omega_{19}+\omega_{45}=\mu_{19}=\vartheta_{19}+\frac{\pi}{2},\qquad \text{XXXI.}\quad \omega_3+\omega_{61}=\mu_3=\vartheta_3+\frac{\pi}{2}.$$

Ad quas aequationes triginta et unam adiiciamus adhuc has, quae ex antecedentibus, theoremate (14.) adhibito facillime derivari possunt:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{XXXII.}\quad \omega_2=2\omega_1-\vartheta_1, & \text{XXXIII.}\quad \omega_4=2\omega_2-\vartheta_2,\\ \text{XXXIV.}\quad \omega_8=2\omega_4-\vartheta_4, & \text{XXXV.}\quad \omega_{16}=2\omega_8-\vartheta_8,\\ \text{XXXVI.}\quad \omega_{32}=2\omega_{16}-\vartheta_{16}, & \text{XXXVII.}\quad \omega_{64}=2\omega_{32}-\vartheta_{32}.\end{array}\right.$$

$$\text{XXXVIII.}\quad \omega_6=2\omega_3-\vartheta_3,\qquad \text{XXXIX.}\quad \omega_{12}=2\omega_6-\vartheta_6,$$
$$\text{XL.}\quad \omega_{24}=2\omega_{12}-\vartheta_{12},\qquad \text{XLI.}\quad \omega_{48}=2\omega_{24}-\vartheta_{24}.$$

XLII. $\omega_{10}=2\omega_5-\vartheta_5$, XLIII. $\omega_{20}=2\omega_{10}-\vartheta_{10}$, XLIV. $\omega_{40}=2\omega_{20}-\vartheta_{20}$.
XLV. $\omega_{14}=2\omega_7-\vartheta_7$, XLVI. $\omega_{28}=2\omega_{14}-\vartheta_{14}$, XLVII. $\omega_{56}=2\omega_{28}-\vartheta_{28}$.

XLVIII.	$\omega_{18} = 2\omega_9 - \vartheta_9$,	XLVIX.	$\omega_{36} = 2\omega_{18} - \vartheta_{18}$.
L.	$\omega_{22} = 2\omega_{11} - \vartheta_{11}$,	LI.	$\omega_{44} = 2\omega_{22} - \vartheta_{22}$.
LII.	$\omega_{26} = 2\omega_{13} - \vartheta_{13}$,	LIII.	$\omega_{52} = 2\omega_{26} - \vartheta_{26}$.
LIV.	$\omega_{30} = 2\omega_{15} - \vartheta_{15}$,	LV.	$\omega_{60} = 2\omega_{30} - \vartheta_{30}$.
LVI.	$\omega_{34} = 2\omega_{17} - \vartheta_{17}$.	LX.	$\omega_{50} = 2\omega_{25} - \vartheta_{25}$.
LVII.	$\omega_{38} = 2\omega_{19} - \vartheta_{19}$.	LXI.	$\omega_{54} = 2\omega_{27} - \vartheta_{27}$.
LVIII.	$\omega_{42} = 2\omega_{21} - \vartheta_{21}$.	LXII.	$\omega_{58} = 2\omega_{29} - \vartheta_{29}$.
LVIX.	$\omega_{46} = 2\omega_{23} - \vartheta_{23}$.	LXIII.	$\omega_{62} = 2\omega_{31} - \vartheta_{31}$.

Habemus igitur sexaginta et tres aequationes, in quibus determinandae sunt

ω_2, ω_3, ω_4 etc. ω_{64}

quantitates, anguli autem ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ... ϑ_{32} nec non angulus ω_1 quantitates cognitae sunt, ita ut illae inde possint determinari. Adhuc vero adiiciendum est, omnes illos angulos ω ipsos ex aequationibus propositis prodire posse ullo coefficiente carentes, unde fit, ut angulus quisque ω sine ulla ambiguitate nonnisi uno positivo valore gaudeat.

Quos valores ita invenimus,

Habemus;

$$\omega_1 = \frac{32\vartheta_1+16\vartheta_2+8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}, \quad = 139^0\ 36'\ 39'',09,$$

quo valore in aequat. XXXII. usque ad XXXVIII. adhibito, fiunt:

$$\omega_2 = \frac{16\vartheta_2+8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}, \quad = 214^0\ 34'\ 36'',45,$$

$$\omega_4 = \frac{8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{16}, \quad = 176^0\ 29'\ 15'',67,$$

$$\omega_8 = \frac{4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{8}, \quad = 147^0\ 32'\ 59'',19,$$

$$\omega_{16} = \frac{2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{4}, \quad = 193^0\ 3'\ 45'',94,$$

$$\omega_{32} = \frac{\vartheta_{32}}{2}, \quad = 46^0\ 47'\ 17'',40,$$

$$\omega_{64} = 0, \quad = 0,$$

hisque valoribus in aequationibus I., II., IV., VIII., XVI, substitutis inde emergunt hi valores:

$$\omega_3 = \frac{32\vartheta_3+16\vartheta_6+8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{3\pi}{8} = 183^0\ 15'\ 6'',96.$$

$$\omega_7 = \frac{32\vartheta_7 + 16\vartheta_{14} + 8\vartheta_{28} + 4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{64} + \frac{3\pi}{4} = 242^0\ 59'\ 28'',91,$$

$$\omega_{15} = \frac{32\vartheta_{15} + 16\vartheta_{30} + 8\vartheta_4 - 4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{64} + \pi = 72^0\ 52'\ 12'',20,$$

$$\omega_{31} = \frac{32\vartheta_{31} + 16\vartheta_2 - 8\vartheta_4 - 4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{64} + \frac{3\pi}{2} = 81^0\ 5'\ 45'',75,$$

$$\omega_{63} = \frac{32\vartheta_1 - 16\vartheta_2 - 8\vartheta_4 - 4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{64} + \frac{3\pi}{2} = 195^0\ 2'\ 2'',64,$$

unde ex aequationibus XXXVIII., XXXIX., XL., XLI. sequuntur:

$$\omega_6 = \frac{16\vartheta_6 + 8\vartheta_{12} + 4\vartheta_{24} + 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{32} + \frac{3\pi}{4} = 241^0\ 5'\ 58'',20,$$

$$\omega_{12} = \frac{8\vartheta_{12} + 4\vartheta_{24} + 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{16} + \frac{3\pi}{2} = 21^0\ 20'\ 34'',52,$$

$$\omega_{24} = \frac{4\vartheta_{24} + 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{8} + \pi = 331^0\ 11'\ 18'',21,$$

$$\omega_{48} = \frac{2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{4} = 146^0\ 16'\ 28'',54,$$

ex aequat. XLV., XLVI., XLVII.:

$$\omega_{14} = \frac{16\vartheta_{14} + 8\vartheta_{28} + 4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{32} + \frac{3\pi}{2} = 42^0\ 41'\ 24'',45,$$

$$\omega_{28} = \frac{8\vartheta_{28} + 4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{16} + \pi = 221^0\ 52'\ 55'',53,$$

$$\omega_{56} = \frac{4\vartheta_8 - 2\vartheta_{16} - \vartheta_{32}}{8} = 314^0\ 29'\ 13'',25.$$

Valore anguli ω_1 supposito, atque in aequationibus XXXII. usque ad XXXVIII. substituto inde sensim sensimque emergunt:

$$\omega_2,\quad \omega_4,\quad \omega_8,\quad \omega_{16},\quad \omega_{32},\quad \omega_{64},$$

quibus valoribus in aequat. I., II., IV., VIII., XVI. substitutis proveniunt:

$$\omega_3,\quad \omega_7,\quad \omega_{15},\quad \omega_{31},\quad \omega_{63}.$$

Unde ex aequationibus XXXVIII., XXXIX., XL., XLI., XLV., XLVI., XXVII., LIV., LV. et LXIII. sequuntur:

$$\omega_6,\quad \omega_{12},\quad \omega_{24},\quad \omega_{48},\quad \omega_{14},\quad \omega_{28},\quad \omega_{56},\quad \omega_{30},\quad \omega_{60} \text{ et } \omega_{62},$$

ex valoribus ω_3 et ω_{32} et aequat. XV. et XXI., XXX. et LXII.:

$$\omega_{29},\quad \omega_{61},\quad \omega_{35},\quad \omega_{68},$$

ex ω et aequat. VI., XIV., XXIX. sequuntur:

$$\omega_9,\quad \omega_{25},\quad \omega_{57},$$

unde per aequat. XLVIII., XLXIX., XXVIII. et LX.; XX., X., LVI. et XXI.:

$$\omega_{18},\quad \omega_{36},\quad \omega_{39},\quad \omega_{50},\quad \omega_{45},\quad \omega_{23},\quad \omega_{46},\quad \omega_{41}.$$

Ex ω_{15}, ω_{31} et aequat. XII., XXV., XXXIII., LVI., XXIV. fluunt:

$$\omega_{17},\quad \omega_{49},\quad \omega_{33},\quad \omega_{34},\quad \omega_{47}.$$

Ex ω_{31} et aequat. VII. tum vero LII., LIII., XXII., XI., LVII. fluunt:

$$\omega_{13},\quad \omega_{26},\quad \omega_{62},\quad \omega_{51},\quad \omega_{19},\quad \omega_{38}.$$

Ex ω_{19} et aequat. III., XLII., XLIII., XLIV. et XXIII. fluunt:

$$\omega_{5},\quad \omega_{10},\quad \omega_{20},\quad \omega_{40},\quad \omega_{45}.$$

Ex ω_{5} et aequat. V., XVIII., IX., LXI., XIX. deducuntur:

$$\omega_{53},\quad \omega_{59},\quad \omega_{27},\quad \omega_{54},\quad \omega_{37}.$$

Ex ω_{53} et aequat. XXVII., L., LI., XIII., LVIII., XXVI. sequuntur:

$$\omega_{11},\quad \omega_{22},\quad \omega_{44},\quad \omega_{21},\quad \omega_{42},\quad \omega_{[illegible]}.$$

Valores vero ipsi angulorum ω hi sunt:

Angulus: $\omega_{64}=0$.

Angulus: $\omega_{32}=\frac{\vartheta_{32}}{2}=46^0\ 47'\ 17'',40$.

Anguli formae: $\omega_{16(2n+1)}$

$$\omega_{16}=\frac{2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{4}=193^0\ 3'\ 45'',94,\qquad \omega_{48}=\frac{2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{4}=146^0\ 16'\ 28'',54.$$

Anguli formae: $\omega_{8(2n+1)}$

$$\omega_{8}=\frac{4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{8}=147^0\ 32'\ 59'',19,$$

$$\omega_{56}=\frac{4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{8}=314^0\ 29'\ 13'',25,$$

$$\omega_{24}=\frac{4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{8}+\pi=331^0\ 11'\ 18'',21,$$

$$\omega_{40}=\frac{4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{8}+\pi=184^0\ 54'\ 49'',67.$$

Anguli formae: $\omega_{4(2n+1)}$

$$\omega_{4}=\frac{8\vartheta_{4}+4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{16}=176^0\ 29'\ 15'',67,$$

$$\omega_{60}=\frac{8\vartheta_{4}-4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{16}=28^0\ 56'\ 16'',48,$$

$$\omega_{12}=\frac{8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{16}+\frac{3\pi}{2}=21^0\ 20'\ 34'',52,$$

$$\omega_{52}=\frac{8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{16}+\frac{\pi}{2}=50^0\ 9'\ 16'',31,$$

$$\omega_{20}=\frac{8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{16}+\frac{\pi}{2}=265^0\ 20'\ 47'',34,$$

$$\omega_{44}=\frac{8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{16}+\frac{3\pi}{2}=80^0\ 25'\ 57'',67,$$

$$\omega_{28} = \frac{8\vartheta_{28}+4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{16}+\pi = 221^0\ 52'\ 55'',53,$$

$$\omega_{36} = \frac{8\vartheta_{28}-4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{16}+\pi = 267^0\ 23'\ 42'',29.$$

Anguli formae: $\omega_{2(2n+1)}$

$$\omega_{2} = \frac{16\vartheta_{2}+8\vartheta_{4}+4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32} = 214^0\ 34'\ 36'',45,$$

$$\omega_{62} = \frac{16\vartheta_{2}-8\vartheta_{4}-4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\pi = 218^0\ 5'\ 20'',78,$$

$$\omega_{6} = \frac{16\vartheta_{6}+8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\frac{3\pi}{4} = 241^0\ 5'\ 58'',20,$$

$$\omega_{58} = \frac{16\vartheta_{6}-8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\frac{\pi}{4} = 39^0\ 45'\ 23'',68,$$

$$\omega_{10} = \frac{16\vartheta_{10}+8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\frac{5\pi}{4} = 70^0\ 43'\ 22'',70,$$

$$\omega_{54} = \frac{16\vartheta_{10}-8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\frac{7\pi}{4} = 345^0\ 22'\ 35'',37,$$

$$\omega_{14} = \frac{16\vartheta_{14}+8\vartheta_{28}+4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\frac{3\pi}{2} = 42^0\ 41'\ 24'',45,$$

$$\omega_{50} = \frac{16\vartheta_{14}-8\vartheta_{28}-4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\frac{3\pi}{2} = 0^0\ 48'\ 28'',91,$$

$$\omega_{18} = \frac{16\vartheta_{18}+8\vartheta_{28}-4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\frac{3\pi}{2} = 25^0\ 15'\ 29'',65,$$

$$\omega_{46} = \frac{16\vartheta_{18}-8\vartheta_{28}+4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\frac{3\pi}{2} = 297^0\ 51'\ 47'',37,$$

$$\omega_{22} = \frac{16\vartheta_{22}+8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\frac{3\pi}{4} = 266^0\ 31'\ 10'',12,$$

$$\omega_{42} = \frac{16\vartheta_{22}-8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\frac{\pi}{4} = 6^0\ 5'\ 12'',45,$$

$$\omega_{26} = \frac{16\vartheta_{26}+8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\frac{5\pi}{4} = 286^0\ 27'\ 9'',72,$$

$$\omega_{38} = \frac{16\vartheta_{26}-8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32}+\frac{7\pi}{4} = 56^0\ 17'\ 53'',41,$$

$$\omega_{30} = \frac{16\vartheta_{30}+8\vartheta_{4}-4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{32} = 151^0\ 40'\ 1'',75,$$

$$\omega_{34} = \frac{16\vartheta_{30}-8\vartheta_{4}+4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{32}+\pi = 302^0\ 43'\ 45'',27.$$

Anguli formae: ω_{2n+1}

$$\omega_{1} = \frac{32\vartheta_{1}+16\vartheta_{2}+8\vartheta_{4}+4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64} = 139^0\ 36'\ 39'',09,$$

$$\omega_{63} = \frac{32\vartheta_{1}-16\vartheta_{2}-8\vartheta_{4}-4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{12\pi}{8} = 195^0\ 2'\ 2'',64,$$

$$\omega_3=\frac{32\vartheta_3+16\vartheta_6+8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{3\pi}{8}=183^0\,15'\;\;6'',96,$$

$$\omega_{61}=\frac{32\vartheta_3-16\vartheta_6-8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{\pi}{8}=\;32^0\;\;9'\;\;8'',76,$$

$$\omega_5=\frac{32\vartheta_5+16\vartheta_{10}+8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{5\pi}{8}=346^0\,49'\;\;8'',58,$$

$$\omega_{59}=\frac{32\vartheta_5-16\vartheta_{10}-8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{7\pi}{8}=186^0\;\;5'\,45'',78,$$

$$\omega_7=\frac{32\vartheta_7+16\vartheta_{14}+8\vartheta_{28}+4\vartheta_8-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{6\pi}{8}=242^0\,59'\,28'',91,$$

$$\omega_{57}=\frac{32\vartheta_7-7\vartheta_{14}-8\vartheta_{28}-4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{14\pi}{8}=290^0\,18'\;\;4'',45,$$

$$\omega_9=\frac{32\vartheta_9+16\vartheta_{18}+8\vartheta_{28}-4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{6\pi}{8}=260^0\;\;4'\,30'',10,$$

$$\omega_{55}=\frac{32\vartheta_9-16\vartheta_{18}-8\vartheta_{28}+4\vartheta_8-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{6\pi}{8}=144^0\,49'\;\;0'',45,$$

$$\omega_{11}=\frac{32\vartheta_{11}+16\vartheta_{22}+8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{3\pi}{8}=269^0\,42'\,53'',00,$$

$$\omega_{53}=\frac{32\vartheta_{11}-16\vartheta_{22}-8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{\pi}{8}=\;93^0\,11'\,42'',88,$$

$$\omega_{13}=\frac{32\vartheta_{13}+16\vartheta_{26}+8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{13\pi}{8}=356^0\,46'\,25'',63,$$

$$\omega_{51}=\frac{32\vartheta_{13}-16\vartheta_{26}-8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{15\pi}{8}=340^0\,19'\,15'',91,$$

$$\omega_{15}=\frac{32\vartheta_{15}+16\vartheta_{30}+8\vartheta_4-4\vartheta_8-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{8\pi}{8}=\;72^0\,52'\,12'',20,$$

$$\omega_{49}=\frac{32\vartheta_{15}-16\vartheta_{30}-8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{12\pi}{8}=\;11^0\,12'\,10'',45,$$

$$\omega_{17}=\frac{32\vartheta_{17}+16\vartheta_{30}-8\vartheta_4+4\vartheta_8+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{12\pi}{8}=125^0\,42'\,47'',94,$$

$$\omega_{47}=\frac{32\vartheta_{17}-16\vartheta_{30}+8\vartheta_4-4\vartheta_8-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}=\;92^0\,59'\;\;2'',67,$$

$$\omega_{19}=\frac{32\vartheta_{19}+16\vartheta_{26}-8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{15\pi}{8}=\;38^0\,31'\,59'',25,$$

$$\omega_{45}=\frac{32\vartheta_{19}-16\vartheta_{26}+8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{5\pi}{8}=\;72^0\,14'\;\;5'',84,$$

$$\omega_{21}=\frac{32\vartheta_{21}+16\vartheta_{22}-8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{\pi}{8}=171^0\,39'\,56'',14,$$

$$\omega_{43}=\frac{32\vartheta_{21}-16\vartheta_{22}+8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{11\pi}{8}=\;75^0\,34'\,43'',69,$$

$$\omega_{23}=\frac{32\vartheta_{23}+16\vartheta_{18}-8\vartheta_{28}+4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{6\pi}{8}=178^0\,22'\,41'',38,$$

$$\omega_{41}=\frac{32\vartheta_{23}-16\vartheta_{18}+8\vartheta_{28}-4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{14\pi}{8}=330^0\,30'\,54'',01,$$

$$\omega_{25}=\frac{32\vartheta_{25}+16\vartheta_{14}-8\vartheta_{28}-4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{6\pi}{8}=282^0\,35'\,18'',58,$$

$$\omega_{30}=\frac{32\vartheta_{25}-16\vartheta_{14}+8\vartheta_{28}+4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{6\pi}{8}=191^0\,46'\,59'',67,$$

$$\omega_{27}=\frac{32\vartheta_{27}+16\vartheta_{19}-8\vartheta_{20}-4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{15\pi}{8}=151^0\,36'\,46'',25$$

$$\omega_{37}=\frac{32\vartheta_{27}-16\vartheta_{10}+8\vartheta_{20}+4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{5\pi}{8}=256^0\,14'\,10'',89,$$

$$\omega_{20}=\frac{32\vartheta_{29}+16\vartheta_{4}-8\vartheta_{12}-4\vartheta_{24}-2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{9\pi}{8}=3^0\,29'\,52'',03,$$

$$\omega_{35}=\frac{32\vartheta_{29}-16\vartheta_{4}+8\vartheta_{12}+4\vartheta_{24}+2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{3\pi}{8}=233^0\,44'\,28'',35,$$

$$\omega_{31}=\frac{32\vartheta_{21}+16\vartheta_{2}-8\vartheta_{4}-4\vartheta_{8}-2\vartheta_{16}-\vartheta_{32}}{64}+\frac{12\pi}{8}=81^0\,5'\,45'',75,$$

$$\omega_{33}=\frac{32\vartheta_{21}-16_{2}+8\vartheta_{4}+4\vartheta_{8}+2\vartheta_{16}+\vartheta_{32}}{64}+\frac{8\pi}{8}=313^0\,0'\,24'',97,$$

Priusquam angulos ω relinquamus, haud erit inutile generalem eorum formam afferre, quae et valoribus nunc expositis, et ex theorematibus (28.″) et (28.′) deduci potest.

Inde enim sequuntur, eadem significatione signi radicalis ac antea adhibita hae aequationes:

$$f_{(2n+1)}=R^{\gamma(2n+1)}\sqrt[128]{\{F^{64}_{(2n+1)}\cdot F^{32}_{2(2n+1)}\cdot F^{16}_{4(2n+1)}\cdot F^{8}_{8(2n+1)}\cdot F^{4}_{16(2n+1)}\cdot F^{2}_{32(2n+1)}\cdot 257\}},$$

$$f_{2(2n+1)}=\frac{f^2_{(2n+1)}}{F_{(2n+1)}}=R^{2\gamma(2n+1)}\sqrt[64]{\{F^{32}_{2(2n+1)}\cdot F^{16}_{4(2n+1)}\cdot F^{8}_{8(2n+1)}\cdot F^{4}_{16(2n+3)}\cdot F^{2}_{32(2n+1)}\cdot 257\}},$$

$$f_{4(2n+1)}=\frac{f^2_{2(2n+1)}}{F_{2(2n+1)}}=R^{4\gamma(2n+1)}\sqrt[32]{\{F^{16}_{4(2n+1)}\cdot F^{8}_{8(2n+1)}\cdot F^{4}_{16(2n+1)}\cdot F^{2}_{32(2n+1)}\cdot 257\}},$$

$$f_{8(2n+1)}=\frac{f^2_{4(2n+1)}}{F_{4(2n+1)}}=R^{8\gamma(2n+1)}\sqrt[16]{\{F^{8}_{8(2n+1)}\cdot F^{4}_{16(2n+1)}\cdot F^{2}_{32(2n+1)}\cdot 257\}},$$

$$f_{16(2n+1)}=\frac{f^2_{8(2n+1)}}{F_{8(2n+1)}}=R^{16\gamma(2n+1)}\sqrt[8]{\{F^{4}_{16(2n+1)}\cdot F^{2}_{32(2n+1)}\cdot 257\}},$$

$$f_{32(2n+1)}=\frac{f^2_{16(2n+1)}}{F_{16(2n+1)}}=R^{32\gamma(2n+1)}\sqrt[4]{\{F^{2}_{32(2n+1)}\cdot 257\}},$$

$$f_{64(2n+1)}=\frac{f^2_{32(2n+1)}}{F_{32(2n+1)}}=R^{64\gamma(2n+1)}\sqrt[2]{(257)},$$

ubi numerus integer y adhuc determinetur necesse est, inter numeros 2, 4, 6, etc. 128.

Hinc deducuntur hae generales formae angulorum ω:

$$40.\quad \begin{cases} \omega_{(2n+1)} = \dfrac{32\vartheta_{(2n+1)} + 16\vartheta_{2(2n+1)} + 8\vartheta_{4(2n+1)} + 4\vartheta_{8(2n+1)} + 2\vartheta_{16(2n+1)} + \vartheta_{32(2n+1)}}{64} + \dfrac{y_{(2n+1)}\cdot\pi}{64}, \\ \omega_{2(2n+1)} = \dfrac{16\vartheta_{2(2n+1)} + 8\vartheta_{4(2n+1)} + 4\vartheta_{8(2n+1)} + 2\vartheta_{16(2n+1)} + \vartheta_{32(2n+1)}}{32} + \dfrac{y_{(2n+1)}\cdot\pi}{32}, \\ \omega_{4(2n+1)} = \dfrac{8\vartheta_{4(2n+1)} + 4\vartheta_{8(2n+1)} + 2\vartheta_{16(2n+1)} + \vartheta_{32(2n+1)}}{16} + \dfrac{y_{(2n+1)}\cdot\pi}{16}, \\ \omega_{8(2n+1)} = \dfrac{4\vartheta_{8(2n+1)} + 2\vartheta_{16(2n+1)} + \vartheta_{32(2n+1)}}{8} + \dfrac{y_{(2n+1)}\cdot\pi}{8}, \\ \omega_{16(2n+1)} = \dfrac{2\vartheta_{16(2n+1)} + \vartheta_{32(2n+1)}}{4} + \dfrac{y_{(2n+1)}\cdot\pi}{4}, \\ \omega_{32(2n+1)} = \dfrac{\vartheta_{32(2n+1)}}{2} + \dfrac{y_{(2n+1)}\cdot\pi}{2}, \end{cases}$$

ubique multiplis ipsius 2π omissis.

Quas formas in tribus et sexaginta angulis allatis reperimus, simulac revocemus theoremata de angulis ϑ: (22.) et (23.):

$$\vartheta_{128+x} = \vartheta_x,\quad \vartheta_{128-x} = -\vartheta_x,\quad \vartheta_{64-2x} = -\vartheta_{2x},\quad \vartheta_{64-(2x+1)} = \pi + \vartheta_{(2x+1)},$$

multiplis ipsius 2π desumtis.

Iam inde clarum fit, in antecedentibus nonnisi numeros y esse determinatos, ita ut haec tabula valorum ipsius $y_{(2n+1)}$, ad angulos ω ipsos cognoscendos, sufficiat:

$y_1 = 0$,	$y_{17} = 96$,	$y_{63} = 64$,	$y_{47} = 32$,
$y_3 = 24$,	$y_{19} = 120$,	$y_{61} = 104$,	$y_{45} = 8$,
$y_5 = 40$,	$y_{21} = 8$,	$y_{59} = 88$,	$y_{43} = 120$,
$y_7 = 44$,	$y_{23} = 48$,	$y_{57} = 80$,	$y_{41} = 80$,
$y_9 = 48$,	$y_{25} = 48$,	$y_{55} = 16$,	$y_{39} = 80$,
$y_{11} = 24$,	$y_{27} = 120$,	$y_{53} = 40$,	$y_{37} = 72$,
$y_{13} = 104$,	$y_{29} = 72$,	$y_{51} = 88$,	$y_{35} = 56$,
$y_{15} = 64$,	$y_{31} = 96$,	$y_{49} = 0$,	$y_{33} = 96$,

qui numeris pro $y_{(2n+1)}$ in formulis substituti, ibi ubique introductis aequationibus $\vartheta_{128+x} = \vartheta_x$, $\vartheta_{128-x} = \vartheta_x$ veros angulorum ω valores ex angulis ϑ_1 usque ad ϑ_{63} compositos efficiunt.

Quae omnia cum ita sint, quomodo anguli ω adhibeantur, ut ostendatur restat. Quem ad finem in iis aequationibus, quas in articulo IX. attulimus $m = 128$, ponentes, nec non loco quantitatum:

x_1, x_2, etc. x_m, has: p_0, p_1, p_2, p_3, etc. p_{127},

introducentes, habemus:

$$\begin{aligned}
f_1 &= p_0 + p_1 R + p_2 R^2 + p_3 R^3 + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127}, \\
f_2 &= p_0 + p_1 R^2 + p_2 R^4 + p_3 R^6 + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127}, \\
f_3 &= p_0 + p_1 R^3 + p_2 R^6 + p_3 R^9 + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127}, \\
&\text{etc.} \\
f_n &= p_0 + p_1 R^n + p_2 R^{2n} + p_3 R^{3n} + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{n.127}, \\
&\text{etc.} \\
f_{127} &= p_0 + p_1 R^{127} + p_2 R^{127.2} + p_3 R^{127.3} + \text{etc.} \quad + p_{127} R^{127.127}, \\
f_{128} &= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \text{etc.} \quad + p_{127}.
\end{aligned}$$

Introducamus in sequentibus brevitatis causa hoc signum:

$$\Sigma^{(z)}(R^m f_n) = R^m f_n + R^{2m} f_{2n} + R^{3m} f_{3n} + \text{etc.} \quad + R^{mz} f_{nz}.$$

Quo adhibito, theorematibusque idoneis de quantitatibus R, R^2, R^3, etc. revocatis, facile derivantur hae aequationes:

$$\begin{aligned}
f_{64} + f_{128} &= (2p_0 + 2p_2 + 2p_4 + \text{etc.} \quad + 2p_{126}) \\
&= 2\{[2,1] + [2,3^2] + [2,3^4] + \text{etc.} \quad + [2,3^{126}]\} = 2[128,1],
\end{aligned}$$

atque in universum:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(2)}(R^{64n} f_{64}) &= 2[128,3^n], \\
f_{32} + f_{64} + f_{96} + f_{128} &= 4(p_0 + p_4 + p_8 + \text{etc.} \quad p_{12n}) \\
&= 4\{[2,1] + [2,3^4] + [2,3^8] + \text{etc.} \quad + [2,3^{124}]\} = 4[64,1],
\end{aligned}$$

atque in universum:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(4)}(R^{32n} f_{32}) &= 4[64,3^n], \\
\Sigma^{(8)}(f_{16}) &= 8(p_0 + p_8 + \text{etc.} \quad + p_{120}) \\
&= 8\{[2,1] + [2,3^8] + \text{etc.} \quad + [2,3^{120}]\} = 8[32,1],
\end{aligned}$$

atque:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(8)}(R^{16n} f_{16}) &= 8(32,3^n), \\
\Sigma^{(16)}(f_8) &= 16(p_0 + p_{16} + p_{32} + p_{48} + p_{64} + p_{80} + p_{96} + p_{112}) \\
&= 16\{[2,1] + [2,3^{16}] + \text{etc.} \quad + [2,3^{112}]\} = 16[16,1],
\end{aligned}$$

atque:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(16)}(R^{8n} f_8) &= 16[16,3^n], \\
\Sigma^{(32)}(f_4) &= 32(p_0 + p_{32} + p_{64} + p_{96}) \\
&= 32\{[2,1] + [2,3^{32}] + [2,3^{64}] + [2,3^{96}]\} = 32[8,1],
\end{aligned}$$

atque:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(32)}(R^{4n} f_4) &= 32[8,3^n], \\
\Sigma^{64}(f_2) &= 64(p_0 + p_{64}) \\
&= 64\{[2,1] + [2,3^{64}]\} = 64[4,1],
\end{aligned}$$

atque:

$$\Sigma^{(64)}(R^{2n}f_{(2)}) = 64[4,3^n],$$

$$\Sigma^{(128)}(f_1) = 128p_0 = 128[2,1] = 128.2\cos\frac{2\mu\pi}{257},$$

atque:

$$\Sigma^{128}(R^n f_1) = 128[2,3^n] = 128.2\cos\frac{2\mu n\pi}{257}.$$

In quibus aequationibus si valores quantitatum f et potestatum ipsius R, per angulos expressi, introducantur, agregataque inde orta computentur, nanciscimur:

$$41.\quad \begin{cases} [128,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}}{2} = \\ [64,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}(1+2\cos\omega_{32})}{4}, \\ [32,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}(1+2\Sigma^3\cos\omega_{16})}{8}, \\ [16,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}(1+2\Sigma^7\cos\omega_8)}{16}, \\ [8,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}(1+2\Sigma^{15}\cos\omega_4)}{32}, \\ [4,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}(1+2\Sigma^{31}\cos\omega_2)}{64}, \\ [2,1] = \dfrac{-1+\sqrt{(257)}(1+2\Sigma^{63}\cos\omega_1)}{128}, \end{cases}$$

ubi rursus haec significatio adhibita est generalis:

$$\Sigma^{(z)}\cos\left(\omega_m+\frac{(n)\pi}{q}\right) =$$

$$\cos\left(\omega_m+\frac{n\pi}{q}\right)+\cos\left(\omega_{2m}+\frac{2n\pi}{q}\right)+\cos\left(\omega_{3m}+\frac{3n\pi}{q}\right)+\text{etc.}+\cos\left(\omega_{zm}+\frac{zn\pi}{q}\right).$$

Eadem significatione utentes habemus has formulas generales:

$$42.\quad [128,3^n] = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}}{2},$$

$$43.\quad [64,3^n] = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\cos\left(\omega_{32}+\frac{(n)\pi}{2}\right)\right\}}{4},$$

$$44.\quad [32,3^n] = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^3\cos\left(\omega_{16}+\frac{(n)\pi}{4}\right)\right\}}{8},$$

$$45.\quad [16,3^n] = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^7\cos\left(\omega_8+\frac{(n)\pi}{8}\right)\right\}}{16},$$

$$46.\quad [8,3^n] = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^{15}\cos\left(\omega_4+\frac{(n)\pi}{16}\right)\right\}}{32},$$

$$47. \qquad [4, 3^n] = \frac{-1 \pm \sqrt{(257)}\left\{1 \pm 2\Sigma^{31}\cos\left(\omega_2 + \frac{(n)\pi}{32}\right)\right\}}{64},$$

$$48. \qquad [2, 3^n] = \frac{-1 \pm \sqrt{(257)}\left\{1 \pm 2\Sigma^{63}\cos\left(\omega_1 + \frac{(n)\pi}{64}\right)\right\}}{128},$$

ubi signa superiora, si *n* est numerus par, inferiora, si *n* est impar, quia $R^{64n} f_{64}$ illic $= +\sqrt{(257)}$, hic $= -\sqrt{(257)}$ esse constat, ponantur.

Ut cognoscamus, quanam radice aequationis $\frac{X^{257}-1}{X-1} = 0$, $= \sigma$ supposita, quantitates [128, 1], [64, 1] etc. [2, 1] valeant, ultima formularum (41.) computetur necesse est.

Iam vero facile invenimus:

$\cos\omega_{32} = 0,684698$.		
$\cos\omega_{16} = -0,974123$,	$\cos\omega_{48} = -0,831708$.	
$\cos\omega_{8} = -0,843858$,	$\cos\omega_{24} = 0,876209$,	$\cos\omega_{40} = -0,996325$,
$\cos\omega_{56} = 0,700748$.		
$\cos\omega_{4} = -0,998121$,	$\cos\omega_{12} = 0,931419$,	$\cos\omega_{20} = -0,081130$,
$\cos\omega_{28} = -0,744520$,	$\cos\omega_{36} = -0,045449$,	$\cos\omega_{44} = 0,166206$,
$\cos\omega_{52} = 0,640719$,	$\cos\omega_{60} = 0,875145$.	
$\cos\omega_{2} = -0,82338$,	$\cos\omega_{6} = -0,48329$,	$\cos\omega_{10} = 0,33023$,
$\cos\omega_{14} = 0,73504$,	$\cos\omega_{18} = 0,90440$,	$\cos\omega_{22} = -0,06071$,
$\cos\omega_{26} = 0,28323$,	$\cos\omega_{30} = -0,88020$,	$\cos\omega_{34} = 0,54066$,
$\cos\omega_{38} = 0,55487$,	$\cos\omega_{42} = 0,99438$,	$\cos\omega_{46} = 0,46736$,
$\cos\omega_{50} = 0,99990$,	$\cos\omega_{54} = 0,96760$,	$\cos\omega_{58} = 0,76878$,
$\cos\omega_{62} = 0,78707$.		
$\cos\omega_{1} = -0,76166$,	$\cos\omega_{3} = -0,99839$,	$\cos\omega_{5} = 0,97366$,
$\cos\omega_{7} = -0,45412$,	$\cos\omega_{9} = -0,17236$,	$\cos\omega_{11} = -0,00498$,
$\cos\omega_{13} = 0,99841$,	$\cos\omega_{15} = 0,29454$,	$\cos\omega_{17} = -0,58373$,
$\cos\omega_{19} = 0,78224$,	$\cos\omega_{21} = -0,98944$,	$\cos\omega_{23} = -0,99961$,
$\cos\omega_{25} = 0,21795$,	$\cos\omega_{27} = -0,87975$,	$\cos\omega_{29} = 0,99814$,
$\cos\omega_{31} = 0,15478$,	$\cos\omega_{33} = 0,68209$,	$\cos\omega_{35} = -0,59144$,
$\cos\omega_{37} = -0,23792$,	$\cos\omega_{39} = -0,97893$,	$\cos\omega_{41} = 0,87048$,
$\cos\omega_{43} = 0,24905$,	$\cos\omega_{45} = 0,30511$,	$\cos\omega_{47} = -0,05206$,
$\cos\omega_{49} = 0,98094$,	$\cos\omega_{51} = 0,94159$,	$\cos\omega_{53} = -0,05574$,
$\cos\omega_{55} = -0,81732$,	$\cos\omega_{57} = 0,34695$,	$\cos\omega_{59} = -0,99433$,
$\cos\omega_{61} = 0,84664$,	$\cos\omega_{63} = -0,96579$.	

Quorum cosinuum summa est $= 2{,}97671$. Unde sequitur:

$$[2,1] = \frac{-1+\sqrt{(257)}\,[1+2(2{,}97671)]}{128} = 0{,}863044.$$

Ope vero logarithmorum sinuum et cosinuum tabula invenitur:

$$0{,}863044 = 2\cos 64^0\,26', \quad 8{,}87 = 2\cos\frac{46.2\pi}{257}.$$

Unde sequitur radicem σ suppositam esse:

$$\sigma = \cos\frac{46.2\pi}{257} \pm i\sin\frac{46.2\pi}{257}.$$

Si vero signa $(2,)$, $(4,)$, $(8,)$ etc. in articulis primis adhibita pro radice aequationis $\frac{X^{257}-1}{X-1}=0$, $\varrho = \cos\frac{2\pi}{257} \pm i\sin\frac{2\pi}{257}$ valere, in articulo VI. inventum esse revocemus, tabula secunda apte adhibita nanciscimur:

$$49. \quad \left\{\begin{array}{l} [2,1] = (2,46) = (2,3^{76}), \\ [4,1] = (4,46) = (4,35) = (4,3^{12}), \\ [8,1] = (8,46) = (8,35) = (8,3^{12}), \\ [16,1] = (16,46) = (16,35) = (16,3^{12}), \\ [32,1] = (32,46) = (32,81) = (32,3^{4}), \\ [64,1] = (64,46) = (64,1), \\ [128,1] = (128,1), \end{array}\right.$$

quae aequationes etiam comprobantur computatione. Inde vero prodeunt hae aequationes:

$$\begin{array}{l} (2,3^x) = (2,3^{128+x}) = (2,3^{76+52+x}) = [2,3^{52+x}], \\ (4,3^x) = (4,3^{64+x}) = (4,3^{12+52+x}) = [4,3^{52+x}], \\ (8,3^x) = (8,3^{32+x}) = (8,3^{12+20+x}) = [8,3^{20+x}], \\ (16,3^x) = (16,3^{16+x}) = (16,3^{12+4+x}) = [16,3^{4+x}], \\ (32,3^x) = (32,3^{8+x}) = (32,3^{4+4+x}) = [32,3^{4+x}], \\ (64,3^x) = [64,3^x], \\ (128,3^x) = [128,3^x]. \end{array}$$

Itaque in formulis (48.), (47.), (46.), (45.), (44.), (43.), (42.) respective posito $n = 2+x = 4+x = 4+x = 4+x = 20+x = 52+x = 52+x$ hae generales proveniunt formulae:

$$50. \quad (128,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}}{2},$$

$$51. \quad (64,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\cos\left(\omega_{32}+\frac{(x)\pi}{2}\right)\right\}}{4},$$

$$52.\quad (32,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^{(3)}\cos\left(\omega_{16}+\frac{(4+x)\pi}{4}\right)\right\}}{8},$$

$$53.\quad (16,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^{(7)}\cos\left(\omega_{8}+\frac{(4+x)\pi}{8}\right)\right\}}{16},$$

$$54.\quad (8,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^{(15)}\cos\left(\omega_{4}+\frac{(20+x)\pi}{16}\right)\right\}}{32},$$

$$55.\quad (4,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^{(31)}\cos\left(\omega_{2}+\frac{(52+x)\pi}{32}\right)\right\}}{64},$$

$$56.\quad (2,3^x) = \frac{-1\pm\sqrt{(257)}\left\{1\pm 2\Sigma^{(63)}\cos\left(\omega_{1}+\frac{(52+x)\pi}{64}\right)\right\}}{128},$$

superiori signo rursus pro numero pari x, inferiore pro impare x valente. Inde haec totius problematis fluit solutio:

„Si quaeritur formula quantitatem $2\cos\frac{2t\pi}{257}$ sive $(2,t)$ exprimens; ex „tabula quarta facillime quaeratur is index τ quantitatis p sive ea po„testas τ radicis primitivae 3, quae ad t pertinet, qua loco ipsius x „in formula (56.) substituta invenitur:

$$57.\quad (2,3^\tau)=(2,t)=\frac{1}{128}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\left(1\pm 2\left\{\begin{matrix}\cos\left(\omega_1+\frac{(52+\tau)\pi}{64}\right)+\cos\left(\omega_2+\frac{2(52+\tau)\pi}{64}\right)+\text{etc.}\\ +\cos\left(\omega_{31}+\frac{31(52+\tau)\pi}{64}\right)+\cos\left(\omega_{32}+\frac{\tau\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\omega_{63}-\frac{(52+\tau)\pi}{64}\right)+\cos\left(\omega_{62}-\frac{2(52+\tau)\pi}{64}\right)+\text{etc.}\\ +\cos\left(\omega_{33}-\frac{31(52+\tau)\pi}{64}\right)\end{matrix}\right\}\right)\right]$$

„ubi anguli ω valoribus antea expositis utuntur. Sin quantitates $(4,t)$, „$(8,t)$, $(16,t)$, $(32,t)$, $(64,t)$, $(128,t)$ quaerantur, substituatur nume„rus idem τ in formulis (55.), (54.), (53.), (52.), (51.), (50.), loco „numeri x unde prodeunt hae formulae:

$$(4,\ )=\frac{1}{64}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\left(1\pm 2\left\{\begin{matrix}\cos\left(\omega_2+\frac{(52+\tau)\pi}{32}\right)+\cos\left(\omega_4+\frac{2(52+\tau)\pi}{32}\right)+\text{etc.}\\ +\cos\left(\omega_{30}+\frac{15(52+\tau)\pi}{32}\right)+\cos\left(\omega_{32}+\frac{\tau\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\omega_{62}-\frac{(52+\tau)\pi}{32}\right)+\cos\left(\omega_{60}-\frac{2(52+\tau)\pi}{32}\right)+\text{etc.}\\ +\cos\left(\omega_{34}-\frac{15(52+\tau)\pi}{32}\right)\end{matrix}\right\}\right)\right],$$

$$(8,t)=\frac{1}{32}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\left(1\pm 2\begin{Bmatrix}\cos\left(\omega_4+\frac{(20+\tau)\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_8+\frac{2(20+\tau)\pi}{12}\right)+\text{etc.}\\ +\cos\left(\omega_{28}+\frac{7(20+\tau)\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{32}+\frac{\tau\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\omega_{60}-\frac{(20+\tau)\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{56}-\frac{2(20+\tau)\pi}{16}\right)+\text{etc.}\\ +\cos\left(\omega_{36}-\frac{7(20+\tau)\pi}{16}\right)\end{Bmatrix}\right)\right],$$

$$(16,t)=\frac{1}{16}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\left(1\pm 2\begin{Bmatrix}\cos\left(\omega_8+\frac{(4+\tau)\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{16}+\frac{2(4+\tau)\pi}{8}\right)\\ +\cos\left(\omega_{24}+\frac{3(4+\tau)\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{32}+\frac{\tau\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\omega_{56}-\frac{(4+\tau)\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{48}-\frac{2(4+\tau)\pi}{8}\right)\\ +\cos\left(\omega_{40}-\frac{3(4+\tau)\pi}{8}\right)\end{Bmatrix}\right)\right],$$

$$(32,t)=\frac{1}{8}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\left(1\pm 2\begin{Bmatrix}\cos\left(\omega_{16}+\frac{(4+\tau)\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{32}+\frac{\tau\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\omega_{48}-\frac{(4+\tau)\pi}{4}\right)\end{Bmatrix}\right)\right],$$

$$(64,t)=\frac{1}{4}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\left(1\pm 2\cos\omega_{32}+\frac{\tau\pi}{2}\right)\right],$$

$$(128,t)=\frac{1}{2}\left[-1\pm\sqrt{(257)}\right],$$

„in quibus omnibus formulis signum superius pro τ formae $2h$, in-
„ferius pro τ formae $2h+1$ valet."

Ut denique exemplo omnia illustremus, ponamus $t=1$. Numerus τ ad $t=1$ pertinens e tabula quarta invenitur $=0$, quo valore in formula (57.) substituto, invenimus:

$$256\cos\left(\frac{2\pi}{257}\right) = -1 + \sqrt{(257)}\,\times$$

$$\left|\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
2\Big(\cos\left(\omega_1+\frac{13\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_3+\frac{7\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_5+\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_7-\frac{5\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_9-\frac{11\pi}{16}\right)\\
\qquad\qquad +\cos\left(\omega_{11}+\frac{15\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{13}+\frac{9\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{15}+\frac{3\pi}{16}\right)\Big)\\
2\Big(\cos\left(\omega_{63}-\frac{13\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{61}-\frac{7\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{59}-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{57}+\frac{5\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{55}+\frac{11\pi}{16}\right)\\
\qquad\qquad +\cos\left(\omega_{53}-\frac{15\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{51}-\frac{9\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{49}-\frac{3\pi}{16}\right)\Big)
\end{array}\right\}\\
\left\{\begin{array}{l}
2\Big(\cos\left(\omega_{17}-\frac{3\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{19}-\frac{9\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{21}-\frac{15\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{23}+\frac{11\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{25}+\frac{5\pi}{16}\right)\\
\qquad\qquad +\cos\left(\omega_{27}-\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{29}-\frac{7\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{31}-\frac{13\pi}{16}\right)\Big)\\
2\Big(\cos\left(\omega_{47}+\frac{3\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{45}+\frac{9\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{43}+\frac{15\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{41}-\frac{11\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{39}-\frac{5\pi}{16}\right)\\
\qquad\qquad +\cos\left(\omega_{37}+\frac{\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{35}+\frac{7\pi}{16}\right)+\cos\left(\omega_{33}+\frac{13\pi}{16}\right)\Big)
\end{array}\right\}
\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
2\Big(\cos\left(\omega_2-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_6+\frac{7\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{10}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{14}-\frac{5\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{18}+\frac{5\pi}{8}\right)\\
\qquad\qquad +\cos\left(\omega_{22}-\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{26}-\frac{7\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{30}+\frac{3\pi}{8}\right)\Big)\\
2\Big(\cos\left(\omega_{62}+\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{58}-\frac{7\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{54}-\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{50}+\frac{5\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{46}-\frac{5\pi}{8}\right)\\
\qquad\qquad +\cos\left(\omega_{42}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{38}+\frac{7\pi}{8}\right)+\cos\left(\omega_{34}-\frac{3\pi}{8}\right)\Big)
\end{array}\right\}\\
\left\{\begin{array}{l}
2\Big(\cos\left(\omega_4-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{12}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{20}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{28}+\frac{3\pi}{4}\right)\Big)\\
2\Big(\cos\left(\omega_{60}+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{52}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{44}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\omega_{36}-\frac{3\pi}{4}\right)\Big)
\end{array}\right\}\\
\left\{\begin{array}{l}
2\Big(\cos\left(\omega_8+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\omega_{24}+\frac{3\pi}{2}\right)\Big)\\
2\Big(\cos\left(\omega_{56}-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\omega_{40}-\frac{3\pi}{2}\right)\Big)
\end{array}\right\}
+\left\{\begin{array}{l}
2\left(\cos\left(\omega_{16}+\pi\right)\right)\\
2\left(\cos\left(\omega_{48}-\pi\right)\right)
\end{array}\right\}
+2\cos(\omega_{32})+1.
\end{array}\right|$$

Quia vero anguli ω ex angulis ϑ componuntur, quippe qui bisectione peripheriae septies repetita construi possunt, iam etiam anguli $=\frac{2\pi}{257}$ constructionem, ad bisectionem circuli septies repetitam reductam esse, clarum est.

Haecce fuerunt quae de problemate proposito scribenda mihi videbantur.

Scripsi Regiomonti, nonis Decembribus 1830.

28.

Remarques sur l'équation $\varphi(fx) = \varphi x \frac{dfx}{dx}$.

(Par Mr. *Ramus* à Copenhague.)

Dans le 1[er] cah. du 7[me] vol. de ce journal Mr. le Dr. **Hill** a proposé le problème de trouver la fonction φ liée par l'équation

$$\varphi(fx) = \varphi x \frac{dfx}{dx}$$

à la fonction donnée f. La solution, qui en est donnée par Mr. **Th. Clausen** dans le 4[me] cah. du même vol., ne me semble pas être exacte. En effet il pose $fx = \psi x + \psi' x$, ce qui donne, la substitution étant faite dans l'équation donnée,

$$\frac{\varphi(\psi x + \psi' x)}{\varphi x} = \frac{d\psi x}{dx} + \frac{d\psi' x}{dx},$$

d'où il veut conclure

$$\varphi(\psi x + \psi' x) = \varphi(\psi x) + \varphi(\psi' x).$$

C'est ce qui n'est pas admissible, la fonction φ en général n'étant pas la même pour $f = \psi$, $f = \psi'$ et $f = \psi + \psi'$, ensorte qu'il n'est pas permis de poser $\varphi(\psi x)$ au lieu de $\varphi x \frac{d\psi x}{dx}$, et $\varphi(\psi' x)$ au lieu de $\varphi x \frac{d\psi' x}{dx}$. Aussi l'équation $\varphi(\psi x + \psi' x) = \varphi(\psi x) + \varphi(\psi' x)$ n'est autre chose que la formule fondamentale de la multiplication, d'où il auroit dû suivre, que $\varphi(fx)$ seroit toujours afx, et φx seroit ax, résultat évidemment erroné. Cependant Mr. **Clausen** donne la solution suivante:

$$\varphi(fx) = x \frac{dfx}{dx},$$

contraire au résultat précédent, mais pas moins inexacte. En effet, en la combinant avec l'équation proposée, on trouve $\varphi x = x$, ce qui donne $\varphi(fx) = fx$, partant $fx = x \frac{dfx}{dx}$, d'où suit $fx = Cx$, cas spécial et le seul où la solution dont il s'agit peut être juste.

Le problème de Mr. **Hill** ne peut pas être complettement résolu par les forces actuelles de l'analyse; c'est ce qui sera sans doute évident par les recherches suivantes.

L'équation donnée peut être écrite en cette forme:

$$1. \quad \frac{dx}{\varphi x} = \frac{dfx}{\varphi(fx)},$$

d'où suit, en posant $\int \frac{dx}{\varphi x} = \psi x$:

$$2. \quad \psi x = \psi(fx) + C,$$

C étant la constante arbitraire. En suivant la méthode de Laplace pour l'intégration des équations aux différences variables, je pose

$$x = u_z, \quad fx = u_{z+1},$$

ce qui donne

$$3. \quad fu_z = u_{z+1}.$$

En changeant successivement z en $z+1$, $z+2$, $z+3$ etc., on trouve

$$f^n u_z = u_{z+n},$$

f^n étant la fonction f repétée n fois. En posant $z=0$ et $n=z$, on a

$$4. \quad f^z u_0 = u_z,$$

ce qui est l'intégrale complette de l'équation (3.), u_0 étant la constante arbitraire. Si pour plus de simplicité on écrit $F(z)$ au lieu de $f^z(u_0)$, on a

$$5. \quad z = F_1(u_z) = F_1(x),$$

F_1 étant la fonction inverse de F. Cela posé on peut facilement intégrer l'équation (2.), puisque en fesant

$$\psi x = \psi u_z = y_z,$$
$$\psi(fx) = \psi u_{z+1} = y_{z+1},$$

on trouve

$$y_z = y_{z+1} + C,$$

dont l'intégrale est

$$y_z = y_0 - Cz$$

(en négligeant la fonction arbitraire périodique $\varpi(\cos 2z\pi, \sin 2z\pi)$ qu'il est permis d'y ajouter). La valeur de z, donnée par l'équation (5.), étant substituée dans cette intégrale, on trouve

$$6. \quad y_z = y_0 - CF_1(x) = \psi x$$

ou

$$y_0 - CF_1(x) = \int \frac{dx}{\varphi x},$$

ce qui donne par la différentiation

$$\varphi x = -\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{F_1'(x)},$$

$F_1'(x)$ désignant le coefficient différentiel de $F_1(x)$. Enfin la solution présentée sous la forme la plus simple sera

$$7. \quad \varphi x = \frac{a}{F_1'(x)}$$

a étant une constante arbitraire, dont l'équation proposée elle même montre l'existence, cette équation restant la même si au lieu de φ on écrit $a\varphi$.

La solution précédente est très facile dans le cas $fx = x^p$. L'équation (4.) devient

$$v = u_0 p^z = F(z),$$

ce qui donne

$$F_1(x) = \frac{\log\log x - \log\log u}{\log p},$$

$$F_1'(x) = \frac{1}{\log p \,.\, \log x \,.\, x}.$$

Ainsi la fonction cherchée est

$$\varphi x = a x \log x.$$

En effet cette fonction rend évidemment l'équation $\varphi x^p = \varphi x \,.\, p x^{p-1}$ identique. Il est seulement à remarquer, que dans le cas spécial $p = 1$ la fonction φ reste tout-à-fait arbitraire, l'équation proposée étant identique en elle même.

Le cas $fx = cx$ donne facilement par la méthode exposée

$$\varphi x = a x,$$

et en y posant $a = c$, on a $\varphi x = x \frac{d.cx}{dx}$, conformément à la solution particulière de Mr. Clausen.

En général on peut exprimer la fonction $F_1(x)$ au moyen de $F(x)$ par la formule d'inversion de Laplace sous la forme d'une série infinie ou par sa somme exprimée par Parseval, sous la forme d'intégrale définie; mais tout cela ne serait qu'un symbole, dans lequel la fonction cherchée φ seroit généralement aussi cachée que dans l'équation proposée elle-même, ensorte qu'elle reste généralement irréductible à des fonctions connues. Ainsi dans l'exemple particulier de $fx = a^x$ on est porté jusqu'à la transcendante inconnue a　, dont il a été question dans le 2. vol. de ce journal pag. 99.

29.

Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Schlufs der Abhandlung No. 1., 14. und 28. im VI., No. 9. und 21. im VII., No. 6., 17. und 22. im VIII., No. 4., 16. und 23. im IX. Bande.)

III.

Tabelle der Länge-Zahlen der Kreisbogen, welche gröfser als 88 Centesimal-Grade sind, von Minute zu Minute, mit eilf Decimalziffern.

Bei der Berechnung dieser Tabelle ist ein Fehler gefunden worden, welcher sich sowohl in den Tafeln von Callet, als auch in dem *Thesaurus logarithmorum completus* von Vega vorfindet. Es ist nemlich der natürliche Logarithme der Zahl 1099 nicht = 7,0021 (1)595 4403 6213..., sondern = 7,0021 5595....

Da dieser Fehler nirgend meines Wissens angezeigt worden ist, so bringe ich ihn hiermit zur Kenntnifs, damit er verbessert werde.

Der Verfasser.

Anmerkung. Das Argument k und das Argument v sind in Minuten ausgdrückte Winkel, welche sich zur Summe 10000 Minuten ergänzen. Die in der Tabelle vorkommenden Logarithmen von v sind natürliche. Die Gröfse $\mathfrak{L}k + \log v$ ist deswegen sammt ihren Differenzen in der Tabelle aufgeführt, weil die zweiten Differenzen dieses Ausdrucks für eine Zunahme von k und also eine Abnahme von v um eine Minute nur langsam variiren. Diese Eigenschaft erleichtert die Interpolation; aus der Gröfse von $\mathfrak{L}k + \log v$ findet sich dann leicht die Gröfse des eingeschalteten $\mathfrak{L}k$.

$k = 88^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	2,358 8609 7801	0,448 9378 1379	49 5325	100
01	2,359 6996 1201	0,448 9427 6704	49 4908	99
02	2,360 5389 3744	9477 1612	49 4491	98
03	2,361 3789 5547	9526 6103	49 4074	97
04	2,361 7196 6726	9576 0177	49 3658	96
05	2,363 0610 7398	9625 3835	49 3242	95
06	2,363 9031 7682	9,448 9674 7077	49 2826	94
07	2,364 7459 7693	9723 9903	49 2410	93
08	2,365 5894 7550	9773 2313	49 1994	92
09	2,366 4336 7371	9822 4307	49 1578	91
10	2,367 2785 7274	9871 5885	49 1162	90
11	2,368 1241 7378	9,448 9920 7047	49 0746	89
12	2,368 9704 7801	9,448 9959 7793	49 0330	88
13	2,369 8174 8662	9,449 0018 8123	48 9914	87
14	2,370 6652 0081	0067 8037	48 9498	86
15	2,371 5136 2178	0116 7535	48 9082	85
16	2,372 3627 5073	9,449 0165 6617	48 8666	84
17	2,373 2125 8885	0214 5283	48 8250	83
18	2,374 0631 3736	0263 3533	48 7834	82
19	2,374 9143 9747	0312 1367	48 7418	81
20	2,375 7663 7039	0360 8785	48 7000	80
21	2,376 6190 5730	9,449 0409 5784	48 6583	79
22	2,377 4724 5946	0458 2367	48 6166	78
23	2,378 3265 7807	0506 8533	48 5750	77
24	2,379 1814 1437	0555 4283	48 5334	76
25	2,380 0369 6969	0603 9617	48 4918	75
26	2,380 8932 4495	9,449 0652 4535	48 4502	74
27	2,381 7502 4172	0700 9037	48 4086	73
28	2,382 6079 6109	0749 3123	48 3670	72
29	2,383 4664 0433	0797 6793	48 3254	71
30	2,384 3255 7268	0846 0047	48 2838	70
31	2,385 1854 6738	9,449 0894 2885	48 2422	69
32	2,386 0460 8968	0942 5307	48 2006	68
33	2,386 9074 4084	0990 7313	48 1590	67
34	2,387 7695 2212	1038 8003	48 1174	66
35	2,388 6323 3477	1087 0077	48 0758	65
36	2,389 4958 8006	9,449 1135 0835	48 0342	64
37	2,390 3601 5925	1183 1177	47 9926	63
38	2,391 2251 7362	1231 1103	47 9510	62
39	2,392 0909 2443	1279 0613	47 9094	61
40	2,392 9574 1297	1326 9707	47 8678	60
41	2,393 8246 4050	9,449 1374 8384	47 8262	59
42	2,394 6926 0833	1422 6646	47 7846	58
43	2,395 5613 1773	1470 4492	47 7430	57
44	2,396 4307 6999	1518 1922	47 7014	56
45	2,397 3009 6640	1565 8936	47 6598	55
46	2,398 1719 0827	9,449 1613 5534	47 6181	54
47	2,399 0435 9688	1661 1715	47 5765	53
48	2,399 9160 3354	1708 7480	47 5349	62
49	2,400 7992 1957	1756 2829	47 4933	64
50	2,401 6631 5626	1803 7762		50

$v = 11\,..,000\,...$

$k = 88^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	2,401 6631 5627	9,449 1803 7762	47 4517	50
51	2,402 5378 4496	9,449 1851 2279	47 4101	49
52	2,403 4132 8693	1898 6380	47 3686	48
53	2,404 2894 8353	1946 0066	47 3269	47
54	2,405 1664 3607	1993 3334	47 2853	46
55	2,406 0441 4589	2040 6187	47 2437	45
56	2,406 9226 1431	9,449 2087 8624	47 2021	44
57	2,407 8018 4266	2135 0645	47 1606	43
58	2,408 6818 3229	2182 2250	47 1189	42
59	2,409 5625 8453	2229 3439	47 0773	41
60	2,410 4441 0074	2276 4212	47 0357	40
61	2,411 3263 8225	9,449 2323 4569	46 9941	39
62	2,412 2094 3042	2370 4510	46 9525	38
63	2,413 0932 4660	2417 4035	46 9109	37
64	2,413 9778 3216	2464 3144	46 8693	36
65	2,414 8631 8846	2511 1837	46 8277	35
66	2,415 7493 1686	9,449 2558 0114	46 7861	34
67	2,416 6362 1873	2605 7975	46 7445	33
68	2,417 5238 9544	2651 5420	46 7029	32
69	2,418 4123 4838	2698 2449	46 6613	31
70	2,419 3015 7892	2744 9062	46 6198	30
71	2,420 1915 8846	9,449 2791 5260	46 5783	29
72	2,421 0823 7838	2838 1043	46 5368	28
73	2,421 9739 5008	2884 6411	46 4953	27
74	2,422 8663 0495	2931 1364	46 4538	26
75	2,423 7594 4439	2977 5902	46 4123	25
76	2,424 6533 6980	9,449 3024 0025	46 3708	24
77	2,425 5480 8260	3070 3733	46 3293	23
78	2,426 4435 8418	3116 7026	46 2878	22
79	2,427 3398 7597	3162 9004	46 2463	21
80	2,428 2369 5939	3209 2367	46 2042	20
81	2,429 1348 3579	9,449 3255 4410	46 1626	19
82	2,430 0335 0665	3301 6036	46 1210	18
83	2,430 9329 7340	3347 7246	46 0794	17
84	2,431 8332 3746	3393 8040	46 0378	16
85	2,432 7343 0029	3439 8418	45 9962	15
86	2,433 6361 6332	9,449 3485 8380	45 9546	14
87	2,434 5388 2799	3531 7926	45 9130	13
88	2,435 4422 9576	3577 7056	45 8715	12
89	2,436 3465 6808	3623 5771	45 8300	11
90	2,437 2519 4041	3669 4071	45 7885	10
91	2,438 1575 3221	9,449 3715 1956	45 7470	09
92	2,439 0642 2606	3760 9425	45 7055	08
93	2,439 9717 3212	3806 6482	45 6639	07
94	2,440 8800 4913	3852 3121	45 6224	06
95	2,441 7891 7950	3897 9346	45 5809	05
96	2,442 6991 2471	9,449 3943 5154	45 5394	04
97	2,443 6098 8623	3989 0648	45 4979	03
98	2,444 5214 6566	4034 5527	45 4564	02
99	2,445 4338 6449	4080 0091	45 4149	01
100	2,446 3470 8362	4125 4240		00

$v = 11\,..,000\,...$

$k = 89^0.$

1	$\mathfrak{L}.k.$	$\mathfrak{L}.k + \log.v.$	D. 1′.	1
00	2,446 3470 8362	9,449 4126 4239	45 3729	100
01	2,447 2611 2528	9,449 4170 7968	45 3313	99
02	2,448 1759 9075	4216 1281	45 2897	98
03	2,449 0016 8151	4261 4178	45 2481	97
04	2,450 0081 9909	4306 6659	45 2065	96
05	2,450 9255 4490	4351 8724	45 1650	95
06	2,451 8437 2076	9,449 4397 0374	45 1236	94
07	2,452 7627 2792	4442 1609	45 0820	93
08	2,453 6825 6799	4487 2429	45 0405	92
09	2,454 6032 4251	4532 2834	44 9989	91
10	2,455 5247 5301	4577 2823	44 9574	90
11	2,456 4471 0104	9,449 4622 2397	44 9159	89
12	2,457 3702 8815	4667 1556	44 8744	88
13	2,458 2943 1588	4712 0300	44 8329	87
14	2,459 2191 8580	4756 8629	44 7914	86
15	2,460 1448 9946	4801 6543	44 7499	85
16	2,461 0714 5843	9,449 4846 4042	44 7084	84
17	2,461 9988 6426	4891 1126	44 6669	83
18	2,462 9271 1855	4935 7795	44 6254	82
19	2,463 8562 2286	4980 4049	44 5839	81
20	2,464 7861 7877	5024 9888	44 5421	80
21	2,465 7169 8784	9,449 5069 5309	44 5006	79
22	2,466 6486 5168	5114 0314	44 4589	78
23	2,467 5811 7188	5158 4903	44 4173	77
24	2,468 5145 5004	5202 9076	44 3757	76
25	2,469 4487 8777	5247 2833	44 3342	75
26	2,470 3838 8669	9,449 5291 6175	44 2927	74
27	2,471 3198 4839	5335 9102	44 2512	73
28	2,472 2566 7451	5380 1614	44 2097	72
29	2,473 1943 6667	5424 3711	44 1682	71
30	2,474 1329 2648	5468 5393	44 1266	70
31	2,475 0723 5557	9,449 5512 6659	44 0861	69
32	2,476 0126 5558	5556 7510	44 0436	68
33	2,476 9538 2816	5600 7946	44 0021	67
34	2,477 8958 7495	5644 7967	43 9606	66
35	2,478 8387 9759	5688 7573	43 9191	65
36	2,479 7825 9774	9,449 5732 6764	43 8776	64
37	2,480 7272 7706	5776 5540	43 8361	63
38	2,481 6728 3721	5820 3901	43 7946	62
39	2,482 6192 7986	5864 1847	43 7531	61
40	2,483 5666 0668	5907 9378	43.7113	60
41	2,484 5148 1931	9,449 5951 6491	43 6698	59
42	2,485 4639 1948	5995 3189	43 6283	58
43	2,486 4139 0885	6038 9472	43 5867	57
44	2,487 3647 8914	6082 5340	43 5452	56
45	2,488 3165 6201	6126 0792	43 5037	55
46	2,489 2692 2919	9,449 6169 5829	43 4622	54
47	2,490 2227 9258	6213 0451	43 4207	53
48	2,491 1772 5329	6256 4658	43 3792	52
49	2,492 1326 1363	6299 8450	43 3377	51
50	2,493 0888 7512	6343 1827		50

$v = 10..,000...$

$k = 89^0.$

1	$\mathfrak{L}.k.$	$\mathfrak{L}.k + \log.v.$	D. 1′.	1
50	2,493 0888 7512	9,449 6343 1827	43 2962	50
51	2,494 0460 3950	9,449 6386 4789	43 2547	49
52	2,495 0041 0848	6429 7336	43 2132	48
53	2,495 9630 8381	6472 9468	43 1717	47
54	2,496 9229 6723	6516 1185	43 1302	46
55	2,497 8837 6086	6559 2487	43 0887	45
56	2,498 8454 6530	9,449 6602 3374	43 0472	44
57	2,499 8080 8346	6645 3846	43 0057	43
58	2,500 7716 1672	6688 3903	42 9642	42
59	2,501 7360 6684	6731 3545	42 9227	41
60	2,502 7014 3559	6774 2772	42 8810	40
61	2,503 6677 2472	9,449 6817 1581	42 8395	39
62	2,504 6349 3604	6859 9976	42 7980	38
63	2,505 6030 7134	6902 7956	42 7565	37
64	2,506 5721 3240	6945 5521	42 7150	36
65	2,507 5421 2102	6988 2671	42 6735	35
66	2,508 5130 3900	9,449 7030 9406	42 6320	34
67	2,509 4848 8815	7073 5726	42 5905	33
68	2,510 4576 7027	7116 1631	42 5490	32
69	2,511 4313 8720	7158 7121	42 5075	31
70	2,512 4060 4074	7201 2196	42 4600	30
71	2,513 3816 3273	9,449 7243 6856	42 4246	29
72	2,514 3581 6500	7286 1101	42 3830	28
73	2,515 3356 3939	7328 4931	42 3415	27
74	2,516 3140 5773	7370 8346	42 3001	26
75	2,517 2934 2190	7413 1347	42 2586	25
76	2,518 2737 3374	9,449 7455 3933	42 2171	24
77	2,519 2549 9509	7497 6104	42 1756	23
78	2,520 2372 0784	7539 7860	42 1341	22
79	2,521 2203 7385	7581 9201	42 0926	21
80	2,522 2044 9500	7624 0127	42 0510	20
81	2,523 1895 7315	9,449 7666 0637	42 0095	19
82	2,524 1756 1021	7708 0732	41 9680	18
83	2,525 1626 0808	7750 0412	41 9265	17
84	2,526 1505 6864	7791 9677	41 8850	16
85	2,527 1394 9380	7833 8527	41 8435	15
86	2,528 1293 8547	9,449 7875 6962	41 8020	14
87	2,529 1202 4558	7917 4982	41 7605	13
88	2,530 1120 7003	7959 2587	41 7190	12
89	2,531 1048 7875	8000 9777	41 6775	11
90	2,532 0986 5569	8042 6552	41 6360	10
91	2,533 0934 0877	9,449 8084 2912	41 5945	09
92	2,534 0891 3994	8125 8857	41 5530	08
93	2,535 0858 5116	8167 4387	41 5116	07
94	2,536 0835 4438	8208 9503	41 4702	06
95	2,537 0822 2156	8250 4205	41 4288	05
96	2,538 0818 8468	9,449 8291 8493	41 3874	04
97	2,539 0825 3571	8333 2367	41 3460	03
98	2,540 0841 7663	8374 5827	41 3046	02
99	2,541 0868 0942	8415 8873	41 2632	01
100	2,542 0904 3607	8457 1505		00

$v = 10..,000...$

$k = 90^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	2,542 0904 3607	9,449 8457 1606	41 2213	100
01	2,543 0960 5854	9,449 8498 3718	41 1798	99
02	2,544 1006 7885	8539 5516	41 1383	98
03	2,545 1072 9903	8580 6899	41 0968	97
04	2,546 1149 2109	8621 7867	41 0553	96
05	2,547 1235 4705	8662 8420	41 0138	95
06	2,548 1331 7893	9,449 8703 8558	40 9723	94
07	2,549 1438 1677	8744 8281	40 9308	93
08	2,550 1554 6861	8785 7589	40 8893	92
09	2,551 1681 3060	8826 6482	40 8478	91
10	2,552 1818 0648	8867 4960	40 8063	90
11	2,553 1964 9861	9,449 8908 3023	40 7649	89
12	2,554 2122 0898	8949 0672	40 7235	88
13	2,555 2289 3964	8989 7907	40 6821	87
14	2,556 2466 9268	9030 4728	40 6407	86
15	2,557 2654 7018	9071 1135	40 5993	85
16	2,558 2852 7423	9,449 9111 7128	40 5579	84
17	2,559 3061 0693	9152 2707	40 5165	83
18	2,560 3279 7037	9192 7872	40 4752	82
19	2,561 3508 6668	9233 2624	40 4338	81
20	2,562 3747 9796	9273 6962	40 3918	80
21	2,563 3997 6627	9,449 9314 0880	40 3503	79
22	2,564 4257 7380	9354 4383	40 3088	78
23	2,565 4528 2267	9394 7471	40 2673	77
24	2,566 4809 1503	9435 0144	40 2258	76
25	2,567 5100 5303	9475 2402	40 1943	75
26	2,568 5402 3881	9,449 9515 4245	40 1428	74
27	2,569 5714 7455	9555 5673	40 1013	73
28	2,570 6037 6240	9596 6686	40 0599	72
29	2,571 6371 0456	9635 7286	40 0185	71
30	2,572 6715 0321	9675 7470	39 9771	70
31	2,573 7069 6062	9,449 9715 7241	39 9357	69
32	2,574 7434 7871	9755 6598	39 8943	68
33	2,575 7810 5996	9795 5541	39 8529	67
34	2,576 8197 0649	9835 4070	39 8116	66
35	2,577 8594 2063	9875 2186	39 7702	65
36	2,578 9002 0427	9,449 9914 9888	39 7288	64
37	2,579 9420 5997	9954 7176	39 6874	63
38	2,580 9849 8984	9,449 9994 4050	39 6460	62
39	2,582 0289 9613	9,450 0034 0510	39 6046	61
40	2,583 0740 8110	0073 6556	39 5626	60
41	2,584 1202 4694	9,450 0113 2182	39 5211	59
42	2,585 1674 9596	0152 7393	39 4796	58
43	2,586 2158 3044	0192 2189	39 4381	57
44	2,587 2652 5265	0231 6570	39 3966	56
45	2,588 3157 6488	0271 0536	39 3552	55
46	2,589 3673 6944	9,450 0310 4088	39 3138	54
47	2,590 4200 6361	0349 7226	39 2724	53
48	2,591 4738 6471	0388 9950	39 2310	52
49	2,592 5287 6006	0428 2260	39 1896	51
50	2,593 5847 5697	0467 4156		50

$v = 9..,000...$

$k = 90^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	2,593 5847 5697	9,450 0467 4156	39 1482	50
51	2,594 6418 5778	9,450 0506 5636	39 1068	49
52	2,595 7000 6481	0545 6706	39 0654	48
53	2,596 7593 8042	0584 7360	39 0240	47
54	2,597 8198 0696	0623 7606	38 9826	46
55	2,598 8813 4677	0662 7426	38 9412	45
56	2,599 9440 0224	9,450 0701 6838	38 8997	44
57	2,601 0077 7572	0740 5836	38 8583	43
58	2,602 0726 6961	0779 4418	38 8169	42
59	2,603 1386 8629	0818 2587	38 7755	41
60	2,604 2058 2816	0857 0342	38 7338	40
61	2,605 2740 9760	9,450 0895 7680	38 6923	39
62	2,606 3434 9703	0934 4603	38 6508	38
63	2,607 4140 2868	0973 1111	38 6093	37
64	2,608 4856 9557	1011 7204	38 5678	36
65	2,609 5584 9964	1050 2882	38 5264	35
66	2,610 6324 4324	9,450 1088 8146	38 4850	34
67	2,611 7075 2912	1127 2996	38 4436	33
68	2,612 7837 5904	1165 7432	38 4022	32
69	2,613 8611 3727	1204 1454	38 3608	31
70	2,614 9396 6448	1242 5062	38 3194	30
71	2,616 0193 4375	9,450 1280 8256	38 2780	29
72	2,617 1001 7758	1319 1036	38 2366	28
73	2,618 1821 6846	1357 3402	38 1952	27
74	2,619 2653 1890	1395 5354	38 1538	26
75	2,620 3496 3141	1433 6892	38 112[illegible]	25
76	2,621 4351 0852	9,450 1471 8016	38 0710	24
77	2,622 5217 5276	1509 8726	38 0296	23
78	2,623 6095 6667	1547 9022	37 9883	22
79	2,624 6986 5280	1585 8906	37 9469	21
80	2,625 7887 1370	1623 8374	37 9052	20
81	2,626 8800 5191	9,450 1661 7426	37 8637	19
82	2,627 9725 7001	1699 6063	37 8222	18
83	2,629 0662 7060	1737 4285	37 7808	17
84	2,630 1611 5626	1775 2093	37 7394	16
85	2,631 2572 2960	1812 9487	37 6980	15
86	2,632 3544 9322	9,450 1850 6467	37 6566	14
87	2,633 4529 4974	1888 3033	37 6152	13
88	2,634 5526 0178	1925 9185	37 5738	12
89	2,635 6534 5198	1963 4923	37 5323	11
90	2,636 7555 0296	2001 0246	37 4909	10
91	2,637 8587 5638	9,450 2038 5135	37 4495	09
92	2,638 9632 1790	2075 9650	37 4081	08
93	2,640 0688 8720	2113 3731	37 3667	07
94	2,641 1757 6794	2150 7398	37 3253	06
95	2,642 2838 6282	2188 0651	37 2839	05
96	2,643 3931 7451	9,450 2225 3490	37 2425	04
97	2,644 5037 0574	2262 5915	37 2011	03
98	2,645 6154 5920	2299 7926	37 1597	02
99	2,646 7284 3763	2336 9523	37 1183	01
100	2,647 8426 4374	2374 0706		00

$v = 9..,000...$

$k = 91^0.$

1	$\mathfrak{L}.k.$	$\mathfrak{L}.k + \log.v.$	D. 1′.	1
00	2,647 8426 4374	9,450 2374 0700	37 0708	100
01	2,648 9680 8027	9,450 2411 1474	37 0353	99
02	2,650 0747 4997	2448 1827	36 9939	98
03	2,651 1920 5561	2485 1766	36 9525	97
04	2,652 3117 9994	2522 1291	36 9111	96
05	2,653 4321 8575	2559 0402	36 8697	95
06	2,654 5538 1582	9,450 2595 9099	36 8283	94
07	2,655 6766 9285	2632 7382	36 7869	93
08	2,656 8008 1983	2669 5251	36 7455	92
09	2,657 9261 9867	2706 2706	36 7041	91
10	2,659 0528 3475	2742 9747	36 6627	90
11	2,660 1807 2823	9,450 2779 6374	36 6213	89
12	2,661 3096 8388	2816 9587	36 5799	88
13	2,662 4403 0156	2852 8386	36 5385	87
14	2,663 5719 8711	2889 3771	36 4971	86
15	2,664 7040 4862	2925 8742	36 4557	85
16	2,665 8391 7036	9,450 2962 3299	36 4143	84
17	2,666 9746 7362	2998 7442	36 3730	83
18	2,668 1114 5572	3035 1172	36 3316	82
19	2,669 2486 1895	3071 4489	36 2902	81
20	2,670 3868 6043	3107 7390	36 2487	80
21	2,671 5296 0109	9,450 3143 9877	36 2073	79
22	2,672 6714 2987	3180 1960	36 1659	78
23	2,673 8146 4372	3216 3609	36 1245	77
24	2,674 9591 5761	3252 4854	36 0831	76
25	2,676 1049 7050	3288 5085	36 0417	75
26	2,677 2520 8637	9,450 3324 6102	36 0003	74
27	2,678 4005 0522	3360 6105	35 9589	73
28	2,679 5502 3904	3396 5894	35 9176	72
29	2,680 7012 7384	3432 4869	35 8761	71
30	2,681 8536 2466	3468 3630	35 8347	70
31	2,683 0073 9461	9,450 3504 1977	35 7933	69
32	2,684 1622 8444	3539 9910	35 7519	68
33	2,685 3185 9751	3575 7329	35 7106	67
34	2,686 4762 3679	3611 4635	35 6692	66
35	2,687 6352 0534	3647 1327	35 6278	65
36	2,688 7955 0695	9,450 3682 7405	35 5864	64
37	2,689 9571 6361	3718 3269	35 5450	63
38	2,691 1201 1753	3753 8819	35 5036	62
39	2,692 2844 3413	3789 3855	35 4622	61
40	2,693 4500 9643	3824 8477	35 4208	60
41	2,694 6171 0467	9,450 3860 2685	35 3794	59
42	2,695 7854 6531	3895 6479	35 3380	58
43	2,696 9551 8000	3930 9859	35 2966	57
44	2,698 1262 5211	3965 2825	35 2553	56
45	2,699 2986 8495	4001 3378	35 2139	55
46	2,700 4724 8139	9,450 4036 7517	35 1725	54
47	2,701 6476 4893	4071 9242	35 1311	53
48	2,702 8241 2871	4107 0553	35 0898	52
49	2,704 0020 8394	4142 1451	35 0484	51
50	2,705 1813 6987	4177 1935		50

$v = 8..,000...$

$k = 91^0.$

1	$\mathfrak{L}.k.$	$\mathfrak{L}.k + \log.v.$	D. 1′.	1
50	2,705 1813 6987	9,460 4177 1935	35 0070	50
51	2,706 3620 3374	9,450 4212 2005	34 9656	49
52	2,707 5440 8082	4247 1661	34 9243	48
53	2,708 7276 1439	4282 0904	34 8829	47
54	2,709 9123 3773	4316 9733	34 8415	46
55	2,711 0985 5413	4351 8148	34 8001	45
56	2,712 2861 6690	9,450 4386 6149	34 7588	44
57	2,713 4751 7937	4421 3737	34 7174	43
58	2,714 6655 9457	4456 0911	34 6760	42
59	2,715 8574 1673	4490 7670	34 6346	41
60	2,717 0506 4832	4525 4015	34 5933	40
61	2,718 2452 9302	9,450 4559 9948	34 5519	39
62	2,719 4413 5419	4594 5467	34 5106	38
63	2,720 6388 3524	4629 0572	34 4691	37
64	2,721 8377 3965	4663 5263	34 4278	36
65	2,723 0380 7066	4697 9541	34 3864	35
66	2,724 2398 3170	9,450 4732 3405	34 3450	34
67	2,725 4430 2639	4766 6865	34 3036	33
68	2,726 6476 5809	4800 9891	34 2623	32
69	2,727 8537 3029	4835 2514	34 2209	31
70	2,729 0612 4644	4869 4723	34 1795	30
71	2,730 2702 1006	9,450 4903 6518	34 1381	29
72	2,731 4806 2461	4937 7899	34 0968	28
73	2,732 6924 9366	4971 8867	34 0554	27
74	2,733 9058 2089	5005 9421	34 0140	26
75	2,735 1206 0928	5039 9561	33 9726	25
76	2,736 3368 6297	9,450 5073 9287	33 9313	24
77	2,737 5545 8533	5107 8600	33 8899	23
78	2,738 7737 7994	5141 7499	33 8485	22
79	2,739 9944 5039	5175 5984	33 8072	21
80	2,741 2166 0032	5209 4056	33 7658	20
81	2,742 4402 3330	9,450 5243 1715	33 7245	19
82	2,743 6653 5300	5276 8980	33 6831	18
83	2,744 8919 6306	5310 5791	33 6418	17
84	2,746 1200 6713	5344 2209	33 6004	16
85	2,747 3496 6880	5377 8213	33 5591	15
86	2,748 5807 7204	9,450 5411 3804	33 5178	14
87	2,749 8133 8038	5444 8982	33 4764	13
88	2,751 0474 9739	5478 3767	33 4350	12
89	2,752 2831 2085	5511 8096	33 3937	11
90	2,753 5202 7267	5545 2033	33 3523	10
91	2,754 7589 3861	9,450 5578 5556	33 3109	09
92	2,755 9991 2813	5611 8665	33 2696	08
93	2,757 2408 4535	5645 1361	33 2282	07
94	2,758 4840 9098	5678 3643	33 1868	06
95	2,759 7288 7770	5711 5511	33 1455	05
96	2,760 9752 0069	9,450 5744 6966	33 1041	04
97	2,762 2230 6613	5777 8007	33 0627	03
98	2,763 4724 7948	5810 8584	33 0214	02
99	2,764 7234 4142	5843 8848	33 [illegible]	10
100	2,765 9759 5882	5876 8648		00

$v = 8..,000...$

$k = 92^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	2,766 9759 5882	9,450 5876 8648	32 9387	100
01	2,767 2300 3459	9,450 5909 8035	32 8973	99
02	2,768 4866 7264	5942 7008	32 8560	98
03	2,769 7428 7689	5975 5668	32 8146	97
04	2,771 0016 5130	6008 3714	32 7733	96
05	2,772 2619 8982	6041 1447	32 7319	95
06	2,773 5239 2642	9,450 6073 8766	32 6906	94
07	2,774 7874 3509	6106 5672	32 6492	93
08	2,776 0525 2983	6139 2164	32 6079	92
09	2,777 3192 1467	6171 8243	32 5666	91
10	2,778 5874 9362	6204 3908	32 5253	90
11	2,779 8573 7077	9,450 6236 9161	32 4839	89
12	2,781 1288 5015	6269 4000	32 4426	88
13	2,782 4019 3585	6301 8426	32 4012	87
14	2,783 6766 3196	6334 2438	32 3599	86
15	3,784 9529 4259	6366 6037	32 3185	85
16	2,786 2308 7187	9,450 6398 9222	32 2772	84
17	2,787 5104 2395	6431 1994	32 2358	83
18	2,788 7916 0298	6463 4352	32 1945	82
19	2,790 0744 1314	6495 6297	32 1531	81
20	2,791 3588 5860	6527 7828	32 1118	80
21	2,792 6449 4359	9,450 6559 8946	32 0705	79
22	2,793 9326 7234	6591 9651	32 0292	78
23	2,795 2220 4907	6623 9943	31 9878	77
24	2,796 5130 7803	6655 9821	31 9465	76
25	2,797 8067 6361	6687 9286	31 9052	75
26	2,799 1001 0980	9,450 6719 8338	31 8638	74
27	2,800 3961 2118	6751 6976	31 8225	73
28	2,801 6938 0199	6783 5201	31 7812	72
29	2,802 9931 5657	6815 3013	31 7398	71
30	2,804 2941 8927	6847 0411	31 6984	70
31	2,806 5969 0445	9,450 6878 7396	31 6571	69
32	2,806 9013 0652	6910 3966	31 6157	68
33	2,808 2073 9907	6942 0123	31 5744	67
34	2,809 5151 8893	6973 5867	31 5331	66
35	2,810 8246 7816	7005 1198	31 4917	65
36	2,812 1358 7199	9,450 7036 6115	31 4504	64
37	2,813 4487 7491	7068 0619	31 4091	63
38	2,814 7633 9142	7099 4710	31 3677	62
39	2,816 0797 2601	7130 8387	31 3264	61
40	2,817 3977 8323	7162 1651	31 2851	60
41	2,818 7175 6763	9,450 7193 4502	31 2438	59
42	2,820 0390 8376	7224 6940	31 2025	58
43	2,821 3623 3622	7255 8965	31 1612	57
44	2,822 6873 2960	7287 0577	31 1198	56
45	2,824 0140 6854	7318 1775	31 0786	55
46	2,825 3425 5760	9,450 7349 2560	31 0372	54
47	2,826 6728 0153	7380 2932	30 9959	53
48	2,828 0048 0497	7411 2891	30 9545	52
49	2,829 3385 7260	7442 2436	30 9132	51
50	2,830 6741 0915	7473 1568		50

$v = 7..,000...$

$k = 92^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	2,830 6741 0916	9,450 7473 1568	30 8719	50
51	2,832 0114 1936	9,450 7504 0287	30 8306	49
52	2,833 3506 0796	7534 8593	30 6892	48
53	2,834 6913 7872	7565 6486	30 7479	47
54	2,836 0340 3944	7596 3964	30 7066	46
55	2,837 3784 9182	7627 1030	30 6653	45
56	2,838 7247 4203	9,450 7657 7683	30 6239	44
57	2,840 0727 9451	7688 3922	30 5826	43
58	2,841 4226 5438	7718 9748	30 5412	42
59	2,842 7743 2631	7749 5160	30 4999	41
60	2,844 1278 1540	7780 0159	30 4586	40
61	2,845 4831 2651	9,450 7810 4745	30 4173	39
62	2,846 8402 6468	7840 8010	30 3760	38
63	2,848 1992 3460	7871 2678	30 3347	37
64	3,849 5600 4193	7901 6025	30 2934	36
65	2,850 9226 9038	7931 8959	30 2521	35
66	2,852 2871 8619	9,450 7962 1480	30 2108	34
67	2,853 6535 3409	7992 3588	30 1695	33
68	2,855 0217 3887	8002 5283	30 1281	32
69	2,856 3918 0590	8052 6564	30 0868	31
70	2,857 7637 4018	8082 7432	30 0455	30
71	2,859 1375 4687	9,450 8112 7887	30 0042	29
72	2,860 5132 3110	8142 7929	29 9629	28
73	2,861 8907 9806	8172 7558	29 9216	27
74	2,863 2702 5292	8202 6774	29 8803	26
75	2,864 6516 0092	8232 5577	29 8390	25
76	2,866 0348 4729	9,450 8262 3967	29 7976	24
77	2,867 4199 9728	8292 1943	29 7563	23
78	2,868 8070 5617	8321 9506	29 7150	22
79	2,870 1960 2928	8351 6656	29 6737	21
80	2,871 5869 2192	8381 3393	29 6324	20
81	5,872 9797 3945	9,450 8410 9717	29 5911	19
82	2,874 3744 8724	8440 5628	29 5498	18
83	2,875 7711 7067	8470 1126	29 5085	17
84	2,877 1697 9515	8499 6211	29 4672	16
85	2,878 5703 6614	8529 0883	29 4259	15
86	2,879 9728 8909	9,450 8558 5142	29 3846	14
87	2,881 3773 6947	8587 8988	29 3433	13
88	2,882 7838 1280	8617 2421	29 3020	12
89	2,884 1922 2461	8646 5441	29 2607	11
90	2,885 6026 1045	8675 8048	29 2194	10
91	2,887 0149 7589	9,450 8705 0242	29 1781	09
92	2,888 4293 2654	8734 2023	29 1367	08
93	2,889 8456 6801	8763 3390	29 0954	07
94	2,891 2640 0595	8792 4344	29 0541	06
95	2,892 6843 4604	8821 4885	29 0128	05
96	2,894 1066 9398	9,450 8850 5013	28 9715	04
97	2,895 5310 5547	8879 4728	28 9302	03
98	2,896 9574 3628	8908 4030	28 8889	02
99	2,898 3858 4216	8937 2919	23 8476	01
100	2,899 8162 7891	8966 1395		00

$v = 7..,000...$

$k = 93^0.$

1	ℒ. k.	ℒ. k + log. v.	D. 1'.	1
00	2,899 8162 7891	9,450 8966 1395	28 8063	100
01	2,901 2487 8236	9,450 8994 9458	28 7650	99
02	2,902 6832 6832	9023 7108	28 7237	98
03	2,904 1198 3269	9052 4345	28 6824	97
04	2,905 5584 5136	9081 1169	28 6411	96
05	2,906 9991 3024	9109 7580	28 5998	95
06	2,908 4418 7528	9,450 9138 3578	28 5585	94
07	2,909 8866 9245	9166 9163	28 5173	93
08	2,911 3325 8775	9195 4336	28 4760	82
09	2,912 7825 6720	9223 9096	28 4347	91
10	2,914 2336 3684	9252 3443	28 3934	90
11	2,915 6868 0276	9,450 9280 7377	28 3521	89
12	2,917 1420 7105	9309 0898	28 3108	88
13	2,918 5994 4784	9337 4006	28 2695	87
14	2,920 0589 3929	9365 6701	28 2283	86
15	2,921 5205 5158	9393 8984	28 1870	85
16	2,922 9842 9092	9,450 9422 0854	28 1457	84
17	2,924 4501 6354	9450 2311	28 1045	83
18	2,925 9181 7572	9478 3356	28 0632	82
19	2,927 3883 3374	9506 3988	28 0219	81
20	2,928 8606 4390	9534 4207	27 9806	80
21	2,930 3351 1257	9,450 9562 4012	27 9392	79
22	2,931 8117 4610	9590 3404	27 8979	78
23	2,933 2905 5092	9618 2383	27 8566	77
24	2,934 7715 3346	9646 0949	27 8153	76
25	2,936 254[illegible] 0015	9673 9102	27 7741	75
26	2,937 7400 5752	9,450 9701 6843	27 7328	74
27	2,939 2276 1207	9729 4171	27 6915	13
28	2,940 7173 7034	9757 1086	27 6502	72
29	2,942 2093 3801	9784 7588	27 6089	71
30	2,943 7035 2439	9812 3677	27 5677	70
31	2,945 1999 3342	9,460 9839 9354	27 5264	69
32	2,946 6985 7265	9867 4618	27 4851	68
33	2,948 1994 4878	9894 9469	27 4438	67
34	5,949 7025 6853	9922 3907	27 4025	66
35	2,951 2079 3867	9949 7932	27 3613	65
36	2,952 7154 6598	9,450 [illegible]	27 3200	64
37	2,964 2254 5797	9,451 0004 474[illegible]	27 2787	63
38	2,955 7376 1039	0031 753[illegible]	27 2374	62
39	2,957 2520 5921	0058 9906	27 1961	61
40	2,958 7687 8365	0086 1867	27 1548	60
41	2,960 2877 9966	9,451 0113 3415	27 1136	59
42	2,961 8091 1418	0140 4550	27 0722	58
43	2,963 3327 3424	0167 5272	27 0310	57
44	2,964 8586 6688	0194 5582	26 9897	56
45	2,966 3869 1916	0221 5479	26 9484	55
46	2,967 9174 9816	9,451 0248 4963	26 9072	54
47	2,969 4504 1108	0275 4035	26 8659	53
48	2,970 9856 6502	0302 2694	26 8246	52
49	2,972 5232 6720	0329 0940	26 7834	51
50	[illegible] 2486	0355 8774		50

$v = 6\,..,000\,...$

$k = 93^0.$

1	ℒ. k.	ℒ. k + log. v.	D. 1'.	1
50	2,974 0632 2486	9,451 0355 8774	26 7421	50
51	2,975 6055 4525	9,451 0382 6195	26 7008	49
52	2,977 1502 3568	0409 3203	26 6596	48
53	2,978 6973 0349	0435 9799	26 6183	47
54	2,980 2467 5604	0462 5982	26 5770	46
55	2,981 7986 0073	0489 1752	26 5358	45
56	2,983 3528 4499	9,451 0515 7109	26 4945	44
57	1,984 9094 9631	0542 2054	26 4532	43
58	2,986 4685 6218	0568 6686	26 4120	42
59	2,988 0300 5014	0595 0700	7707	41
60	2,989 5939 6778	0621 4413	[illegible] 3294	40
61	2,991 1603 2270	9,451 0647 7707	26 2881	39
62	2,992 7291 2254	0674 0588	26 2468	38
63	2,994 3003 7499	0700 3056	26 2056	37
64	2,995 8740 8778	0726 5112	26 1643	36
65	2,997 4502 6866	0752 6755	26 1230	35
66	2,999 0289 2542	9,451 0778 7985	26 0818	34
67	3,000 6100 6589	0804 8803	26 0405	33
68	3,002 1936 9794	0830 9208	25 9992	32
69	3,003 7798 2946	0856 9200	25 9580	31
70	3,005 3684 6842	0882 8780	25 9167	30
71	3,006 9596 2277	9,451 0908 7947	25 8754	29
72	2,008 5533 0055	0934 6701	25 8342	28
73	3,010 1495 0989	0960 5043	25 7929	27
74	3,011 7482 5862	0986 2972	25 7516	26
75	3,013 3495 5515	1012 0488	25 7104	25
76	3,014 9534 0756	9,451 1037 7592	25 6691	24
77	3,016 5598 2405	1063 4283	25 6278	23
78	3,018 1688 1289	1089 0562	25 5867	22
79	3,019 7803 6236	1114 6429	25 5454	21
80	3,021 3945 4080	1140 1883	25 5041	20
81	3,023 0112 9656	9,451 1165 6924	25 4628	19
82	3,024 6306 5807	1191 1552	25 4216	18
83	3,026 2526 3378	1216 5768	25 3803	17
84	3,027 8772 3218	1241 9571	25 3391	16
85	3,029 5044 6182	1267 2962	25 2978	15
86	3,031 1343 3126	9,451 1292 5940	25 2566	14
87	3,032 7668 4913	1317 8506	25 2153	13
88	3,034 4020 2408	1343 0659	25 1741	12
89	3,036 0398 6483	1368 2400	25 1329	11
90	3,037 6803 8012	1393 3728	25 0915	10
91	3,039 3235 7873	9,451 1418 4643	25 0502	09
92	3,040 9694 6949	1443 5145	25 0090	08
93	3,042 6180 6130	1468 5235	24 9677	07
94	3,944 2693 6306	1493 4912	24 9255	06
95	3,045 9233 8374	1518 4177	24 8852	05
96	3,047 5801 3236	9,451 1543 3029	24 8440	04
97	3,049 2396 1797	1568 1469	24 8027	03
98	3,050 9018 4966	1592 9496	24 7615	02
99	3,052 5608 3658	1617 7111	24 7202	01
100	3,054 2345 8792	1642 4314		00

$v = 6\,..,000\,...$

$k = 94^{0}$.

l	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1'.	l
00	3,054 2345 8792	9,451 1642 4313	24 6790	100
01	3,055 9061 1292	9,451 1667 1103	24 6378	99
02	3,057 5784 2086	1691 7481	24 5966	98
03	3,059 2545 2107	1716 3446	24 5553	97
04	3,060 9334 2293	1740 8999	24 5140	96
05	3,062 6151 3685	1765 4139	24 4728	95
06	3,064 2996 6931	9,451 1789 8867	24 4316	94
07	3,065 9870 3283	1814 3182	24 3903	93
08	3,067 6772 3597	1838 7085	24 3490	92
09	3,069 3702 8835	1863 0575	24 3078	91
10	3,071 0661 9964	1887 3653	24 2666	90
11	3,072 7649 7963	9,451 1911 6318	24 2253	89
12	3,074 4666 3782	1935 8571	24 1841	88
13	3,076 1711 8430	1960 0412	24 1427	87
14	3,077 8786 2882	1984 1839	24 1014	86
15	3,079 5889 8130	2008 2853	24 0602	85
16	3,081 3022 5173	9,451 2032 3455	24 0189	84
17	3,083 0184 5009	2056 3644	23 9777	83
18	3,084 7375 8648	2080 3421	23 9364	82
19	3,086 4596 7100	2104 2785	23 8952	81
20	3,088 1847 1383	2128 1737	23 8540	80
21	3,089 9127 2519	9,451 2152 0276	23 8128	79
22	3,091 6437 1537	2175 8404	23 7716	78
23	3,093 3776 8470	2199 6120	23 7303	77
24	3,095 1146 7354	2223 3423	23 6891	76
25	3,096 8546 6235	2247 0314	23 6479	75
26	3,098 5976 7162	9,451 2270 6793	23 6066	74
27	3,100 3437 1188	2294 2869	23 5654	73
28	3,102 0927 9376	2317 8513	23 5242	72
29	3,103 8449 2790	2341 3765	23 4829	71
30	3,105 6001 2502	2364 8584	23 4417	70
31	3,107 3583 9589	9,451 2388 3001	23 4004	69
32	3,109 1197 5133	2411 7006	23 3591	68
33	3,110 8842 0224	2435 0596	23 3179	67
34	3,112 6516 5955	2458 3775	23 2767	66
35	3,114 4224 3428	2481 6542	23 2354	65
36	3,116 1962 3747	9,451 2504 8896	23 1942	64
37	3,117 9731 8026	2528 0838	23 1530	63
38	3,119 7532 7379	2551 2368	23 1117	62
39	3,121 5365 2933	2574 3485	23 0706	61
40	3,123 3229 5818	2597 4190	23 0292	60
41	3,125 1125 7165	9,451 2620 4480	22 9880	59
42	3,126 9063 8122	2643 4360	22 9468	58
43	3,128 7013 9836	2666 3828	22 9056	57
44	3,130 5006 3459	2689 2884	22 8643	56
45	3,132 3031 0153	2712 1527	22 8231	55
46	3,134 1088 1084	9,451 2734 9758	22 7819	54
47	3,135 9177 7425	2757 7577	22 7407	53
48	3,137 7300 0357	2780 4984	22 6994	52
49	3,139 5455 1063	2803 1978	22 6582	51
50	3,141 3643 0738	2825 8560		50

$v = 5..,000...$

$k = 94^{0}$.

l	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1'.	l
50	3,141 3643 0738	9,451 2825 8560	22 6170	50
51	3,143 1864 0680	9,451 2848 4730	22 5758	49
52	3,145 0118 1794	2871 0488	22 5344	48
53	3,146 8405 5690	2893 5832	22 4932	47
54	3,148 6726 3190	2916 0764	22 4520	46
55	3,150 5080 5821	2938 5284	22 4108	45
56	3,152 3468 4707	9,451 2960 9392	22 3696	44
57	3,154 1890 1094	2983 3087	22 3283	43
58	3,156 0345 6227	3005 6370	22 2871	42
59	3,157 8835 1357	3027 9241	22 2459	41
60	3,159 7358 7745	3050 1700	22 2046	40
61	3,161 5916 6656	9,451 3072 3746	22 1634	39
62	3,163 4508 9364	3094 5380	22 1222	38
63	3,165 3135 7152	3116 6602	22 0810	37
64	3,167 1797 1305	3138 7412	22 0398	36
65	3,169 0493 3121	3160 7810	21 9986	35
66	3,170 9224 3899	9,451 3182 7796	21 9573	34
67	3,172 7990 4952	3204 7368	21 9161	33
68	3,174 6791 7595	3226 6529	21 8749	32
69	3,176 5628 3154	3248 5278	21 8337	31
70	3,178 4500 2961	3270 3615	21 7924	30
71	3,180 3407 8364	9,451 3292 1539	21 7512	29
72	3,182 2351 0681	3313 9051	21 7100	28
73	3,184 1330 1297	3335 6151	21 6688	27
74	3,186 0345 1566	3357 2839	21 6275	26
75	3,187 9396 2856	3378 9114	21 5862	25
76	3,189 8483 6544	9,451 3400 4976	21 5450	24
77	3,191 7607 4020	3422 0426	21 5038	23
78	3,193 6767 6676	3443 5464	21 4626	22
79	3,195 5964 5915	3465 0090	21 4214	21
80	3,197 5198 3143	3486 4304	21 3802	20
81	3,199 4468 9790	9,451 3507 8106	21 3390	19
82	3,201 3776 7271	3529 1496	21 2978	18
83	3,203 3121 7024	3550 4474	21 2566	17
84	3,205 2504 0492	3571 7040	21 2154	16
85	3,207 1923 9128	3592 9194	21 1741	15
86	3,209 1381 4390	9,451 3614 0935	21 1329	14
87	3,211 0876 7747	3635 2264	21 0917	13
88	3,213 0410 0678	3656 3181	21 0505	12
89	3,214 9981 4666	3677 3686	21 0093	11
90	3,216 9591 1208	3698 3779	20 9680	10
91	3,218 9239 1804	9,451 3719 3459	20 9268	09
92	3,220 8925 7970	3740 2727	20 8856	08
93	3,222 8651 1224	3761 1583	20 8444	07
94	3,224 8415 3099	3782 0027	20 8032	06
95	3,226 8218 5132	3802 8059	20 7619	05
96	3,228 8060 8871	9,451 3823 5678	20 7206	04
97	3,230 7942 5876	3844 2884	20 6794	03
98	3,232 7863 7709	3864 9678	20 6382	02
99	3,234 7824 5952	3885 6060	20 5970	01
100	3,236 7825 2188	3906 2030		00

$v = 5..,000...$

$k = 95^0$.

1	ℒ. k.	ℒ. k + log. v.	D. 1′.	1
00	3,236 7825 2188	9,451 3906 2030	20 5558	100
01	3,238 7866 8013	9,451 3926 7588	20 5146	99
02	3,240 7946 5032	3947 2734	20 4734	98
03	3,242 8067 4859	3967 7468	20 4322	97
04	3,244 8228 9118	3988 1790	20 3910	96
05	3,246 8430 9444	4008 5700	20 3498	95
06	3,248 8673 7480	9,451 4028 9198	20 3086	94
07	3,260 8957 4880	4049 2284	20 2674	93
08	3,252 9282 3309	4069 4958	20 2262	92
09	3,254 9648 4441	4089 7220	20 1850	91
10	3,257 0055 9960	4109 9070	20 1438	90
11	3,259 0505 1561	9,451 4130 0508	20 1026	89
12	3,261 0996 0949	4150 1534	20 0614	88
13	3,263 1528 9840	4170 2148	20 0202	87
14	3,265 2103 9960	4190 2350	19 9790	86
15	3,267 2721 3047	4210 2140	19 9378	85
16	3,269 3381 0847	9,451 4230 1518	19 8965	84
17	3,271 4083 5118	4250 0483	19 8553	83
18	3,273 4828 7631	4269 9036	19 8141	82
19	3,275 5617 0167	4289 7177	19 7729	81
20	3,277 6448 4516	4309 4906	19 7316	80
21	3,279 7323 2481	9,451 4329 2222	19 6904	79
22	3,281 8241 5877	4348 9126	19 6492	78
23	3,283 9203 6530	4368 5618	19 6080	77
24	3,286 0209 6275	4388 1698	19 5668	76
25	3,288 1259 6963	4407 7366	19 5256	75
26	3,290 2354 0453	9,451 4427 2622	19 4844	74
27	3,292 3492 8617	4446 7466	19 4432	73
28	3,294 4676 3340	4466 1898	19 4021	72
29	3,296 5904 6618	4485 5919	19 3609	71
30	3,298 7178 0058	4504 9528	19 3197	70
31	3,300 8496 5881	9,451 4524 2725	19 2785	69
32	3,302 9860 5919	4543 5510	19 2373	68
33	3,305 1270 2117	4562 7883	19 1961	67
34	3,307 2725 6432	4581 9844	19 1549	66
35	3,309 4227 0835	4601 1393	19 1137	65
36	3,311 5774 7308	9,451 4620 2530	19 0726	64
37	3,313 7368 7848	4639 3256	19 0314	63
38	3,315 9009 4462	4658 3570	18 9902	62
39	3,318 0696 9173	4677 3472	18 9490	61
40	3,320 2431 4014	4696 2962	18 9077	60
41	3,322 4213 1033	9,451 4715 2039	18 8665	59
42	3,324 6042 2293	4734 0704	18 8253	58
43	3,326 7918 9868	4752 8957	18 7841	57
44	3,328 9843 5847	4771 6798	18 7429	56
45	3,331 1816 2332	4790 4227	18 7017	55
46	3,333 3837 1440	9,451 4809 1244	18 6605	54
47	3,335 5906 5301	4827 7849	18 6193	53
48	3,337 8024 6059	4846 4042	18 5781	52
49	3,340 0191 5873	4864 9823	18 5369	51
50	3,342 2407 6916	4883 5192		50

$v = 4..,000...$

$k = 95^0$.

1	ℒ. k.	ℒ. k + log. v.	D. 1′.	1
50	3,342 2407 6916	9,451 4883 5192	18 4957	50
51	3,344 4673 1375	9,451 4902 0149	18 4545	49
52	3,346 6988 1453	4920 4694	18 4133	48
53	3,348 9352 9366	4938 8527	18 3721	47
54	3,351 1767 7346	4957 2548	18 3309	46
55	3,353 4232 7641	4975 5857	18 2897	45
56	3,355 6748 2511	9,451 4993 8754	18 2485	44
57	3,357 9314 4235	5012 1239	18 2073	43
58	3,360 1931 5106	5030 3312	18 1661	42
59	3,362 4599 7429	5048 4973	18 1250	41
60	3,364 7319 3532	5066 6223	18 0838	40
61	3,367 0090 5754	9,451 5084 7061	18 0426	39
62	3,369 2913 6450	5102 7487	18 0014	38
63	3,371 5788 7992	5120 7501	17 9602	37
64	3,373 8716 2769	5138 7103	17 9190	36
65	3,376 1696 3185	5156 6293	17 8778	35
66	3,378 4729 1661	9,451 5174 5071	17 8366	34
67	3,380 7815 0637	5192 3437	17 7953	33
68	3,383 0954 2567	5210 1391	17 7542	32
69	3,385 4146 9983	5227 8933	17 7131	31
70	3,387 7393 5196	5245 6064	17 6719	30
71	3,390 0694 0891	9,451 5263 2783	17 6307	29
72	3,392 4048 9532	5280 9090	17 5895	28
73	3,394 7458 3663	5298 4985	17 5483	27
74	3,397 0922 5842	5316 0468	17 5071	26
75	3,399 4441 8647	5333 5539	17 4659	25
76	3,401 8016 4675	9,451 5351 0198	17 4247	24
77	3,404 1646 6541	5368 4445	17 3835	23
78	3,406 5332 6877	5385 8280	17 3424	22
79	3,408 9074 8336	5403 1704	17 3012	21
80	3,411 2873 3589	5420 4716	17 2600	20
81	3,413 6728 5324	9,451 5437 7316	17 2188	19
82	3,416 0640 6252	5454 9504	17 1776	18
83	3,418 4609 9101	5472 1280	17 1364	17
84	3,420 8636 6618	5489 2644	17 0952	16
85	3,423 2721 1573	5506 3596	17 0541	15
86	3,425 6863 6755	9,451 5523 4137	17 0129	14
87	3,428 1064 4970	5540 4266	16 9717	13
88	3,430 5323 9049	5557 3983	16 9305	12
89	3,432 9642 1839	5574 4288	16 8893	11
90	3,436 4019 6212	5591 2181	16 8482	10
91	3,437 8456 5059	9,451 5608 0663	16 8070	09
92	3,440 2953 1293	5624 8733	16 7658	08
93	3,442 7509 7847	5641 6391	16 7246	07
94	3,445 2126 7677	5658 3637	16 6834	06
95	3,447 6804 3761	5675 0475	16 6423	05
96	3,450 1542 9098	9,451 5691 6894	16 6011	04
97	3,452 6342 6711	5708 2905	16 5599	03
98	3,455 1203 9643	5724 8504	16 5187	02
99	3,457 6127 0961	5741 3091	16 4774	10
100	3,460 1112 3755	5757 8465		00

$v = 4..,000...$

$k = 96^0$.

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	3,460 1112 3756	9,451 5757 8465	16 4363	100
01	3,462 6160 1140	9,451 5774 2828	16 3951	99
02	3,465 1270 6251	5790 6779	16 3539	98
03	3,467 6444 2260	5807 0318	16 3127	97
04	3,470 1681 2320	5823 3445	16 2716	96
05	3,472 6981 9671	5839 6161	16 2304	95
06	3,475 2346 7536	9,451 5855 8465	16 1892	94
07	3,477 7775 9171	5872 0357	16 1480	93
08	3,480 3260 7858	5888 1837	16 1069	92
09	3,482 8828 6908	5904 2906	16 0657	91
10	3,485 4452 9661	5920 3563	16 0245	90
11	3,488 0142 9447	9,451 5936 3808	15 9833	89
12	3,490 5898 9679	5952 3641	15 9422	88
13	3,493 1721 3761	5968 3063	15 9011	87
14	3,495 7610 5128	5984 2074	15 8590	86
15	3,498 3566 7246	6000 0673	15 8187	85
16	3,500 9590 3602	9,451 6015 8860	15 7776	84
17	3,503 5681 7718	6031 6636	15 7364	83
18	3,506 1841 3140	6047 4000	15 6952	82
19	3,508 8069 3440	6063 0952	15 6540	81
20	3,511 4366 2220	6078 7492	15 6128	80
21	3,514 0732 3112	9,451 6094 3620	15 5716	79
22	3,516 7167 9775	6109 9336	15 5304	78
23	3,519 3673 5896	6125 4640	15 4892	77
24	3,522 0249 5194	6140 9532	15 4481	76
25	3,524 6896 1416	6156 4013	15 4069	75
26	3,527 3613 8341	9,451 6171 8082	15 3657	74
27	3,530 0402 9775	6187 1739	15 3246	73
28	3,532 7263 9557	6202 4984	15 2834	72
29	3,535 4197 1558	6217 7818	15 2422	71
30	3,538 1202 9677	6233 0240	15 2010	70
31	3,540 8281 7846	9,451 6248 2250	15 1599	69
32	3,543 5434 0033	6293 3849	15 1188	68
33	3,546 2660 0232	6278 5037	15 0776	67
34	3,548 9960 2473	6293 5813	15 0364	66
35	3,551 7335 0819	6308 6177	14 9962	65
36	3,554 4784 9366	9,451 6323 6129	14 9541	64
37	3,557 2310 2244	6338 5670	14 9129	63
38	3,559 9911 3617	6353 4799	14 8717	62
39	3,562 7588 7083	6368 3516	14 8305	61
40	3,565 5342 8676	6383 1821	14 7894	60
41	3,568 3174 0867	9,451 6397 9716	14 7482	59
42	3,571 1082 8557	6412 7197	14 7070	58
43	3,573 9069 6090	6427 4267	14 6659	57
44	3,576 7134 7841	6442 0926	14 6247	56
45	3,579 5278 8226	6456 7173	14 5835	55
46	3,582 3502 1695	9,451 6471 3008	14 5424	54
47	3,585 1805 2739	6485 8432	14 5012	53
48	3,588 0188 5885	6500 3444	14 4600	52
49	3,590 8652 [illegible]698	6514 8044	14 4189	51
50	3,593 7197 6785	6529 2232		50

$v = 3..,000...$

$k = 96^0$.

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	3,593 7197 6785	9,451 6529 2233	14 3777	50
51	3,596 5824 3790	9,451 6543 6010	14 3365	49
52	3,599 4533 1398	6557 9375	14 2954	48
53	3,602 3324 4336	6572 2329	14 2542	47
54	3,605 2198 7366	6586 4871	14 2129	46
55	3,608 1156 5297	6600 7000	14 1718	45
56	3,611 0198 2981	9,451 6614 8718	14 1306	44
57	3,613 9324 5308	6629 0024	14 0894	43
58	3,616 8535 7212	6643 0918	14 0483	42
59	3,619 7832 3673	6657 1401	14 0071	41
60	3,622 7214 9712	6671 1472	13 9659	40
61	3,625 6684 0393	9,451 6685 1131	13 9247	39
62	3,628 6240 0830	6699 0378	13 8836	38
63	3,631 5883 6179	6712 9214	13 8424	37
64	3,634 5615 1642	6726 7638	13 8013	36
65	3,637 5435 2469	6740 5651	13 7601	35
66	3,640 5344 3965	9,451 6754 3252	13 7190	34
67	3,643 5343 1444	6768 0442	13 6778	33
68	3,646 5432 0329	6781 7220	13 6367	32
69	3,649 5611 6050	6795 3587	13 5955	31
70	3,352 5882 4096	6808 9542	13 5544	30
71	3,655 6245 0010	9,451 6822 5086	13 5132	29
72	3,658 6699 9380	6836 0218	13 4721	28
73	3,661 7247 7850	6849 4939	13 4309	27
74	3,664 7890 1112	6862 9248	13 3898	26
75	3,667 8624 4914	6876 3146	13 3486	25
76	3,670 9454 5053	9,451 6889 6632	13 3075	24
77	3,674 0379 7385	6902 9707	13 2664	23
78	3,677 1400 7817	6916 2371	13 2253	22
79	3,680 2518 2311	6929 4624	13 1841	21
80	3,683 3732 6886	6942 6465	13 1427	20
81	3,686 5044 7614	9,451 6955 7892	13 1015	19
82	3,689 6455 0629	6968 8907	13 0604	18
83	3,692 7964 2124	6981 9511	13 0192	17
84	3,695 9572 8345	6994 9703	12 9781	16
85	3,699 1281 5602	7007 9484	12 9369	15
86	3,702 3091 0263	9,451 7020 8853	12 8958	14
87	3,705 5001 8757	7033 7811	12 8546	13
88	3,708 7014 7677	7046 6357	12 8136	12
89	3,711 9130 3275	7059 4492	12 7723	11
90	3,715 1349 2468	7072 2215	12 7312	10
91	3,718 3672 1838	9,451 7084 9627	12 6900	09
92	3,721 6099 8130	7097 6427	12 6489	08
93	3,724 8632 8158	7110 2916	12 6077	07
94	3,728 1271 8798	7122 8993	12 5666	06
95	3,731 4017 6990	7136 4659	12 5254	05
96	3,734 6870 9773	9,451 7147 9913	12 4844	04
97	3,737 9832 4207	7160 4757	12 4432	03
98	3,741 2902 7452	7172 8189	12 4021	02
99	3,744 6082 6736	7185 3210	12 3609	01
100	3,747 9372 9354	7197 6819		00

$v = 3..,000...$

$k = 97^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	3,747 9372 9254	9,451 7197 6819	12 3196	100
01	3,750 2774 2076	9,451 7210 0015	12 2785	99
02	3,754 6287 4150	7222 2600	12 2373	98
03	3,757 9913 1993	7234 5173	12 1962	97
04	3,761 3652 1703	7246 7135	12 1559	96
05	3,764 7505 8052	7258 8685	12 1139	95
06	3,768 1473 3091	9,451 7270 9824	12 0727	94
07	3,771 5556 9650	7283 0551	12 0316	93
08	3,774 9757 0641	7295 0867	11 9904	92
09	3,778 4074 4054	7307 0771	11 9493	91
10	3,781 8509 1966	7319 0264	11 9081	90
11	3,785 3064 0534	9,451 7330 9345	11 8670	89
12	3,788 7738 0002	7342 8015	11 8258	88
13	3,792 2532 4698	7354 6273	11 7846	87
14	3,795 7448 3038	7366 4119	11 7434	86
15	3,799 2486 3527	7378 1553	11 7023	85
16	3,802 7647 4760	9,451 7389 8576	11 6611	84
17	3,806 2952 5423	7401 5187	11 6200	83
18	3,809 8342 4294	7413 1387	11 5788	82
19	3,813 8878 0242	7424 7175	11 5377	81
20	3,816 9540 2236	7436 2552	11 4965	80
21	3,820 5329 9335	9,451 7447 7517	11 4554	79
22	3,824 1248 0702	7459 2071	11 4142	78
23	3,827 7295 5595	7470 6213	11 3731	77
24	3,831 3473 3373	7481 9944	11 3319	76
25	3,834 9782 3497	7493 3263	11 2908	75
26	3,838 6223 5531	9,451 7504 6171	11 2496	74
27	3,842 2797 9149	7515 8667	11 2085	73
28	3,845 9506 4123	7527 0752	11 1673	72
29	3,849 6350 0338	7538 2425	11 1262	71
30	3,853 3329 7788	7549 3687	11 0850	70
31	3,857 0446 6577	9,451 7560 4537	11 0439	69
32	3,860 7701 6925	7571 4976	11 0027	68
33	3,864 5095 9163	7582 5003	10 9617	67
34	3,868 2630 3742	7593 4620	10 9205	66
35	3,872 0306 1227	7604 3825	10 8794	65
36	3,875 8124 2305	9,451 7015 2619	10 8382	64
37	3,879 6085 7784	7626 1901	10 7971	63
38	3,883 4191 8596	7636 8972	10 7559	62
39	3,887 2443 5799	7647 6531	10 7148	61
40	3,891 0842 0578	7658 3679	10 6736	60
41	3,894 9388 4246	9,451 7669 0415	10 6325	59
42	3,898 8083 8248	7679 6740	10 5913	58
43	3,902 6029 4164	7690 2653	10 5502	57
44	3,906 5926 3708	7700 8155	10 5090	56
45	3,910 5075 8730	7711 3245	10 4679	55
46	3,914 4379 1223	9,451 7721 7924	10 4267	54
47	3,918 3837 3319	7732 2191	10 3856	53
48	3,922 3461 7296	7742 6047	10 3444	52
49	3,926 3223 5578	7752 9491	10 3033	51
50	3,930 3154 0738	7763 2524		50

$v = 2..,000...$

$k = 97^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	3,930 3154 0738	9,451 7763 2524	10 2621	50
51	3,934 3244 5499	9,451 7773 5145	10 2210	49
52	3,938 3496 2710	7783 7355	10 1798	48
53	3,942 3910 5491	7793 9153	10 1387	47
54	3,946 4488 6947	7804 0540	10 0975	46
55	3,950 5232 0461	7814 1515	10 0564	45
56	3,954 6141 9550	9,451 7624 2079	10 0152	44
57	3,958 7219 7897	7834 2231	9 9741	43
58	3,962 8406 9357	7844 1972	9 9329	42
59	3,966 9884 7952	7854 1301	9 8918	41
60	3,971 1474 7885	7864 0219	9 8507	40
61	3,975 3238 3532	9,451 7873 8725	9 8096	39
62	3,979 5176 9454	7883 6821	9 7684	38
63	3,983 7292 0392	7893 4506	9 7273	37
64	3,987 9585 1276	7903 1778	9 6861	36
65	3,992 2057 7225	7912 8639	9 6450	35
66	3,996 4711 3554	9,451 7922 5089	9 6038	[illegible]
67	4,000 7547 5771	7932 1127	9 [illegible]	
68	4,005 0567 9588	7941 6754	9 5215	32
69	4,009 3774 0917	7951 1969	9 4804	31
70	4,013 7167 5881	7960 6773	9 4392	30
71	4,018 0750 0810	9,451 7970 1165	9 3981	29
72	4,022 4523 2251	7979 5146	9 3569	28
73	4,026 8488 6967	7988 8715	9 3158	27
74	4,031 2648 1946	7998 1373	9 2746	26
75	4,035 7003 4399	8007 4619	9 2335	25
76	4,040 1556 1769	9,451 8016 6954	9 1923	24
77	4,044 6308 1731	8025 8877	9 1512	23
78	4,049 1261 2202	8035 0389	9 1101	22
79	4,053 6417 1339	8044 1490	9 0690	21
80	4,058 1777 7545	8053 2180	9 0279	20
81	4,062 7344 9478	9,451 8062 2459	8 9868	19
82	4,067 3120 6049	8071 2327	8 9456	18
83	4,071 9106 6429	8080 1783	8 9045	17
84	4,076 5305 0060	8089 0828	8 8633	16
85	4,081 1717 6649	8097 9461	8 8222	15
86	4,085 8346 6181	9,451 8106 7683	8 7810	14
87	4,090 5193 8023	8115 5493	8 7399	13
88	4,095 2261 [illegible]	8124 2892	8 6987	12
89	4,099 9561 6532	8132 9879	8 6576	11
90	4,104 7066 3384	8141 6455	8 6164	10
91	4,109 4807 7423	9,451 8150 2619	8 5753	09
92	4,114 2773 9402	8158 8372	8 5341	08
93	4,119 0979 4387	8167 3713	8 4930	07
94	4,123 [illegible]414 1765	8175 8643	8 4518	06
95	4,128 9084 5248	8184 3161	8 4107	05
96	4,133 6092 7884	9,451 8192 7268	8 3696	04
97	4,138 6141 3059	8201 0963	8 3284	03
98	4,143 5532 4507	8209 4247	8 2872	02
99	4,148 5168 6314	8217 7119	8 2462	01
100	4,153 5052 2927	8225 9581		00

$v = 2..,000...$

$k = 98°.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	4,153 5056 2927	9,451 8225 9581	8 2060	100
01	4,158 5185 9169	9,451 8234 1631	8 1639	99
02	4,163 5672 0201	8242 3270	8 1228	98
03	4,168 6213 1625	8250 4498	8 0816	97
04	4,173 7111 9391	8258 5314	8 0405	96
05	4,178 8270 9863	8266 5719	7 9994	95
06	4,183 9692 9807	9,451 8274 5713	7 9582	94
07	4,189 1380 6405	8282 5296	7 9171	93
08	4,194 3336 7264	8290 4466	7 8760	82
09	4,199 5564 0422	8298 3226	7 8348	91
10	4,204 8065 4358	8306 1574	7 7937	90
11	4,210 0843 8006	9,451 8313 9511	7 7526	89
12	4,215 3902 0755	8321 7037	7 7114	88
13	4,220 7243 2466	8329 4151	7 6703	87
14	4,226 0870 3483	8337 0854	7 6292	86
15	4,231 4786 4639	8344 7146	7 5880	85
16	4,236 8094 7266	9,451 8352 3026	7 5469	84
17	4,242 3498 3211	8359 8495	7 5057	83
18	4,247 8300 4845	8267 3552	7 4645	82
19	4,253 3404 5071	8374 8197	7 4234	81
20	4,258 8813 7142	8382 2431	7 3823	80
21	4,264 4531 5670	9,451 8389 6254	7 3412	79
22	4,270 0561 4637	8396 9666	7 3001	78
23	4,275 6906 9410	8404 2667	7 2589	77
24	4,281 3571 6753	8411 5256	7 2178	76
25	4,287 0559 0042	8418 7434	7 1767	75
26	4,292 7872 9280	9,451 8425 9201	7 1355	74
27	4,298 5517 1107	8433 0556	7 0944	13
28	4,304 3495 3819	8440 1500	7 0633	72
29	4,310 1811 6383	8447 2033	7 0121	71
30	4,316 0469 8449	8454 2154	6 9710	70
31	4,321 9474 0372	9,451 8461 1864	6 9299	69
32	4,327 8828 3223	8468 1163	6 8867	68
33	4,333 8636 8809	8475 0050	6 8476	67
34	4,339 8603 9601	8481 8526	6 8065	66
35	4,245 9033 9201	8488 6591	6 7653	65
36	4,351 9831 1462	9,451 8495 4244	6 7242	64
37	4,358 1000 1406	8502 1486	6 6831	63
38	4,364 2545 4794	8508 8317	6 6418	62
39	4,370 4471 8237	8515 4736	6 6007	61
40	4,376 6783 9219	8522 0742	6 5597	60
41	4,382 9486 6117	9,451 8528 6339	6 5186	59
42	4,389 2584 8223	8535 1525	6 4775	58
43	4,395 6083 5766	8541 6300	6 4363	57
44	4,401 9987 9939	8546 0663	6 3952	56
45	4,408 4303 2924	8554 4615	6 3541	55
46	4,414 9034 7915	9,451 8560 8156	6 3129	54
47	4,421 4187 9146	8567 1285	6 2718	53
48	4,427 9768 1919	8573 4003	6 2306	52
49	4,434 5781 2628	8579 6309	6 1894	51
50	4,441 2232 8794	8585 8203		50

$v = 1 \ldots,000 \ldots$

$k = 98°.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	4,441 2232 8794	9,461 8585 8203	6 1483	50
51	4,447 9128 9092	9,451 8591 9686	6 1072	49
52	4,454 6475 3382	8598 0758	6 0660	48
53	4,461 4278 2741	8604 1418	6 0249	47
54	4,468 2543 9497	8610 1667	5 9838	46
55	4,475 1278 7263	8616 1505	5 9426	45
56	4,482 0189 0974	9,451 8622 0931	5 9015	44
57	4,489 0181 6921	8627 9946	5 8604	43
58	4,496 0363 2790	8633 8550	5 8192	42
59	4,503 1040 7705	8639 6742	5 7781	41
60	4,510 2221 2263	8645 4523	5 7370	40
61	4,517 3911 8580	9,451 8651 1893	5 6959	39
62	4,524 6120 0337	8656 8852	5 6548	38
63	4,531 8863 2818	8662 5400	5 6136	37
64	4,539 2119 2963	8668 1536	5 5725	36
65	4,546 5925 9418	8673 7261	5 5314	35
66	4,554 0281 2580	9,451 8679 2576	5 4902	34
67	4,561 5193 4655	8684 7477	5 4491	33
68	4,569 0670 9710	8690 1968	5 4080	32
69	4,576 6722 3728	8695 6048	5 3668	31
70	4,584 3356 4671	8700 9716	5 3257	30
71	4,592 0582 2537	9,451 8706 2973	5 2846	29
72	4,599 8408 9428	8711 5819	5 2434	28
73	4,607 6845 9608	8716 8253	5 2023	27
74	4,615 5902 9681	8722 0276	5 1613	26
75	4,623 5589 8159	8727 1889	5 1201	25
76	4,631 5916 6530	9,451 8732 3090	5 0790	24
77	4,639 6893 8343	8737 3880	5 0379	23
78	4,647 8531 9786	8742 4259	4 9967	22
79	4,656 0841 9667	8747 4226	4 9556	21
80	4,664 3834 9604	8752 3782	4 9145	20
81	4,672 7522 3616	9,451 8757 2927	4 8734	19
82	4,681 1915 9215	8762 1661	4 8323	18
83	4,689 7027 6506	8766 9984	4 7911	17
84	4,698 2869 8785	8771 7806	4 7500	16
85	4,706 9455 2559	8776 5395	4 7089	15
86	4,715 6796 7646	9,451 8781 2484	4 6677	14
87	4,724 4907 7290	8785 9161	4 6266	13
88	4,733 3801 8298	8790 5427	4 5855	12
89	4,742 3493 1151	8795 1282	4 5443	11
90	4,751 3996 0146	8799 6725	4 5032	10
91	4,760 5325 3835	9,451 8804 1757	4 4621	09
92	4,769 7496 3666	8808 6378	4 4209	08
93	4,779 0524 7141	8813 0587	4 3797	07
94	4,788 4426 4973	8817 4384	4 3386	06
95	4,797 9218 2755	8821 7770	4 2974	05
96	4,807 4917 0830	9,451 8826 0744	4 2563	04
97	4,817 1840 4485	8830 3307	4 2152	03
98	4,826 9106 4431	8834 5469	4 1740	02
99	4,836 7633 5516	8838 7199	4 1329	01
100	4,846 7149 9930	8842 8528		00

$v = 1 \ldots,000 \ldots$

$k = 99^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
00	4,846 7140 9930	9,451 8842 8528	4 0918	100
01	4,856 7648 4433	9,451 8846 9446	4 0507	99
02	4,866 9176 2086	8850 9953	4 0096	98
03	4,877 1745 2199	8855 0049	3 9686	97
04	4,887 5377 0588	8858 9734	3 9274	96
05	4,898 0093 9348	8862 0008	3 8862	95
06	4,908 5918 9643	9,451 8866 7870	3 8451	94
07	4,919 2875 7006	8870 6321	3 8040	93
08	4,930 0988 6657	8874 4361	3 7629	92
09	4,941 0283 1339	8878 1990	3 7218	91
10	4,952 0785 2175	8881 9208	3 6806	90
11	4,963 2521 9041	9,451 8885 6014	3 6395	89
12	4,974 5621 0962	8889 2409	3 5984	88
13	4,985 9811 6528	8892 8393	3 5573	87
14	4,997 8423 4341	8896 3966	3 5162	86
15	5,009 2387 3479	8899 9128	3 4750	85
16	5,021 0735 3994	9,451 8903 3878	3 4339	84
17	5,033 0500 7438	8906 8217	3 3928	83
18	5,045 1717 7419	8910 2145	3 3516	82
19	5,057 4422 0194	8913 5661	3 3106	81
20	5,069 8650 5299	8916 8766	3 2694	80
21	5,082 4441 6214	9,451 8920 1460	3 2283	79
22	5,095 1835 1078	8923 3743	3 1872	78
23	5,108 0872 3430	8926 5615	3 1460	77
24	5,121 1596 3047	8929 7075	3 1049	76
25	5,134 4051 0771	8932 8124	3 0638	75
26	5,147 8284 9442	9,451 8935 8762	3 0226	74
27	5,161 4344 4874	8938 8988	2 9815	73
28	5,176 2280 6902	8941 8803	2 9404	72
29	5,189 2146 0503	8944 8207	2 8992	71
30	5,203 3995 2995	8947 7199	2 8581	70
31	5,217 7885 5321	9,451 8950 5780	2 8170	69
32	5,232 3876 3433	8953 3950	2 7758	68
33	5,247 2029 9769	8956 1708	2 7347	67
34	5,262 2411 4853	8958 9055	2 0936	66
35	5,277 5088 0002	8961 5991	2 6524	65
36	5,293 0133 4180	9,451 8964 2515	2 6113	64
37	5,308 7619 5989	8966 8626	2 5702	63
38	5,324 7625 5826	8969 4330	2 5291	62
39	5.341 0233 3204	8971 9621	2 4880	61
40	5,357 5528 8279	8974 4501	2 4468	60
41	5,374 3602 4579	9,451 8976 8969	2 4057	59
42	5,391 4549 1972	8979 3026	2 3646	58
43	5,408 8468 9889	8981 6672	2 3235	57
44	5,426 5467 0834	8983 9907	2 2824	56
45	5,444 5654 4208	8986 2731	2 2412	55
46	5,462 9148 0487	9,451 8988 5143	2 2001	54
47	5,481 6071 5789	8990 7144	2 1890	53
48	5,500 6555 6876	8992 8734	2 1179	52
49	5,520 0738 6641	8994 9913	2 0768	51
50	5,539 8767 0139	8997 0681		50

$v = 0 \ldots 000 \ldots$

$k = 99^0.$

1	𝔏. k.	𝔏. k + log. v.	D. 1′.	1
50	5,539 8767 0139	9,451 8997 0681	1 0356	50
51	5,560 0796 1226	9,451 8999 1037	1 9945	49
52	5,580 6990 9892	9001 0982	1 9534	48
53	5,601 7527 0346	9003 0516	1 9123	47
54	5,623 2590 9991	9004 9639	1 8712	46
55	5,645 2381 9374	9006 8361	1 8300	45
56	5,667 7112 3260	9,451 9008 6651	1 7889	44
57	5,690 7009 2971	9010 4545	1 7477	43
58	5,714 2316 0189	9012 2017	1 7066	42
59	5,738 3293 2413	9013 9083	1 6655	41
60	5,763 0221 0327	9015 5738	1 6244	40
61	5,788 3400 7370	9,451 9017 1982	1 5833	39
62	5,814 3157 1843	9018 7815	1 5422	38
63	5,840 9841 1973	9020 3237	1 5011	37
64	5,868 3832 4403	9021 8248	1 4599	36
65	5,896 5542 0609	9023 2847	1 4188	35
66	5,925 5419 4574	9,451 9024 7035	1 3777	34
67	5,955 3950 4666	9026 0812	1 3366	33
68	5,986 1668 3899	9027 4178	1 2954	32
69	6,017 9186 6684	9028 7132	1 2543	31
70	6,050 7056 1509	9029 9676	1 2131	30
71	6,084 6072 8808	9,451 9031 1806	1 1720	29
72	6,119 6987 2509	9032 3526	1 1308	28
73	6,156 0664 2834	9033 4834	1 0897	27
74	6,193 8069 1929	9034 5731	1 0486	26
75	6,233 0277 3731	9035 6217	1 0075	25
76	6,273 8498 3258	9,451 9036 6292	0 9663	24
77	6,316 4095 4363	9037 5955	0 9252	23
78	6,360 8613 9872	9038 5207	0 8841	22
79	6,407 3815 0278	9039 4048	0 8430	21
80	6,456 1717 5123	9040 2478	0 8019	20
81	6,507 4651 2581	9,451 9041 0497	0 7608	19
82	6,561 5324 2316	9041 8105	0 7197	18
83	6,618 0900 0897	9042 5302	0 6786	17
84	6,679 3155 9865	9043 2088	0 6374	16
85	6,743 8541 8352	9043 8462	0 5963	15
86	6,812 8471 1464	9,451 9044 4425	0 5552	14
87	6,886 9551 4231	9044 9977	0 5141	13
88	6,966 9979 0140	9045 5118	0 4729	12
89	7,054 0003 2568	9045 9847	0 4318	11
90	7,149 3195 4866	9046 4165	0 3907	10
91	7,254 6801 0339	9,451 9046 8072	0 3496	09
92	7,372 4631 7401	9047 1568	0 3084	08
93	7,505 9945 9747	9047 4652	0 2673	07
94	7,660 1453 0403	9047 7325	0 2262	06
95	7,842 4668 8344	9047 9587	0 1851	05
96	8,065 6104 5327	9,451 9048 1438	0 1438	04
97	8,353 2925 4010	9048 2876	0 1027	03
98	8,758 7576 5848	9048 3903	0 0616	02
99	9,451 9048 1438	9048 4519	0 0205	01
100	Infinit. positiv.	9048 4724		00

$v = 0 \ldots, 000 \ldots$

IV.

Tafel zur Umsetzung der briggischen Logarithmen in natürliche.

1	2,302 5850 9299	26	59,867 2124 1785	51	117,431 8397 4270	76	174,996 4670 6755
2	4,605 1701 8599	27	62,169 7975 1094	52	119,734 4248 3569	77	177,299 0621 6054
3	6,907 7552 7898	28	64,472 3826 0383	53	122,037 0099 2868	78	179,601 6372 5354
4	9,210 3403 7198	29	66,774 9676 9683	54	124,339 5950 2168	79	181,904 2223 4653
5	11,512 9254 6497	30	69,077 5527 8982	55	126,642 1801 1467	80	184,206 8074 3952
6	13,815 5105 5796	31	71,380 1378 8282	56	128,944 7652 0767	81	186,509 3925 3252
7	16,118 0956 5096	32	73,682 7229 7581	57	131,247 3503 0066	82	188,811 9776 2551
8	18,420 6807 4395	33	75,985 3080 6880	58	133,549 9353 9365	83	191,114 5627 1850
9	20,723 2658 3695	34	78,287 8931 6180	59	135,852 5204 8665	84	193,417 1478 1150
10	23,025 8509 2994	35	80,590 4782 5479	60	138,155 1055 7964	85	195,719 7329 0449
11	25,328 4360 2293	36	82,893 0633 4779	61	140,457 6906 7264	86	198,022 3179 9749
12	27,631 0211 1593	37	85,195 6484 4078	62	142,760 2757 6563	87	200,324 9030 9048
13	29,933 6062 0892	38	87,498 2335 3377	63	145,062 8606 5862	88	202,627 4881 8348
14	32,236 1913 0192	39	89,800 8186 2677	64	147,365 4459 5162	89	294,930 0732 7647
15	34,538 7763 9491	40	92,103 4037 1976	65	149,668 0310 4461	90	207,232 6583 6946
16	36,841 3614 8790	41	94,405 9888 1276	66	151,970 6161 3761	91	209,535 2434 6246
17	39,143 9465 8090	42	96,708 5739 0575	67	154,273 2012 3060	92	211,837 8285 5545
18	41,446 5316 7389	43	99,011 1589 9874	68	156,575 7863 2360	93	214,140 4136 4845
19	43,749 1167 6687	44	101,313 7440 9174	69	158,878 3714 1659	94	216,442 9987 4144
20	46,051 7018 5988	45	103,616 3291 8473	70	161,180 9565 0958	95	218,745 5838 3443
21	48,354 2869 5287	46	105,918 9142 7773	71	163,483 5416 0258	96	221,048 1689 2743
22	50,656 8720 4587	47	108,221 4993 7072	72	165,786 1266 9557	97	223,350 7540 2042
23	52,959 4571 3886	48	110,524 0844 6371	73	168,088 7117 8857	98	225,653 3391 1341
24	55,262 0422 3186	49	112,826 6695 5671	74	170,391 2968 8156	99	227,955 9242 0641
25	57,564 6273 2485	50	115,129 2546 4070	75	172,693 8819 7455	100	230,258 5092 9940

V.

Tabelle zur Umsetzung der natürlichen Logarithmen in briggische.

1	00,434 2944 8190	26	11,291 6565 2948	51	22,149 0185 7707	76	33,006 3806 2465
2	00,868 5889 6381	27	11,725 9510 1139	52	22,583 3130 5897	77	33,440 6751 0655
3	01,302 8834 4571	28	12,160 2454 9329	53	23,017 6075 4087	78	33,874 9695 8845
4	01,737 1779 2761	29	12,594 5399 7519	54	23,451 9020 2278	79	34,309 2640 7036
5	02,171 4724 0952	30	13,028 8344 5710	55	23,886 1965 0468	80	34,743 5585 5226
6	02,605 7668 9142	31	13,463 1289 3900	56	24,320 4909 8658	81	35,177 8530 3416
7	03,040 0613 7332	32	13,897 4234 2090	57	24,754 7854 6849	82	35,612 1475 1607
8	03,474 3558 5523	33	14,331 7179 0281	58	25,189 0799 5039	83	36,046 4419 9797
9	03,908 6503 3713	34	14,766 0123 8471	59	25,623 3744 3229	84	36,480 7364 7987
10	04,342 9448 1903	35	15,200 3068 6661	60	26,057 6689 1420	85	36,915 0309 6178
11	04,777 2393 0094	36	15,634 6013 4852	61	26,491 9633 9610	86	37,349 3254 4368
12	05,211 5337 8284	37	16,068 8958 3042	62	26,926 2578 7800	87	37,783 6199 2558
13	05,645 8282 6474	38	16,503 1903 1232	63	27,360 5523 5990	88	38,217 9144 0749
14	06,080 1227 4665	39	16,937 4847 9423	64	27,794 8468 4181	89	38,652 2088 8939
15	06,514 4172 2855	40	17,371 7792 7613	65	28,229 1413 2371	90	39,086 5033 7129
16	06,948 7117 1046	41	17,806 0737 5803	66	28,663 4358 0561	91	39,520 7978 5320
17	07,383 0061 9236	42	18,240 3682 3994	67	29,097 7302 8752	92	39,955 0923 3510
18	07,817 3006 7436	43	18,674 6627 2184	68	29,532 0247 6942	93	40,389 3868 1700
19	08,251 5951 5616	44	19,108 9572 0374	69	29,966 3192 5132	94	40,823 6812 9891
20	08,685 8896 3807	45	19,543 2516 8565	70	30,400 6137 3323	95	41,257 9757 8081
21	09,120 1841 1997	46	19,977 5461 6755	71	30,834 9082 1513	96	41,692 2702 6271
22	09,554 4786 0187	47	20,411 8406 4945	72	31,269 2026 9703	97	42,126 5647 4462
23	09,988 7730 8377	48	20,846 1351 3136	73	31,703 4971 7894	98	42,560 8592 2652
24	10,423 0675 6568	49	21,280 4296 1326	74	32,137 7916 6084	99	42,995 1537 0842
25	10,857 3620 4758	50	21,714 7240 9516	75	32,572 0861 4274	100	43,429 4481 9032

VI. Tafel zum Einschalten beim Gebrauche der zweiten Differenzen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
01	0,00495	0,00990	0,01485	0,01980	0,02475	0,02970	0,03465	0,03960	0,04455	99
02	0,00980	0,01960	0,02940	0,03920	0,04900	0,05880	0,06860	0,07840	0,08820	98
03	0,01455	0,02910	0,04365	0,05820	0,07275	0,08730	0,10185	0,11640	0,13095	97
04	0,01920	0,03840	0,05760	0,07680	0,09600	0,11520	0,13440	0,15360	0,17280	96
05	0,02375	0,04750	0,07125	0,09500	0,11875	0,14250	0,16625	0,19000	0,21375	95
06	0,02820	0,05640	0,08460	0,11280	0,14100	0,16920	0,19740	0,22560	0,25380	94
07	0,03255	0,06510	0,09765	0,13020	0,16275	0,19530	0,22785	0,26040	0,29295	93
08	0,03680	0,07360	0,11040	0,14720	0,18400	0,22080	0,25760	0,29440	0,33120	92
09	0,04095	0,08190	0,12285	0,16380	0,20475	0,24570	0,28665	0,32760	0,36855	91
10	0,04500	0,09000	0,13500	0,18000	0,22500	0,27000	0,31500	0,36000	0,40500	90
11	0,04895	0,09790	0,14685	0,19580	0,24475	0,29370	0,34265	0,39160	0,44055	89
12	0,05280	0,10560	0,15840	0,21120	0,26400	0,31680	0,36960	0,42240	0,47520	88
13	0,05655	0,11310	0,16965	0,22620	0,28275	0,33930	0,39585	0,45240	0,50895	87
14	0,06020	0,12040	0,18060	0,24080	0,30100	0,36120	0,42140	0,48160	0,54180	86
15	0,06375	0,12750	0,19125	0,25500	0,31875	0,38250	0,44625	0,51000	4,57375	85
16	0,06720	0,13440	0,20160	0,26880	0,33600	0,40320	0,47040	0,53760	0,60480	84
17	0,07055	0,14110	0,21165	0,28220	0,35275	0,42330	0,49385	0,56440	0,63495	83
18	0,07380	0,14760	0,22140	0,29520	0,36900	0,44280	0,51660	0,59040	0,66420	82
19	0,07695	0,15390	0,23085	0,30780	0,38475	0,46170	0,53865	0,61560	0,69255	81
20	0,08000	0,16000	0,24000	0,32000	0,40000	0,48000	0,56000	0,64000	0,72000	80
21	0,08295	0,16590	0,24885	0,33180	0,41475	0,49770	0,58065	0,66360	0,74655	79
22	0,08580	0,17160	0,25740	0,34320	0,42900	0,51480	0,60060	0,68640	0,77220	78
23	0,08855	0,17710	0,26565	0,35420	0,44275	0,53130	0,61985	0,70840	0,7969	77
24	0,09120	0,18240	0,27360	0,36480	0,45600	0,54720	0,63840	0,72960	0,82080	76
25	0,09375	0,18750	0,28125	0,37500	0,46875	0,56250	0,65625	0,75000	0,84375	75
26	0,09620	0,19240	0,28860	0,38480	0,48100	0,57720	0,67340	0,76960	0,86580	74
27	0,09855	0,19710	0,29565	0,39420	0,49275	0,59130	0,68985	0,78840	0,88695	73
28	0,10080	0,20160	0,30240	0,40320	0,50400	0,60480	0,70560	0,80640	0,90720	72
29	0,10295	0,20590	0,30885	0,41180	0,51475	0,61770	0,72065	0,82360	0,92655	71
30	0,10500	0,21000	0,31500	0,42000	0,52500	0,63000	0,73500	0,84000	0,94500	70
31	0,10695	0,21390	0,32085	0,42780	0,53475	0,64170	0,74865	0,85560	0,96255	69
32	0,10880	0,21760	0,32640	0,43520	0,54400	0,65280	0,76160	0,87040	0,97920	68
33	0,11055	0,22110	0,33165	0,44220	0,55275	0,66330	0,77385	0,88440	0,99495	67
34	0,11220	0,22440	0,33660	0,44880	0,56100	0,67320	0,78540	0,89760	1,00980	66
35	0,11375	0,22750	0,34125	0,45500	0,56875	0,68250	0,79625	0,91000	1,02375	65
36	0,11520	0,23040	0,34560	0,46080	0,57600	0,69120	0,80640	0,92160	1,03680	64
37	0,11655	0,23310	0,34965	0,46620	0,58275	0,69930	0,81585	0,93240	1,04895	63
38	0,11780	0,23560	0,35340	0,47120	0,58900	0,70680	0,82460	0,94240	1,06020	62
39	0,11895	0,23790	0,35685	0,47580	0,59475	0,71370	0,83265	0,95160	1,07055	61
40	0,12000	0,24000	0,36000	0,48000	0,60000	0,72000	0,84000	0,96000	1,08000	60
41	0,12095	0,24190	0,36285	0,48380	0,60475	0,72570	0,84665	0,96760	1,08855	59
42	0,12180	0,24360	0,36540	0,48720	0,60900	0,73080	0,85260	0,97440	1,09620	58
43	0,12255	0,24510	0,36765	0,49020	0,61275	0,73530	0,85785	0,98040	1,10295	57
44	0,12320	0,24640	0,36960	0,49280	0,61600	0,73920	0,86240	0,98560	1,10880	56
45	0,12375	0,24750	0,37125	0,49500	0,61875	0,74250	0,86625	0,99000	1,11375	55
46	0,12420	0,24840	0,37260	0,49680	0,62100	0,74520	0,86940	0,99360	1,11780	54
47	0,12455	0,24910	0,37365	0,49820	0,62275	0,74730	0,87185	0,99640	1,12095	53
48	0,12480	0,24960	0,37440	0,49920	0,62400	0,74880	0,87360	0,99840	1,12320	52
49	0,12495	0,24990	6,37485	0,49980	0,62475	0,74970	0,87465	0,99960	1,12455	51
50	0,12500	0,25000	0,37500	0,50000	0,62500	0,75000	0,87500	1,00000	1,12500	50

VII. Tafel zur Umsetzung der Centesimalsekunden in Sexagesimalsekunden.

"	Sexages. Sek.	"	Sexages. Sek.	"	Sexages. Sek.	"	Sexages. Sek.	"	Sexages. Sek.
00	0,000	20	6,480	40	12,960	60	19,440	80	25,920
01	0,324	21	6,804	41	13,284	61	19,764	81	26,244
02	0,648	22	7,128	42	13,608	62	20,088	82	26,568
03	0,972	23	7,452	43	13,932	63	20,412	83	26,892
04	1,296	24	7,776	44	14,256	64	20,736	84	27,216
05	1,620	25	8,100	45	14,580	65	21,060	85	27,540
06	1,944	26	8,424	46	14,904	66	21,384	86	27,864
07	2,268	27	8,748	47	15,228	67	21,708	87	28,188
08	2,592	28	9,072	48	15,552	68	22,032	88	28,512
09	2,916	29	9,396	49	15,876	69	22,356	89	28,836
10	3,240	30	9,720	50	16,200	70	22,680	90	29,160
11	3,564	31	10,044	51	16,524	71	23,004	91	29,484
12	3,888	32	10,368	52	16,848	72	23,328	92	29,808
13	4,212	33	10,692	53	17,172	73	23,652	93	30,132
14	4,536	34	11,016	54	17,496	74	23,976	94	30,456
15	4,860	35	11,340	55	17,820	75	24,300	95	30,780
16	5,184	36	11,664	56	18,144	76	24,624	96	31,104
17	5,508	37	11,988	57	18,468	77	24,948	97	31,428
18	5,832	38	12,312	58	18,792	78	25,272	98	31,752
19	6,156	39	12,636	59	19,116	79	25,596	99	32,076
20	6,480	40	12,960	60	19,440	80	25,920	100	32,400

VIII. Tafel zur Umsetzung der Sexagesimalsekunden in Centesimalsekunden.

"	Centes. Sek.	"	Centes. Sek.	"	Centes. Sek.	"	Centes. Sek.	"	Centes. Sek.	"	Centes. Sek.
01	3,08642	11	33,95062	21	64,81481	31	95,67901	41	126,54321	51	157,40741
02	6,17284	12	37,03704	22	67,90123	32	98,76543	42	129,62963	52	160,49383
03	9,25926	13	40,12346	23	70,98765	33	101,85185	43	132,71605	53	163,58025
04	12,34568	14	43,20988	24	74,07407	34	104,93827	44	135,80247	54	166,66667
05	15,43210	15	46,29630	25	77,16049	35	108,02469	45	138,88889	55	169,75309
06	18,51852	16	49,38272	26	80,24691	36	111,11111	46	141,97531	56	172,83951
07	21,60494	17	52,46914	27	83,33333	37	114,19753	47	145,06173	57	175,92593
08	24,69136	18	55,55556	28	86,41975	38	117,28395	48	148,14815	58	179,01235
09	27,77778	19	58,64198	29	89,50617	39	120,37037	49	151,23457	59	182,09877
10	30,86420	20	61,72840	30	92,59259	40	123,45679	50	154,32099	60	185,18519

30.

Démonstration d'une propriété analogue à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques.

(Par Mr. G. Lejeune Dirichlet, prof. de math. à Berlin.)

Dans un mémoire qui vient d'être publié dans le recueil de la société royale de Gottingue, Mr. Gaufs a étendu le domaine de l'analyse indéterminée aux expressions de la forme $t+u\sqrt{-1}$, t et u désignant des nombres entiers positifs ou négatifs. Ce grand géomètre a reconnu que les expressions de cette espèce se rapprochent entièrement par leurs propriétés des nombres entiers réels qu'elles comprennent d'ailleurs comme cas particulier. L'analogie qui existe à cet égard est telle, que les énoncés des théorèmes connus relatifs aux entiers réels peuvent être transportés pour la plupart presque littéralement dans la théorie des nombres ainsi généralisée. Il n'en est pas de même des démonstrations qui paraissent présenter de nouvelles difficultés si l'on excepte les théorèmes très simples qui dérivent immédiatement des notions fondamentales. L'induction appliquée à des questions d'un ordre plus élevé, a fait connaître à Mr. Gaufs une proposition qui ne le cède, ni en simplicité ni en élégance, au théorème si célèbre sous le nom de loi de réciprocité. Quant à la démonstration de ce nouveau théorème, que l'illustre auteur juge sujette à de grandes difficultés, il la renvoie à un autre mémoire où elle sera exposée avec celle d'une autre proposition plus générale. Je me propose de démontrer dans ce mémoire le théorème dont il s'agit par des considérations fort simples et qui mériteront peut être de fixer un instant l'attention par ce qu'elles sont également applicables à d'autres questions *).

*) On peut, au lieu des expressions de la forme $t+u\sqrt{-1}$, considérer celles de la forme plus générale $t+u\sqrt{a}$, a étant sans diviseur carré. Les expressions de ce genre, considérées sous le même point de vue, donnent lieu à des théorèmes analogues à celui qui fait l'objet de ce mémoire et susceptibles d'une démonstration toute semblable.

J'entre en matière en énonçant quelques définitions et en démontrant plusieurs propositions préliminaires, qui se trouvent déjà pour la plupart dans le mémoire cité plus haut.

§. 1.

Une expression de la forme $g+h\sqrt{-1}$, g et h désignant des entiers réels, sans excepter zéro, sera dit un nombre entier complexe. Il résulte de là que les entiers réels sont des cas particuliers des entiers complexes. Cette définition posée, il n'est besoin d'aucune explication pour indiquer le sens que l'on doit attacher aux mots divisibilité et congruence. De même que tout nombre réel est divisible par ± 1, tout nombre complexe doit être considéré comme contenant les facteurs ± 1, $\pm\sqrt{-1}$. Un nombre complexe, sera dit premier lorsqu'il ne peut être décomposé en deux facteurs différens l'un et l'autre de ± 1 et $\pm\sqrt{-1}$. Voyons d'après cela comment on peut reconnaître si un nombre complexe $g+h\sqrt{-1}$ est premier ou non. Pour cela nous distinguerons deux cas selon que les deux termes g, h du nombre complexe sont ou ne sont pas l'un et l'autre différens de zéro. Le second de ces deux cas semble se subdiviser; le terme subsistant pouvant être réel ou le produit de $\sqrt{-1}$ et d'un nombre réel. Mais il est facile de voir que cela revient au même, car si $h\sqrt{-1}$ est premier, h l'est pareillement et réciproquement. Or, pour qu'un nombre réel q, considéré com mecomplexe, soit premier il faut d'abord qu'il le soit aussi sous le point de vue ordinaire. Mais cela ne suffit pas; il doit en outre, abstraction faite du signe, être de la forme $4n+3$; car, s'il avait la forme $4n+1$ qui entraîne toujours celle-ci c^2+d^2, il serait décomposable dans les facteurs $c+d\sqrt{-1}$ et $c-d\sqrt{-1}$. Réciproquement, tout nombre premier réel q qui, abstraction faite du signe, est de la forme $4n+3$, doit être aussi considéré comme premier dans la théorie des nombres complexes; car si l'on avait $q=(c+d\sqrt{-1})(e+f\sqrt{-1})$, on aurait aussi $q=(c-d\sqrt{-1})(e-f\sqrt{-1})$ et par conséquent, en multipliant, $q^2=(c^2+d^2)(e^2+f^2)$ équation impossible, q ne pouvant être diviseur de la somme de deux carrés. Considérons, en second lieu, le cas où aucun des deux termes de l'expression $g+h\sqrt{-1}$ ne s'évanouit. Pour qu'elle représente alors un nombre premier complexe, il est nécessaire et suffisant que g^2+h^2 soit un nombre premier réel. Pour le faire voir, supposons $g+h\sqrt{-1}$ décomposable dans les deux facteurs $c+d\sqrt{-1}$ et $e+f\sqrt{-1}$, $g-h\sqrt{-1}$ sera le produit de $c-d\sqrt{-1}$ et de $e-f\sqrt{-1}$,

et l'on trouve $g^2+h^2=(c^2+d^2)(e^2+f^2)$, c'est-à-dire égal à un nombre composé. Réciproquement si g^2+h^2 est un nombre réel composé, $g+h\sqrt{-1}$ est un nombre complexe également composé. La chose est évidente lorsque g, h ont un facteur commun; si un pareil facteur n'existe pas, g^2+h^2 n'a que des diviseurs premiers réels $4n+1$. Soit $p=c^2+d^2$ un de ces diviseurs, on aura $g^2\equiv-h^2$, $c^2\equiv-d^2$ (mod. p) et par suite, en multipliant et transposant, $(cg+dh)(cg-dh)\equiv 0$ (mod. p), d'où l'on conclud que $\frac{cg\pm dh}{p}$, avec le signe convenable, est entier. On a, d'un autre côté,

$$p(g^2+h^2)=(cg\pm dh)^2+(ch\mp dg)^2$$

équation qui exige évidemment que $\frac{ch\mp dg}{p}$ soit entier en même temps que $\frac{cg\pm dh}{p}$, c'est-à-dire, les signes supérieurs et inférieurs se correspondant. Cela posé, il est évident que le quotient

$$\frac{g+h\sqrt{-1}}{c\pm d\sqrt{-1}}=\frac{cg\pm dh}{p}+\frac{ch\mp dg}{p}\sqrt{-1}$$

est un entier complexe et $g+h\sqrt{-1}$ par conséquent un nombre composé. Il est donc prouvé que, si g^2+h^2 est un nombre premier réel, $g+h\sqrt{-1}$ est un nombre premier complexe, et réciproquement.

Il résulte de cette discussion qu'il y a des nombres premiers de deux espèces différentes. Ceux de la première espèce se réduisent à un seul terme, et ne sont autre chose, abstraction faite du signe ou du facteur $\pm\sqrt{-1}$, que des nombres premiers réels de la forme $4n+3$. Pour plus de simplicité, nous les supposerons toujours débarassés du facteur $\sqrt{-1}$.

Ceux de la seconde espèce tirent leur origine des nombres premiers réels composés de deux carrés qui, à l'exception de 2 sont tous de la forme $4n+1$. Si l'on désigne par $c+d\sqrt{-1}$ un nombre premier de cette espèce (à l'exception de ceux qui proviennent du nombre 2, et qui sont $\pm(1+\sqrt{-1})$, $\pm(1-\sqrt{-1})$) il est évident que les entiers réels c, d sont l'un pair, l'autre impair. Cela posé, nous considérerons, pour plus d'uniformité, dans ce qui va suivre, d comme pair, ce qui est permis, car si d est impair, on n'a qu'à multiplier par $\sqrt{-1}$, ce qui donne le nombre $-d+c\sqrt{-1}$, qui est également premier et tellement lié au précédent que la connaissance des propriétés de l'un suffit pour juger de celles de l'autre.

Nous terminons ces préliminaires par la démonstration d'un théorème, dont nous aurons besoin dans la suite. Les termes réels A et B, du

nombre complexe $A+B\sqrt{-1}$ étant supposés premiers entre eux (ce qui exclud le cas où l'un d'eux serait nul) et $g+h\sqrt{-1}$ étant un nombre complexe quelconque, je dis qu'il existe toujours un nombre s entier réel et tel qu'on ait $s\equiv g+h\sqrt{-1}$ (mod. $A+B\sqrt{-1}$).

En effet, la congruence en question revient à cette équation

$$s-g-h\sqrt{-1}=(\varphi+\psi\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1})$$

ou à celles-ci

$$s-g=A\varphi-B\psi,\qquad -h=A\psi+B\varphi.$$

La dernière est évidemment possible, A et B n'ayant pas de diviseur commun, et il est également manifeste que la première donnera ensuite une valeur entière pour s.

§. 2.

Ces préliminaires posés, nous arrivons au véritable objet de ce mémoire, qui est de considérer les nombres complexes, en tant qu'ils sont ou ne sont pas des résidus quadratiques les uns des autres. D'après la définition connue on dit que le nombre $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu quadratique de $A+B\sqrt{-1}$, selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas d'expression $x+y\sqrt{-1}$, telle que $(x+y\sqrt{-1})^2-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ soit divisible par $A+B\sqrt{-1}$. Pour décider si un nombre complexe est ou n'est pas résidu quadratique d'un nombre complexe composé, il suffit, comme lorsqu'il s'agit de nombres réels, de considérer les différens facteurs simples du diviseur. Nous supposerons donc, dans ce qui va suivre que le diviseur ou module $A+B\sqrt{-1}$ est un nombre premier. Pour commencer par le cas le plus simple, considérons un nombre premier q de première espèce, et proposons nous de déterminer si $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, expression que nous supposons non-divisible par q, et dans laquelle β peut être nul, est ou n'est pas résidu quadratique de q. Attribuant dans l'expression $t+u\sqrt{-1}$, à chacune des lettres t et u, les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, q-1$, et excluant la combinaison 0, 0, on aura q^2-1 nombres dont nous désignerons l'ensemble par (k). Cela posé, distinguons deux cas, selon que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu *) de q, et commençons par l'examen du dernier. L'ensemble (k) peut être partagé, dans ce cas, en groupes composés chacun de deux nombres tels que leur produit $\equiv\alpha+\beta\sqrt{-1}$

*) Comme les résidus quadratiques ou du second degré sont les seuls dont il soit question dans ce mémoire, nous supprimerons, pour abréger, le mot quadratique.

(mod. q). En effet, soit $r+s\sqrt{-1}$ l'un quelconque des nombres (k) et $r'+s'\sqrt{-1}$ celui qui soit former un groupe avec lui. Il faut donc qu'on ait

$$(r+s\sqrt{-1})(r'+s'\sqrt{-1}) \equiv \alpha+\beta\sqrt{-1} \pmod{q},$$

c'est-à-dire

$$rr'-ss' \equiv \alpha,\quad rs'+sr' \equiv \beta \pmod{q}.$$

On peut remplacer ces congruences par celles-ci

$$(r^2+s^2)r' \equiv \alpha r+\beta s,\quad (r^2+s^2)s' \equiv \beta r-\alpha s \pmod{q}.$$

Comme r^2+s^2 ne peut être divisible par q qui est un nombre prémier $4n+3$, ces congruences sont possibles et leur résolution donnera pour r' et s' un système unique de valeurs positives et moindres que q. Il est évident d'ailleurs, par ce qu'on a supposé, qu'on ne saurait avoir à la fois $r'=0$, $s'=0$, ni $r'=r$, $s'=s$, ce qui suffit pour montrer la possibilité de distribuer la suite (k) en groupes tels que nous les avons définis. Or ces groupes dont chacun est composé de deux nombres tels que leur produit $\equiv \alpha+\beta\sqrt{-1}$ (mod. q), étant évidemment au nombre de $\frac{q^2-1}{2}$, il s'ensuit que le produit des nombres (k), que nous désignerons par K, satisfait à la congruence

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{q^2-1}{2}} \equiv K \pmod{q}.$$

Venons maintenant au cas où $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est résidu de q. Il existe alors dans la suite (k) deux nombres tels que le carré de chacun d'eux $\equiv \alpha+\beta\sqrt{-1}$ (mod. q). Si l'on désigne l'un deux par $r+s\sqrt{-1}$, l'autre sera $q-r+(q-s)\sqrt{-1}$. Ayant ôté ces deux nombres de la suite (k), les nombres restans pourront se partager en groupes, d'où l'on conclud que leur produit $\equiv (\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{q^2-3}{2}}$ (mod. q). Comme on a, d'un autre côté,

$$(r+s\sqrt{-1})(q-r+(q-s)\sqrt{-1}) \equiv -(r+s\sqrt{-1})^2 \equiv -(\alpha+\beta\sqrt{-1}) \pmod{q},$$

il viendra en multipliant:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{q^2-1}{2}} \equiv -K \pmod{q}.$$

Les deux cas que nous venons de considérer, sont compris dans cet énoncé:

„On a $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{q^2-1}{2}} \equiv \mp K$ (mod. q), le signe supérieur où inférieur ayant lieu selon que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu de q."

Le signe supérieur devant évidemment être choisi lorsque $\alpha=1$, $\beta=0$, il s'ensuit qu'on a

$$K \equiv -1 \pmod{q}$$

ce qui est analogue au théorème de **Wilson**. On peut, d'après cela, remplacer K par -1 dans l'avant-dernière congruence ce qui donne cet énoncé très simple:

I. „On a $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{q^2-1}{2}} \equiv +1$ ou -1 (mod. q) selon que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ „est ou n'est pas résidu de q."

Si l'on désigne par $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ une seconde expression non-divisible par q, on conclud immédiatement de ce théorème que le produit $(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})$ est résidu de q, lorsque chacun de ces deux facteurs est résidu ou non-résidu, et qu'au contraire, ce produit est non-résidu, lorsque ces facteurs sont l'un résidu, l'autre non-résidu de q. En étendant ce résultat à un plus grand nombre de facteurs, on trouve cette proposition:

II. „Le produit d'un nombre quelconque de facteurs est ou n'est pas „résidu du nombre premier q, selon que parmi ces facteurs il y a „un nombre pair ou impair de non-résidus de q."

Ce théorème a également lieu pour les nombres premiers de seconde espèce, comme on le verra plus loin. Il y a un théorème plus simple que le théorème I. et qui remplit le même objet. Pour l'établir, considérons successivement les deux cas où $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est et où ce nombre n'est pas résidu de q. Dans le premier de ces cas, on a

$$\alpha+\beta\sqrt{-1} \equiv (t+u\sqrt{-1})^2 \pmod{q}$$

et par conséquent aussi

$$\alpha-\beta\sqrt{-1} \equiv (t-u\sqrt{-1})^2 \pmod{q}$$

d'où l'on conclud en multipliant et en élevant ensuite à la puissance $\frac{q-1}{2}$

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (t^2+u^2)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

ou ce qui revient au même, en se servant du signe très-commode employé par Mr. **Legendre**, $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{q}\right) = 1$.

Supposons en second lieu que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ soit non-résidu de q. On prendra alors deux nombres (réels) α' et β' tels que $\alpha'^2+\beta'^2+1$ soit divisible par q. (L'existence de pareils nombres résulte d'un théorème connu d'**Euler**. *Th. des nombr.* 3ième édit. vol. I. pag. 213.).

Cela posé, on aura $\alpha'^2+\beta'^2 \equiv -1$ (mod. q), et par conséquent $\left(\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{q}\right) = -1$. On conclud de là que $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ est non-résidu

de q, car, pour qu'il fût résidu, il faudrait d'après ce qu'on a vu dans le premier cas, qu'on eût $\left(\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{q}\right)=1$. Le produit

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1}) = \alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\sqrt{-1}$$

sera donc résidu, et l'on aura $\left(\frac{(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2}{q}\right)=1$. Or cette expression pouvant être mise sous la forme $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{q}\right)\left(\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{q}\right)=1$, on en conclud, en faisant attention à l'équation $\left(\frac{\alpha'^2+\beta'^2}{q}\right)=-1$, qu'on a $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{q}\right)=-1$. Les deux résultats que nous venons d'obtenir, peuvent se réunir dans cet énoncé:

III. „L'expression $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, qui est supposée n'être pas divisible par le „nombre premier q (de première espèce), est ou n'est pas résidu „de q, selon que l'on a $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{q}\right)=+1$ ou -1."

Il résulte de là comme corollaire, en faisant successivement $\beta=0$, $\alpha=0$, que tout nombre réel α est résidu de q, et qu'il en est de même de toute expression imaginaire de la forme $\beta\sqrt{-1}$.

§. 3.

Nous passons aux modules qui sont des nombres premiers de seconde espèce. Désignons par $A+B\sqrt{-1}$ un pareil nombre, (B étant pair) par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ un nombre quelconque non divisible par $A+B\sqrt{-1}$ et faisons, pour abréger, $A^2+B^2=P$, P désignant un nombre premier réel $4n+1$. Comme d'après la définition même du résidu quadratique, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est dit résidu ou non-résidu de q, selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas d'expression $t+u\sqrt{-1}$ telle que $(t+u\sqrt{-1})^2\equiv\alpha+\beta\sqrt{-1}$, (mod. $A+B\sqrt{-1}$), et comme, d'un autre côté, on peut toujours trouver un nombre réel s qui satisfasse à la congruence $s\equiv t+u\sqrt{-1}$, (mod. $A+B\sqrt{-1}$), on voit que, pour décider si $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu de $A+B\sqrt{-1}$, tout se réduit à savoir si la congruence $s^2\equiv\alpha+\beta\sqrt{-1}$ (mod. $A+B\sqrt{-1}$), admet ou n'admet pas de solution. Pour voir de quoi dépend sa possibilité, remplaçons la par cette équation équivalente, $s^2-\alpha-\beta\sqrt{-1}=(A+B\sqrt{-1})(\varphi+\psi\sqrt{-1})$, ou ce qui revient au même, par celles-ci

$$s^2-\alpha=A\varphi-B\psi,\quad -\beta=A\psi+B\varphi.$$

Multipliant ces dernières par A et B, et ajoutant, il viendra

$$As^2-A\alpha-B\beta = P\varphi$$

d'où l'on conclud

$$\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\left(\frac{A}{P}\right).$$

On peut démontrer réciproquement que, si la condition

$$\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\left(\frac{A}{P}\right)$$

a lieu, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est nécessairement résidu de $A+B\sqrt{-1}$. En effet. il est facile de voir que la condition supposée entraîne cette équation

$$As^2-A\alpha-B\beta=P\varphi=(A^2+B^2)\varphi\ ^{*)}.$$

Or cette équation pouvant être mise sous la forme

$$A(s^2-A\varphi-\alpha)=B(B\varphi+\beta),$$

et les nombres A, B n'ayant pas de diviseur commun, il faut que $B\varphi+\beta$ soit divisible par A. Faisons donc $B\varphi+\beta=-A\psi$. Mettant ensuite cette expression dans la dernière équation, il viendra $s^2-\alpha=A\varphi-B\psi$. On voit par là que les deux équations nécessaires et suffisantes pour que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ soit résidu de $A+B\sqrt{-1}$, résultent de la condition

$$\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\left(\frac{A}{P}\right).$$

Ayant ainsi prouvé que, si $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est résidu de $A+B\sqrt{-1}$, on a $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\left(\frac{A}{P}\right)$, et que la réciproque a également lieu, nous pouvons en conclure que l'on a $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=+\left(\frac{A}{P}\right)$ ou $-\left(\frac{A}{P}\right)$ selon que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu de $A+B\sqrt{-1}$. Ce résultat peut se simplifier, si l'on remarque que l'on a toujours $\left(\frac{A}{P}\right)=1$. Pour s'en convaincre, on considérera l'équation $P=A^2+B^2$, et l'on décomposera A en ses facteurs simples, en posant $A=g\cdot g'\cdot g''\ldots\ldots$, les lettres $g, g', g''\ldots\ldots$ désignant des nombres premiers réels impairs, positifs ou négatifs. Il résulte immédiatement de l'équation précédente, qu'on a $\left(\frac{P}{g}\right)=1$, d'où l'on conclud en appliquant un théorème connu et, en se rappelant que P est de la forme $4n+1$, $\left(\frac{g}{P}\right)=1$. On a pareillement $\left(\frac{g'}{P}\right)=1$, $\left(\frac{g''}{P}\right)=1$, et l'on tire de là en multipliant, $\left(\frac{g\cdot g'\cdot g''\ldots\ldots}{P}\right)=\left(\frac{A}{P}\right)=1$, ce qu'il s'agissait de prouver. En profitant de cette remarque on peut modifier le résultat obtenu plus haut, comme il suit:

*) *Th. des nombr.* vol. I. pag. 240.

IV. „Le nombre $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ étant supposé n'être pas divisible par le „nombre premier de seconde espèce $A+B\sqrt{-1}$, si l'on pose $A^2+B^2=P$, „je dis que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ sera ou ne sera pas résidu de $A+B\sqrt{-1}$, „selon que l'on a $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=+1$ ou -1."

Si l'on pose $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\varepsilon$, $\left(\frac{A\alpha'+B\beta'}{P}\right)=\varepsilon'$, ε sera d'après ce théorème $+1$ ou -1, selon que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu de $A+B\sqrt{-1}$, et ε' aura la même signification par rapport à $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$. Multipliant ces expressions entre elles, remplaçant B^2 par $P-A^2$ et faisant attention qu'on a $\left(\frac{A}{P}\right)=1$, il viendra $\varepsilon\varepsilon'=\left(\frac{A(\alpha\alpha'-\beta\beta')+B(\alpha\beta'+\beta\alpha')}{P}\right)$. Or cette dernière expression correspondant au produit

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\sqrt{-1}$$

on voit facilement que le théorème II. subsiste également pour les nombres premiers de seconde espèce.

§. 4.

Après avoir fixé, dans ce qui précède, les conditions qui doivent avoir lieu, pour qu'un nombre complexe soit ou ne soit pas résidu quadratique d'un nombre premier quelconque, nous allons faire voir comment on peut en déduire l'expression la plus simple des caractères distinctifs des nombres premiers dont un nombre complexe donné est résidu. Mais auparavant nous ferons remarquer, qu'il est permis de se borner au cas, où le nombre donné est premier; car, s'il est composé, il résulte du théorème II. démontré plus haut que sa relation à un nombre premier quelconque, dépend de celles de ses facteurs simples à ce même nombre premier.

Nous commençons par le nombre premier $1+\sqrt{-1}$. D'après le théorème III., ce nombre sera ou ne sera pas résidu d'un nombre premier de première espèce q, selon que l'on a $\left(\frac{2}{q}\right)=1$ ou $\left(\frac{2}{q}\right)=-1$. On sait d'un autre côté que le premier ou le second de ces cas aura lieu, selon que q pris positivement, a la forme $8n+3$ ou celle-ci $8n+7$. Donc $1+\sqrt{-1}$ sera résidu de tout nombre premier $q=8n+3$, non-résidu au contraire des nombres premiers de la forme $8n+7$. Passons aux nombres premiers de seconde espèce. Pour décider si $1+\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu d'un pareil nombre $A+B\sqrt{-1}$, il suffit, d'après le théorème IV., de savoir si l'on a $\left(\frac{A+B}{P}\right)=+1$ ou -1, où l'on a fait, comme plus haut, $P=A^2+B^2$.

Multipliant par 2, les deux membres de cette équation, il viendra celle-ci

$$2P = (A+B)^2 + (A-B)^2.$$

Décomposons le nombre impair $A+B$ en facteurs simples positifs ou négatifs $g, g', g'', \ldots$ de sorte que $A+B = g.g'.g''\ldots$ On aura évidemment $\left(\frac{2}{g}\right) = \left(\frac{P}{g}\right)$, et par suite en vertu de la loi de réciprocité, $\left(\frac{2}{P}\right) = \left(\frac{g}{P}\right)$. D'un autre côté, il résulte d'un théorème connu que le premier membre est $+1$ ou -1, selon que g a la forme $8n \pm 1$, ou celle-ci $8n \pm 3$. On a pareillement $\left(\frac{2}{g'}\right) = \left(\frac{g'}{P}\right)$, $\left(\frac{2}{g''}\right) = \left(\frac{g''}{P}\right), \ldots$ Faisant le produit, on obtient l'équation $\left(\frac{g.g'.g''\ldots}{P}\right) = \left(\frac{A+B}{P}\right) = \pm 1$, où le signe supérieur ou inférieur doit être pris selon que parmi les facteurs $g, g', g'', \ldots$ il y en a un nombre pair ou impair de la forme $8n \pm 3$. Or il évident que le produit $A+B = g.g'.g''\ldots$ aura la forme $8n \pm 1$, ou celle-ci $8n \pm 3$, selon que ce nombre est pair, ou impair. De là et de ce qu'on a vu plus haut, résulte ce théorème

„$1+\sqrt{-1}$ est résidu ou non-résidu quadratique du nombre premier „$A+B\sqrt{-1}$ selon que l'on a $A+B \equiv \pm 1$, ou $\equiv \pm 3$ (mod. 8)."

On peut remarquer que cet énoncé comprend ce que nous avons trouvé plus haut sur la relation de $1+\sqrt{-1}$ aux nombres premiers de première espèce. Quant à la relation de $1-\sqrt{-1}$ aux différens nombres premiers, elle se déduit immédiatement du théorème précédent.

Après avoir terminé ce qui regarde le nombre $1 \pm \sqrt{-1}$, nous allons nous occuper des autres nombres premiers. Désignons par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ un nombre premier de seconde espèce (β étant pair) et par $A+B\sqrt{-1}$ un autre nombre premier de la même espèce (B étant également pair), et proposons nous de fixer la relation que le premier a au second.

Cette relation se détermine par un théorème très simple et qui consiste en ce que le premier est ou n'est pas résidu du second, selon que le second est ou n'est pas résidu du premier. Pour démontrer ce théorème, faisons pour abréger, $\alpha^2+\beta^2 = p$, $A^2+B^2 = P$. Il résulte du théorème IV., que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu de $A+B\sqrt{-1}$, selon que l'on a $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right) = +1$ ou -1. En échangeant les nombres $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $A+B\sqrt{-1}$ entre eux, ce qui ne change pas l'expression $A\alpha+B\beta$, on conclud de la même proposition que $A+B\sqrt{-1}$ est ou n'est pas résidu de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, selon que l'on a $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right) = +1$

ou -1. On voit par là que la démonstration du théorème énoncé plus haut se réduit à faire voir que l'équation $\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)=\left(\frac{A\alpha+B\beta}{p}\right)$ a toujours lieu. Pour cela on fait le produit de p et de P. On trouve ainsi $(A\alpha+B\beta)^2+(A\beta-B\alpha)^2=pP$. Comme par hypothèse, A et α sont impairs, B et β pairs, $A\alpha+B\beta$ sera un nombre impair. Désignant par $g, g', g'', \ldots$ ses facteurs simples, on a $A\alpha+B\beta=g.g'.g''\ldots$ et l'équation précédente donne immédiatement $\left(\frac{p}{g}\right)=\left(\frac{P}{g}\right)$, d'où l'on conclud, en vertu d'un théorème connu, $\left(\frac{g}{p}\right)=\left(\frac{g}{P}\right)$. On a pareillement

$$\left(\frac{g'}{p}\right)=\left(\frac{g'}{P}\right),\quad \left(\frac{g''}{p}\right)=\left(\frac{g''}{P}\right)\ldots.$$

d'où l'on tire en multipliant

$$\left(\frac{g.g'.g''\ldots}{p}\right)=\left(\frac{g.g'.g''\ldots}{P}\right) \text{ ou } \left(\frac{A\alpha+B\beta}{p}\right)=\left(\frac{A\alpha+B\beta}{P}\right)$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Il existe une réciprocité analogue, lorsque les deux nombres premiers n'appartiennent pas l'un et l'autre à la seconde espèce. Pour le faire voir, soient q et $A+B\sqrt{-1}$ deux nombres premiers qui sont respectivement de première et de seconde espèce. D'après le théorème III. le second sera ou ne sera pas résidu du premier, selon que l'on a $\left(\frac{A^2+B^2}{q}\right)=\left(\frac{P}{q}\right)=+1$ ou -1. Il résulte d'un autre côté du théorème IV. que le premier sera ou ne sera pas résidu du second, selon que $\left(\frac{qA}{P}\right)=\left(\frac{q}{P}\right)=+1$ ou -1. Ces deux résultats combinés avec l'égalité $\left(\frac{P}{q}\right)=\left(\frac{q}{P}\right)$ qui dérive d'un théorème connu, suffisent pour établir la réciprocité énoncée plus haut. Il ne reste plus à considérer que le cas de deux nombres premiers de première espèce. Dans ce troisième cas, la réciprocité est évidente puisque nous avons vu plus haut qu'un nombre réel quelconque est toujours résidu de tout nombre premier de première espèce. Les trois cas que nous venons d'examiner, conduisant au même résultat, nous pouvons énoncer le théorème suivant qui est celui dont il a été question dans le préambule de ce mémoire.

„Désignant par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $A+B\sqrt{-1}$ (β et B étant pair „et pouvant se réduire à zéro) deux nombres premiers complexes, le „premier sera ou ne sera pas résidu quadratique du second, selon que le „second est ou n'est pas résidu quadratique du premier."

Berlin, au mois de Septbr. 1832.

31.

Démonstration du théorème de Fermat pour le cas des 14ièmes puissances.

(Par Mr. *Lejeune Dirichlet* prof. de math. à Berlin.)

S'il existe des nombres entiers t, u, v, propres à satisfaire à l'équation

$$1. \quad t^{14} = u^{14} + v^{14}$$

il est manifeste que tout facteur commun δ de deux d'entre eux, divisera nécessairement aussi le troisième. On pourra donc diviser chacun d'eux par δ, ce qui ne changera en rien la forme de l'équation: d'où l'on conclud, qu'il est permis, pour prouver l'impossibilité de l'équation (1.), d'y considérer les entiers t, u, v, pris deux à deux, comme libres de tout facteur commun. Cela posé, ces entiers devront évidemment être supposés l'un pair, les autres impairs, et le nombre pair sera l'un de ceux que renferme le second membre. On voit aussi que si parmi ces nombres il y en a un divisible par 7, ce ne saurait être t, puisque 7 ne peut jamais diviser la somme de deux carrés premiers entre eux. L'équation étant symétrique par rapport à u et à v, nous pourrons supposer que, si parmi ces nombres il y a un multiple de 7, v se trouve dans ce cas. Transposant le terme en u, l'équation se changera en celle-ci

$$2. \quad t^{14} - u^{14} = v^{14}$$

qu'on peut mettre sous cette autre forme

$$3. \quad (t^2-u^2)[(t^2-u^2)^6 + 7t^2u^2(t^4-t^2u^2+u^4)^2] = v^{14}.$$

Les nombres t, u ayant été supposés premiers entre eux, t^2-u^2 et tu sont aussi sans diviseur commun; il en est de même de t^2-u^2 et $t^4-t^2u^2+u^4$, car tout nombre premier diviseur commun de ceux-ci diviserait

$$t^4-t^2u^2+u^4-(t^2-u^2)^2 = t^2u^2,$$

et par conséquent aussi tu. Les nombres tu et t^2-u^2 auraient donc ce même diviseur commun, ce qui ne s'accorde pas avec ce qu'on vient de prouver. Il résulte de là, si l'on fait pour abréger

$$t^2-u^2 = \varphi, \quad tu(t^4-t^2u^2+u^4) = \psi$$

que φ et ψ, qui sont évidemment l'un pair, l'autre impair, n'ont pas de diviseur commun, et l'on aura

$$4. \quad \varphi((\varphi^3)^2 + 7\psi^2) = v^{14}$$

Nous distinguons maintenant deux cas, selon que v est ou n'est pas divisible par 7. Si l'on suppose en premier lieu v non-divisible par 7, φ ne le sera pas non plus. Il suit de là et de ce que φ et ψ sont premiers entre eux, que les deux facteurs du premier membre sont aussi premiers entre eux et par conséquent égaux l'un et l'autre à des 14ièmes puissances. D'un autre côté, l'on conclud d'un théorème connu que la racine de la 14ième puissance impaire $(\varphi^3)^2+7\psi^2$ a la même forme, g^2+7h^2 et l'on prouve facilement *) que les entiers g, h satisfont à l'équation

$$\varphi^3 + \psi\sqrt{-7} = (g + h\sqrt{-7})^{14}$$

où il faut égaler séparément les parties réelles et les coefficiens de $\sqrt{-7}$. Sans développer cette expression il est évident que la valeur qu'elle donne pour ψ, est divisible par 7. Mais ψ étant égal à $tu(t^4 - t^2u^2 + u^4) = tu((t^2-u^2)^2 + t^2u^2)$ ne peut être divisible par 7, à moins que t ou u ne le soit, ce qui serait contraire à la supposition faite plus haut. Il est donc prouvé que le cas, où l'on suppose v non-divisible par 7, en même temps que t et u, ne saurait avoir lieu. Reste à faire voir que l'équation (2.) ne peut pas subsister non plus, si l'on considère v comme un multiple de 7. En y faisant $v = 7w$ elle deviendra

$$t^{14} - u^{14} = 7^{14} w^{14}.$$

C'est l'équation dont il s'agit de prouver l'impossibilité. Sans compliquer la marche de la démonstration, nous pouvons, au lieu de l'équation précédente, traiter l'équation plus générale

$$5. \quad t^{14} - u^{14} = 2^m 7^{1+n} w^{14}$$

les nombres t, u étant toujours supposés sans diviseur commun, et m, n désignant des entiers positifs (sans excepter zéro).

En conservant toutes les dénominations précédentes, l'équation pourra être mise sous cette forme.

$$\varphi((\varphi^3)^2 + 7\psi^2) = 2^m 7^{1+n} w^{14}.$$

Comme elle exige évidemment que φ soit divisible par 7, faisons $\varphi = 7\chi$; nous aurons ainsi

---

*) Pour prouver ce dont il s'agit, on peut s'y prendre à peu près de la même manière dont nous avons démontré un théorème analogue (Vol. III. de ce Journal, page 359. 360). Les théorèmes I. (page 355.) et III. (page 358.) ainsi que leurs démonstrations subsistent également, lorsque a est négatif. Supposent donc $a = -7$, la démonstration s'achève comme à l'endroit cité; elle est même plus simple en ce qu'elle n'est pas compliquée de la considération des solutions, en nombre infini, de l'équation $t^2 - au^2 = 1$ qui n'en a qu'une lorsque a est négatif.

$$7^2\chi(\psi^2+7(7^2\chi^3)^2) = 2^m 7^{1+n} w^{14}.$$

Il est facile de voir que les deux facteurs $7^2\chi$ et $\psi^2+7(7^2\chi^3)^2$, dont le second est impair, n'ont pas de diviseur commun. Il résulte de là que l'équation précédente ne peut subsister à moins que $\psi^2+7(7^2\chi^3)^2$ et $7^2\chi$ ne soient le premier une $14^{\text{ième}}$ puissance, le second le produit d'une pareille puissance par $2^m 7^{1+n}$. Quant à la première de ces conditions, elle exige, d'après ce qu'on a vu plus haut, qu'on ait

$$\psi+7^2\chi^3\sqrt{-7} = (r+s\sqrt{-7})^{14}$$

c'est-à-dire

$$7^2\chi^3 = \frac{(r+s\sqrt{-7})^{14}-(r-s\sqrt{-7})^{14}}{2\sqrt{-7}}$$

où les entiers r, s sont premiers entre eux, l'un pair, l'autre impair et le premier de plus non-divisible par 7. On peut faire subir à cette expression une transformation semblable à celle que nous avons effectuée sur le premier membre de l'équation (2.). Il suffit pour cela de remplacer dans le premier membre de l'équation (3.), t et u respectivement par $r+s\sqrt{-7}$ et $r-s\sqrt{-7}$. En opérant ainsi, et en faisant pour abréger,

$$(r^2+7s^2)(r^4-2.7^2r^2s^2+7^2s^4) = R,$$

l'on obtient

$$7^2\chi^3 = 2.7.rs[R^2-(7.4^3r^3s^3)^2],$$

ou ce qui revient au même, en multipliant les deux membres par 7^4,

$$7^6\chi^3 = 2.7^5rs(R+7(4rs)^3)(R-7(4rs)^3)$$

Il est facile de faire voir que les trois facteurs 2.7^5rs, $R+7(4rs)^3$, $R-7(4rs)^3$, pris deux à deux, n'ont pas de diviseur commun. Il est d'abord évident que s'il y a un diviseur commun, ce ne peut être ni 2 ni 7, car les deux derniers des nombres en question sont impairs et non-divisibles par 7. Soit en second lieu p un nombre premier impair différent de 7 et supposons qu'il soit diviseur commun de deux des expressions dont il s'agit. On s'aperçoit, à leur seule inspection, que p sera facteur commun de rs et R, et en faisant ensuite attention à la manière dont l'expression R est composée en r et s, il est évident qu'il est nécessaire que p divise à la fois r et s, ce qui est absurde, r et s étant premiers entre eux. Nous avons vu plus haut que $7^2\chi$ devait être une $14^{\text{ième}}$ puissance multipliée par $2^m 7^{1+n}$; le premier membre $7^6\chi^3$ de la dernière équation sera donc le produit d'une puissance du même degré et de $2^{3m}7^{3+3n}$. Il résulte de là et de ce que les trois facteurs du second

membre sont premiers entre eux, que les deux derniers sont des $14^{\text{ièmes}}$ puissances, et que le premier est le produit d'une pareille puissance et de $2^{3m}7^{3+3n}$. On aura donc

$$2.7^5 rs = 2^{3m}7^{3+3n}v'^{14}, \quad R+7(4rs)^2 = t'^{14}; \quad R-7(4rs)^2 = u'^{14}.$$

Il est facile de voir qu'on peut mettre le second membre de la première de ces équations sous la forme $2^{3m}7^{6+n'}v'^{14}$, où n' désigne un entier positif ou zéro. Lorsque n diffère de zéro la chose est évidente; dans le cas où $n=0$, il faut pour que le second membre puisse être égal au premier membre divisible par 7^5, que v' soit un multiple de 7. Mettant en conséquence $7v'$ à la place de v', le second membre prendra encore la forme supposée. Nous pouvons donc remplacer la première des équations précédentes par celle-ci:

$$4rs = 2^{3m+1}7^{1+n'}v'^{14}.$$

Prenant ensuite la différence des deux dernières, comparant et posant, pour abréger $v'^2 = w'$, il viendra

$$t'^{14} - u'^{14} = 2^{9m+4}7^{3n'+4}w'^{14}.$$

Cette équation dans laquelle t' et u' n'ont pas de diviseur commun, est entièrement semblable à l'équation (5.) dont elle dérive. Seulement, les entiers t', u' qui y entrent, sont beaucoup plus petits que leurs analogues t, u dans l'équation (5.). On est en droit de conclure de là, à la manière ordinaire, que l'équation (5.), et par conséquent aussi l'équation (1.) ne saurait avoir lieu.

Berlin au mois d'Octobre 1832.

32.

Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.

(Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

1.

Denotante X functionem variabilis x rationalem integram quarti ordinis, demonstravit olim **Eulerus**, transcendentes huiusmodi:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$$

gaudere proprietate singulari, ut posito

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(a),$$

ipsa a e x et y algebraice inveniatur. Quo theoremate, advocata transformatione transcendentis $\Pi(x)$, a Cl. **Landen** detecta, superstruxit Cl. **Legendre** amplam theoriam, quam hodie nomine *theoriae functionum ellipticarum* usurpamus. Neque tamen harum transcendentium indoles atque natura plane pernosci poterat, considerando hanc solam transcendentem $\Pi(x)$ sive etiam generaliorem hanc

$$\int_0^x \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

in qua $f(x)$ functio ipsius x rationalis est, sed considerari debuit functio, cuius ipsa $\Pi(x)$ inversa est, sive *considerari debuit intervallum x ut functio integralis* $\Pi(x)$.

Etenim si analogiam functionum trigonometricarum respicimus, in quas casu speciali functiones ellipticae abeunt, etiam hic videmus, posito

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}},$$

considerari ab Analystis intervallum x tanquam functionem integralis u, cui nomen *sinus* tribuunt. Quam functionem scimus proprietatibus gravissimis gaudere, quae eius usum et applicationem per totam analysin frequentissimam reddunt. Quippe quae, ut de aliis taceam, pro quolibet valore argumenti u valorem unicum ac determinatum habet; evolvi potest in seriem secundum dignitates ipsius u progredientem, quae pro omnibus argumenti valoribus et realibus et imaginariis convergit; discerpi potest in factores lineares, qui determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio evanescit; denique *gaudet illa proprietatibus omnibus functionis ipsius*

u rationalis integrae. E contra functionem u considerant analystae tantum ut inversam functionis $x = \sin(u)$, dicentes eam esse, cuius *sinus* $= x$ aut scribentes $u =$ *arcus sinus* x; neque ea functio ullo modo evolvi potest in seriem semper convergentem, neque determinata est, sed numerum valorum infinitum habet, quippe cuius eadem est natura atque *radicis aequationis algebraicae ordinis infiniti*, $u = \sin(x)$. Unde nec nomen nec signum peculiare ei tribuere, idoneum putabatur.

Eodem plane modo comparatum est de transcendentibus ellipticis sive de transcendentibus $\Pi(x) = u$, quoties X ascendit ordinem quartum. Etiam hoc casu functio $\Pi(x)$ nullo modo evolvi potest in seriem semper convergentem, neque valorem determinatum habet, sed numerum adeo valorum dupliciter infinitum. Contra vero, quod a nobis in *Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum* factum est, ubi exhibita transcendente $\Pi(x)$ sub forma simpliciore, ad quam Cl. Legendre eam revocavit:

$$u = \Pi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2 xx)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2\varphi)}},$$

consideramus *amplitudinem* φ tamquam functionem integralis u: functio x quam hunc in modum exhibemus:

$$x = \sin\operatorname{am}(u),$$

gaudet proprietatibus omnibus functionis rationalis fractae, Quippe spectari potest functio illa tamquam fractio cuius et denominator et numerator sunt functiones rationales integrae ordinis infiniti, quas et ipsas ut transcendentes novas valde memorabiles in analysin introduxi. Evolvi possunt functiones illae in series rapidissime convergentes pro quolibet argumenti u valore sive reali sive imaginario; discerpi possunt in factores lineares, qui facile determinantur valoribus ipsius u, pro quibus functio $x = \sin\operatorname{am}(u)$ aut evanescit aut in infinitum abit. Ipsa tandem functio $x = \sin\operatorname{am}(u)$, ut de aliis taceam, gaudet proprietate, qua ante omnes transcendentes hactenus notas excellit, *periodo duplici et reali et imaginaria*. Quemadmodum enim functio trigonometrica $\sin(u)$ periodo reali gaudet, ut cuius valores crescente u, inde a $u = 2\Pi$ eodem ordine redeunt, sive cuius valores mutato u in $u + 2\Pi$ immutati manent; quemadmodum functio exponentialis e^u periodum imaginariam habet, ut quae mutato u in $u + 2\Pi\sqrt{-1}$ et ipsa valorem non mutat: ita, ex observatione a nobismet ipsis et Cl. Abel facta, functio elliptica $\sin\operatorname{am}(u)$ valorem non mutat, mutato u et in $u + 4K$, et in $u + 2K'\sqrt{-1}$, designantibus K, K' inte-

gralia definita,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2\varphi)}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi + \varkappa^2 \sin^2\varphi)}}.$$

Quibus de causis nos et Cl. **Abel** arbitrati sumus, artem analyticam magna incrementa capturam esse, introducta hac nova functione $x = \sin \mathrm{am}(u)$, cuius ipsa transcendens $u = \Pi(x)$ est inversa sive una aliqua e radicibus aequationis algebraicae $x = \sin \mathrm{am}(u)$, quarum numerus dupliciter infinitus.

2.

Theorema Eulerianum, de quo diximus, a Cl. **Abel** mirum in modum amplificatum est, videlicet ad casus omnes extensum, quibus functio X, quae in integralibus ellipticis tantum ad ordinem quartum ascendebat, functio est quaelibet integra rationalis. Ut a casu simplicissimo post eum, de quo supra egimus, ordiamur, designante X functionem ipsius x integram rationalem ordinis quinti aut sexti, sit

$$\int_0^x \frac{(A + A_1 x)\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$$

proposita aequatione:

$$\Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z) = \Pi(a) + \Pi(b),$$

demonstravit Cl. **Abel**, ipsas a, b e quantitatibus x, y, z *algebraice* determinari posse.

Generaliter autem, *designante $f(x) = X$ functionem ipsius x integram rationalem ordinis cuiuslibet $2m^{\text{ti}}$ sive $(2m-1)^{\text{ti}}$, posito*

$$\int_0^x \frac{A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-2} x^{m-2})\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x)$$

demonstratum est a Cl. **Abel**, *dato numero m valorum variabilis x:*

$$x, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1},$$

ex illis algebraice determinari posse $m-1$ quantitates

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$$

tales, ut satisfaciant aequationi transcendentali:

$$\Pi(x) + \Pi(x_1) + \Pi(x_2) + \ldots + \Pi(x_{m-1})$$
$$= \Pi(a) + \Pi(a_1) + \ldots + \Pi(a_{m-2}).$$

Et invenit Cl. **Abel** *ipsas a, a_1, ..., a_{m-1} ut radices aequationis algebraicae ordinis $(m-1)^{\text{ti}}$, cuius coefficientes singuli per x, x_1, ..., x_{m-1} atque $\sqrt{X}$, $\sqrt{X_1}$, ..., $\sqrt{X_{m-1}}$ rationaliter exhibentur, siquidem $X_1 = f(x_1)$, $X_2 = f(x_2)$, etc.*

De quo theoremate facile etiam sequitur, dato numero quolibet valorum ipsius x, summam transcendentium $\Pi(x)$, quae ad valores illos datos pertinent, semper exprimi posse per numerum $m-1$ transcendentium $\Pi(x)$, quae pertinent ad valores ipsius x e datis algebraice determinabiles.

Theoremati antecedenti ut monumento pulcherrimo ingenii admirabilis morte praematuri abrepti *theorematis Abeliani* nomen imponere placet. Ipsas etiam transcendentes $\Pi(x)$ casibus, quibus X ultra ordinem quartum ascendit, *transcendentes Abelianas* vocare lubet, ut quas ante illum nemo consideraverat. Quas Cl. Legendre etiam idoneo nomine *hyperellipticas* appellat (fonctions ultra-elliptiques) *).

3.

Casu quo $u=\Pi(x)$ est integrale ellipticum sive X tantum ad ordinem quartum ascendit, docet theorema Eulerianum, siquidem vice versa $x=\lambda(u)$, functionem $\lambda(u+u')$, cuius argumentum est binomen $u+u'$, exhiberi algebraice per functiones $\lambda(u)$, $\lambda(u')$, quae ad singula nomina u, u' pertinent, sicuti de functionibus trigonometricis in elementis proponitur. Jam rogo et, *quaenam sint casu generaliori functiones illae, quarum inversae sunt transcendentes Abelianae, et quomodo de his exhibitum audiat theorema Abelianum.*

Theorema Eulerianum exhibet *algebraice* integrale completum aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, quae in aequatione differentiali separatae sunt, huiusmodi:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

in qua, designante $f(x)$ functionem integram rationalem ordinis quarti, $X=f(x)$, $Y=f(y)$. Jam rogo, *quaenam sint aequationes differentiales, quarum integralia completa algebraice exhibeat theorema Abelianum.*

---

*) Cl. Abel commentationem *de proprietatibus singularibus integralium functionum algebraicarum* iam a. 1826 Academiae Parisiensi exhibuit, quam Illustris Academia commentationibus *eruditorum alienorum* inserendam decrevit. Quarum tamen publicatio cum in dies proferatur, valde obtandum esset, ut Illustri Acedemiae inter ipsas eius commentationes eam exhibere placeat, vel si forte usus vetat, ut parti certe historicae commentationum inseratur. Quamquam pietatis quodammodo foret, honorem et insuetum tribuere memoriae juvenis eximii, cui ipsos honores Academicos praeclusit fatum irrevocabile. Quod, dum Parisiis agebam, a Cl. Fourrier precibus meis concessum, utinam, mortuo viro excellentissimo, illustris eius successor ratum facere velit.

4.

Ordiamur rursus a casu simplicissimo transcendentium Abelianarum, eum dico, quo functio X tantum ad ordinem quintum aut sextum ascendit. Sit

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi(x)$$
$$\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x),$$

ac ponatur:

$$\Phi(x) + \Phi(y) = u$$
$$\Phi_1(x) + \Phi_1(y) = v,$$

considero x, y ut functiones ipsarum u, v, ac pono:

$$x = \lambda(u, v)$$
$$y = \lambda_1(u, v).$$

Quas functiones

$$\lambda(u, v), \quad \lambda_1(u, v),$$

quae ab argumentis duobus u, v pendent, in analysin introducamus necesse est, si analogiam functionum trigonometricarum et ellipticarum etiam in functionibus Abelianis servare placet.

5.

Posito, ut supra,

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{(A + A_1 x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

sive

$$\Pi(x) = A\Phi(x) + A_1\Phi_1(x),$$

docet theorema Abelianum, aequationis

$$\Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z) = \Pi(a) + \Pi(b)$$

solutionem dari algebraicam, sive a, b per quantitates x, y, z algebraice determinari posse. At observo, problema determinandi ipsas a, b e datis quantitatibus x, y, z indeterminatum esse, ideoque theorema Abelianum ita propositum nihil aliud docere, nisi e solutionibus innumeris aequationis propositae:

$$\Pi(a) + \Pi(b) = \Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z)$$

unam extare algebraicam. Jam vero observo, relationes illas algebraicas, a Cl. Abel exhibitas, quarum ope a, b e quantitatibus x, y, z determinantur, nullo modo pendere ab ipsis A, A_1, quae afficiunt numeratorem fractionis, cuius integrale est transcendens $\Pi(x)$. Unde eaedem aequationes binae algebraicae inter x, y, z, a, b propositae utrique simul satisfaciunt aequationi transcendentali:

$$\Phi(a)+\Phi(b)=\Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)$$
$$\Phi_1(a)+\Phi_1(b)=\Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(z).$$

Quibus aequationibus duabus simul propositis, iam a, b e quantitatibus x, y, z omnino determinatae sunt. Itaque theorema Abelianum, si eius vim ac naturam recte perspicere velis, in modum sequentem proponi debet.

Theorema.

„Designante X functionem ipsius x integram rationalem ordinis „quinti aut sexti, sit

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}=\Phi(x),\quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}=\Phi_1(x),$$

„propositis duabus simul aequationibus,

$$\Phi(a)+\Phi(b)=\Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)$$
$$\Phi_1(a)+\Phi_1(b)=\Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(z),$$

„quantitates a, b e datis quantitatibus x, y, z algebraice determinantur."

6.

Theorema antecedens facile ad eum casum extenditur, quo summa quatuor sive cuiuslibet numeri transcendentium per summam binarum exprimatur, quarum argumenta ab illarum argumentis algebraice pendent. Consideremus casum, quo summa quatuor transcendentium per summam binarum exhibenda est, theorema Abelianum, ad eum casum applicatum, rursus docet, propositis duabus simul aequationibus,

$$\Phi(a)+\Phi(b)=\Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(x')+\Phi(y')$$
$$\Phi_1(a)+\Phi_1(b)=\Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(x')+\Phi_1(y'),$$

quantitates a, b e datis quantitatibus x, y, x', y' algebraice determinari.

Ponamus iam:

$$\Phi(x)+\Phi(y)=u,\quad \Phi(x')+\Phi(y')=u',$$

porro

$$\Phi_1(x)+\Phi_1(y)=v,\quad \Phi_1(x')+\Phi_1(y')=v',$$

unde e duabus aequationibus propositis sequitur:

$$\Phi(a)+\Phi(b)=u+u',\quad \Phi_1(a)+\Phi_1(b)=v+v'.$$

E notatione autem supra explicata ex his aequationibus habemus vicissim:

$$x=\lambda(u,v),\quad y=\lambda_1(u,v),$$
$$x'=\lambda(u',v'),\quad y'=\lambda_1(u',v'),$$
$$a=\lambda(u+u',v+v'),\quad b=\lambda_1(u+u',v+v').$$

Quibus statutis, de functionibus novis $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$ iam proponimus hoc theorema, in quod theorema Abelianum abit:

Theorema.

„*Designante X functionem integram rationalem ordinis quinti „aut sexti, ponatur*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi(x), \quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x);$$

„*sint porro*

$$x = \lambda(u, v), \quad y = \lambda_1(u, v)$$

„*functiones tales argumentorum u, v, ut simul sit:*

$$\Phi(x) + \Phi(y) = u, \quad \Phi_1(x) + \Phi_1(y) = v,$$

„*gaudebunt functiones illae*

$$\lambda(u, v), \quad \lambda_1(u, v)$$

„*proprietate ei simili, quae de functionibus trigonometricis et ellipticis „in elementis proponitur, ut functiones illae argumentorum binominum*

$$u + u', \; v + v'$$

„*algebraice exhibeantur per functiones, quae ad singula nomina*

$$u, \; v; \quad u', \; v'$$

„*pertinent; sive ut functiones*

$$\lambda(u + u', v + v'), \quad \lambda_1(u + u', v + v')$$

„*algebraice exhibeantur per functiones*

$$\lambda(u, v), \quad \lambda(u', v')$$
$$\lambda_1(u, v), \quad \lambda_1(u', v').“$$

7.

Theorema autem generale iam ita audit.

Theorema generale.

„*Designante X functionem ipsius x rationalem integram ordinis „$(2m-1)^{ti}$ aut $2m^{ti}$, sit*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x), \quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1(x), \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_2(x), \; \ldots .$$
$$\ldots \int_0^x \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_{m-2}(x);$$

„*quibus positis, statuantur m—1 functiones*

$$x, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_{m-2}$$

„*quae singulae a quantitatibus m—1 sequentibus*

$$u, \; u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_{m-2}$$

„*ita pendent, ut simul habeantur aequationes:*

$$u = \Phi(x) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \ldots + \Phi(x_{m-2})$$
$$u_1 = \Phi_1(x) + \Phi_1(x_1) + \Phi_1(x_2) + \ldots + \Phi_1(x_{m-2})$$

$$u_2 = \Phi_2(x) + \Phi_2(x_1) + \Phi_2(x_2) + \dots + \Phi_2(x_{m-2})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{m-2} = \Phi_{m-2}(x) + \Phi_{m-2}(x_1) + \Phi_{m-2}(x_2) + \dots + \Phi_{m-2}(x_{m-2}),$$

„*sintque functiones illae:*

$$x = \lambda(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2})$$
$$x_1 = \lambda_1(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2})$$
$$x_2 = \lambda_2(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{m-2} = \lambda_{m-2}(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2});$$

„*gaudent functiones illae proprietate eadem, quae de functionibus tri-* „*gonometricis et ellipticis valet, ut illae pro argumentis binominibus*

$$u + u', \quad u_1 + u'_1, \quad u_2 + u'_2, \quad \dots, \quad u_{m-2} + u'_{m-2},$$

„*exprimantur algebraice per functiones easdem, quarum argumenta sunt* „*singula nomina*

$$u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2}$$

„*atque*

$$u', u'_1, u'_2, \dots, u'_{m-2};$$

„*sive ut functiones*

$$\lambda\,(u + u', u_1 + u'_1, \dots, u_{m-2} + u'_{m-2}),$$
$$\lambda_1(u + u', u_1 + u'_1, \dots, u_{m-2} + u'_{m-2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{m-2}(u + u', u_1 + u'_1, \dots, u_{m-2} + u'_{m-2})$$

„*exprimantur algebraice per functiones*

$$\lambda\,(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2})$$
$$\lambda_1(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{m-2}(u, u_1, u_2, \dots, u_{m-2})$$

„*atque*

$$\lambda\,(u', u'_1, u'_2, \dots, u'_{m-2})$$
$$\lambda_1(u', u'_1, u'_2, \dots, u'_{m-2})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_{m-2}(u', u'_1, u'_2, \dots, u'_{m-2})."$$

Observo, functiones quaesitas e datis inveniri ope aequationis algebraicae ordinis $(m-1)^{ti}$, quae generaliter assignari potest per theorema Abelianum.

8.

Theorema Eulerianum exhibet integrale completum algebraicum aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, in qua varia-

biles separate sunt. Theorema Abelianum exhibet $m-1$ integralia completa algebraica (id est, quae $m-1$ constantes arbitrarias involvunt), $m-1$ aequationum differentialium linearium primi ordinis inter m variabiles, in quibus singulis variabiles illae separatae sunt. Ordiamur rursus a casu simplicissimo transcendentium Abelianorum, quo X ad quintum aut sextum ordinem ascendit.

Eo casu aequationes duas transcendentales:

$$\Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)=\Phi(a)+\Phi(b)$$
$$\Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(z)=\Phi_1(a)+\Phi_1(b),$$

scimus per theorema Abelianum, locum tenere duarum aequationum algebraicarum inter quantitates quinque x, y, z, a, b. Consideremus ipsas a, b ut constantes; differentiatis aequationibus propositis, omnino abire videmus ipsas a, b, quae igitur in aequationibus transcendentalibus sive in aequationibus algebraicis, quae earum locum tenent, sunt constantes arbitrariae. Hinc fluit theorema sequens:

Theorema.

„Sit $f(x)$ functio rationalis integra ipsius x ordinis quinti aut „sexti, sit porro $f(x)=X,\ f(y)=Y,\ f(z)=Z,$
„aequationes duae differentiales lineares primi ordinis inter tres varia- „biles, in quibus singulis variabiles x, y, z, separatae sunt,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{X}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0$$
$$\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{X}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{X}}=0,$$

„dua habent integralia completa algebraica."

De transcendentibus Abelianis ordinis proxime insequentis simili modo theorema hoc habetur.

Theorema.

„Sit $f(x)$ functio rationalis integra ipsius x ordinis septimi aut „octavi, sit porro

$$f(w)=W,\ f(x)=X,\ f(y)=Y,\ f(z)=Z,$$

„aequationes tres differentiales lineares primi ordinis, inter variabiles „quatuor, in quibus singulis variabiles w, x, y, z, separatae sunt,

$$\frac{dw}{\sqrt{W}}+\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0,$$
$$\frac{w\,dw}{\sqrt{W}}+\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{Y}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}=0,$$

$$\frac{w^2\,dw}{\sqrt{W}} + \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} + \frac{y^2\,dy}{\sqrt{Y}} + \frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}} = 0,$$

„*tria habent integralia completa algebraica.*"

Quae theoremata facile ad numerum quemlibet variabilium et aequationum differentialium extenduntur. Ipsa integralia completa algebraica generaliter suggerit theorema Abelianum.

Novimus, olim Ill. Lagrange in commentationibus Academiae Taurinensis, ab ipsa aequatione differentiali inter duas variabiles profectum, per methodos directas integrationis ad ipsum eius integrale completum algebraicum ascendisse, atque ita methodo nova ac singulari demonstravisse theorema Eulerianum, quod ei tantam ipsius Euleri excitavit admirationem. Ita etiam operae pretium fore credimus, duarum illarum aequationum differentialium inter tres variabiles dua integralia completa algebraica, sive generalius $m-1$ aequationum illarum differentialium inter m variabiles $m-1$ integralia completa algebraica per methodos directas integrationis investigare, atque ita nova nec minus singulari demonstratione theorema Abelianum adornare.

Regiom. 12. Julii 1832.

33.

Über den Ausdruck $\pi = \frac{2}{i}\log i$.

(Vom Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

1. Es ist

$$\frac{m+i}{m-i} = \frac{(n+i)(p+i)}{(n-i)(p-i)} = \frac{np-1+(n+p)i}{np-1-(n+p)i},$$

wenn

$$m = \frac{np-1}{n+p} \quad \text{oder} \quad (m-n)(m-p) = m^2+1.$$

Man hat also

$$1. \quad \log\frac{m+i}{m-i} = \log\frac{n+i}{n-i} + \frac{p+i}{p-i},$$

wenn

$$2. \quad p = \frac{nm+1}{n-m},$$

oder

$$3. \quad (m-n)(m-p) = m^2+1.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich der Werth von p, wenn m und n beliebig angenommen werden. Auf gleiche Weise läfst sich $\log\frac{p+i}{p-i}$ wieder in $\log\frac{q+i}{q-i}+\log\frac{r+i}{r-i}$ zerfällen, wodurch $\log\frac{m+i}{m-i}$ in die Summe dreier ähnlicher Logarithmen aufgelöset wird, und man übersieht leicht, dafs allgemein:

$$4. \quad \log\frac{m+i}{m-i} = \log\frac{n+i}{n-i} + \log\frac{p+i}{p-i} + \log\frac{q+i}{q-i} + \ldots + \log\frac{u+i}{u-i} + \log\frac{v+i}{v-i} + \log\frac{w+i}{w-i},$$

wenn die Gleichungen statt finden:

$$5. \quad \frac{nm+1}{n-m} = N, \quad \frac{Np+1}{p-N} = P, \quad \frac{Pq+1}{q-P} = Q, \ldots \quad \frac{Tu+1}{u-T} = U, \quad \frac{Uv+1}{v-U} = w,$$

in denen $m, n, p, q, \ldots, u, v,$ beliebig sind.

Da $\frac{1+i}{1-i} = i$, so erhält man:

$$\pi = \frac{2}{i}\log i = \frac{2}{i}\log\frac{1+i}{1-i} = \frac{4}{i}\left(\frac{i}{1}+\frac{i^3}{3}+\frac{i^5}{5}+\ldots\right) = 4\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots\right).$$

Setzt man in den Bedingsgleichungen (5.) die Gröfsen $m=1$ und $n=2$, so kommt N oder $p=3$, und daher:

$$\pi = \frac{2}{i}\log\frac{1+i}{1-i} = \frac{2}{i}\log\frac{(2+i)(3+i)}{(2-i)(3-i)} = \frac{2}{i}\log\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} + \frac{2}{i}\log\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}} = 4\begin{Bmatrix}\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \dots \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \dots\end{Bmatrix}.$$

Nimmt man wieder $m=1$ **und** $n=p=q=r=5$ **an, so erhält man nach einander** $N=\frac{3}{2}$, $P=\frac{17}{7}$, $Q=\frac{46}{9}$ **und** $R=-239$, **folglich**

$$\pi = \frac{2}{i}\log\frac{1+i}{1-i} = \frac{2}{i}\log\frac{(5+i)^4(-239+i)}{(5-i)^4(-239-i)} = 4\begin{Bmatrix}4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \dots\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots\right)\end{Bmatrix}.$$

Wenn man $m=5$ **und** $n=p=10$ **setzt, so wird** $N=\frac{51}{5}$, $P=-515$, **und** $\log\frac{5+i}{5-i}$ **verwandelt sich durch diese Werthe in** $2\log\frac{10+i}{10-i} + \log\frac{-515+i}{-515-i}$, **folglich geht die vorige Reihe für** π **über in:**

$$\pi = \frac{2}{i}\log\frac{(10+i)^8(-515+i)^4(-239+i)}{(10-i)^8(-515-i)^4(-239-i)} = 4\begin{Bmatrix}8\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5} - \dots\right) \\ -4\left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3.515^3} + \frac{1}{5.515^4} - \dots\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots\right)\end{Bmatrix}.$$

Wird $\log\frac{m+i}{m-i}$ **durch** $[m]$ **bezeichnet, so lassen sich aus (3.) folgende Gleichungen ableiten:**

$$[1]=[2]+[3],\quad [2]=[3]+[7],\quad [3]=[4]+[13]=[5]+[8],$$
$$[4]=[5]+[21],\quad [5]=[6]+[31]=[7]+[18],\quad [6]=[7]+[43],$$
$$[7]=[8]+[57]=[9]+[32]=[12]+[17]\ \dots\dots$$

Eine gehörige Zusammenstellung dieser Gleichungen giebt:

$$[1]=2[3]+[7]=2[5]+[7]+2[8]=3[7]+2[8]+2[18]=$$
$$5[8]+2[18]+3[57]=5[13]+5[21]+2[31]+2[43]+3[57]=\dots,$$

wodurch sogleich ebensoviele Reihen für π **entstehen. Die weitere Fortsetzung dieser Gleichungen wird, bei geschickter Auswahl, noch viel convergentere Reihen für** π **liefern.**

II. Denkt man sich in $N(1)$ **bis** $N(5)$ **die Gröfsen** $m, n, p, \dots$ **mit dem Factor** i **behaftet, so sieht man sogleich, dafs**

$$6.\quad \log\frac{m+1}{m-1} = \log\frac{n+1}{n-1} + \log\frac{p+1}{p-1},$$

wenn

$$7.\quad p = \frac{nm-1}{n-m},$$

oder

$$8.\quad (m-n)(m-p) = (m+1)(m-1),$$

und dafs ganz allgemein:

9. $\log\frac{m+1}{m-1} = \log\frac{n+1}{n-1} + \log\frac{p+1}{p-1} + \log\frac{q+1}{q-1} + \ldots + \log\frac{u+1}{u-1} + \log\frac{v+1}{v-1} + \log\frac{w+1}{w-1}$,

wenn

10. $\frac{nm-1}{n-m} = N, \quad \frac{Np-1}{p-N} = P, \quad \frac{Pq-1}{q-P} = Q, \ldots \quad \frac{Tu-1}{u-T} = U, \quad \frac{Uv-1}{v-U} = w.$

Bezeichnet man wieder $\log\frac{m+1}{m-1}$ durch $[m]$, so können aus (8.) die Gleichungen gezogen werden:

$$[41] = [49] + [251], \quad [49] = [55] + [449], \quad [97] = [99] + [4801],$$
$$[244] = [251] + [8749],$$

oder, was dasselbe ist:

$$\log 2 + 2\log 3 - 3\log 5 + \log 7 = 2\left(\frac{1}{251} + \frac{1}{3.251^3} + \frac{1}{5.251^5} + \ldots\right),$$
$$5\log 2 - 2\log 3 - 2\log 5 + \log 7 = -2\left(\frac{1}{449} + \frac{1}{3.449^3} + \frac{1}{5.449^5} + \ldots\right).$$
$$5\log 2 + \log 3 + 2\log 5 - 4\log 7 = -2\left(\frac{1}{4801} + \frac{1}{3.4801^3} + \frac{1}{5.4801^5} + \ldots\right),$$
$$\log 2 + 7\log 3 - 4\log 5 - \log 7 = -2\left(\frac{1}{8749} + \frac{1}{3.8749^3} + \frac{1}{5.8749^5} + \ldots\right).$$

Aus diesen 4 Gleichungen werden die Logarithmen der 4 Primzahlen 2, 3, 5, 7 durch stark convergirende Reihen gefunden. Die Zusammenstellung solcher, obgleich auf anderem Wege erhaltener Reihen, ist bekannt. Je mehr Logarithmen man auf einmal berechnen will, desto convergentere Reihen lassen sich anwenden. Um z. B. die Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 zu finden, könnte man sich der Gleichungen bedienen:

$$[199] = [244] + [1079], \quad [97] = [99] + [4801], \quad [769] = [881] + [6049],$$
$$[244] = [251] + [8749], \quad [197] = [199] + [19601].$$

Es kommt bei diesen Zerfällungen darauf an, m und n so zu wählen, dafs sowohl $m \pm 1$ und $n \pm 1$, als auch $m - n$ ein Product der Primzahlen ist, deren Logarithmen berechnet werden sollen.

Durch die Gleichungen (10.) kann man auch für einzelne Logarithmen sehr convergente Reihen erhalten, z. B.

$$\log 2 = 2\left\{3\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{84} + \frac{1}{3.84^3} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{21249} + \frac{1}{3.21249^3} + \ldots\right)\right\},$$
$$\log 3 = 2\left\{5\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \ldots\ldots\right) + \left(\frac{1}{117} + \frac{1}{3.117^3} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{181249} + \frac{1}{3.181249^3} + \ldots\right)\right\}.$$

34.
Note sur le théorème relatif à une certaine fonction transcendante démontré dans No. 22. cah. 3. du présent volume.

(Par Mr. *F. J. Richelot*, prof. en math. à Koenigsberg.)

Le théorème de Mr. Abel, qui se trouve exposé page 200. du quatrième volume embrasse de nouvelles transcendantes en si grand nombre, dont les propriétés sont si remarquables et diverses, qu'on doit s'efforcer à les réduire à un nombre aussi petit que possible. C'est pourquoi il faut remarquer, que l'intégrale de Mr. Minding se ramène aux fonctions elliptiques de la première espèce, tout comme le théorème énoncé n'est autre chose, que le théorème sur l'addition de ces mêmes fonctions. Mr. Legendre a donné plusieurs substitutions, pour ramener la plus générale fonction $\int_0^x P\,dx(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{2}}$, P étant une fonction rationelle de x, aux fonctions elliptiques, et il a réduit l'intégrale $\int_0^x dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$ à la première espèce. L'intégrale proposée avec son application mérite d'être développée à cause de la simplicité du résultat.

En effet, si l'on fait:

$$1.\quad \sqrt[3]{(1+ax^3)} = \alpha^{\frac{1}{3}}x+z,$$

on aura pour la transformée:

$$\frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{3}}}\left\{\frac{1-z^3}{3z}-\sqrt[2]{3}\int_1^z\frac{dz}{\sqrt{[(z)(4-z^3)]}}\right\}.$$

On peut démontrer aisément, en fesant, d'après Mr. Minding:

$$2.\quad \Delta x_1=\frac{x_1^3+a}{b},\quad \Delta x_2=\frac{x_2^3+a}{b},\quad \Delta x_3=\frac{x_3^3+a}{b},$$

et les quantités z_1, z_2, z_3 étant déterminées ainsi:

$$\Delta x_1=\alpha^{\frac{1}{3}}x_1+z_1,\quad \Delta x_2=\alpha^{\frac{1}{3}}x_2+z_2,\quad \Delta x_3=\alpha^{\frac{1}{3}}x_3+z_3,$$

qu'on aura:

$$3.\quad \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{1-z_1^3}{3z_1}+\frac{1-z_2^3}{3z_2}+\frac{1-z_3^3}{3z_3}\right)=\tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1\Delta x_1-x_2\Delta x_2}\right)^2;$$

c'est la quantité ajoutée dans le théorème énoncé. *Car* nous avons d'après l'équation (1.) ci-dessus:

$$\frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1-z^3}{3z}=\tfrac{1}{2}(\alpha^{\frac{1}{3}}x+z)x,$$

d'où s'en suit:

$$\frac{1}{2a^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1-z^3}{3z} = \tfrac{1}{2}x\Delta x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^3+a}{b}\right).$$

Cette formule étant substitué dans l'équation (3.), elle devient;

$$4.\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3+3a}{b}\right) = \tfrac{1}{2}a\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\Delta x_1-x_2\Delta x_2}\right)^2.$$

Mais M. Minding a déterminé d'après les équations (2.) les suivantes formules:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -3a+ab^3 \quad\text{et}\quad \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\Delta x_1-x_2\Delta x_2} = b,$$

qui étant substituées, l'équation (4.) devient identique.

Il sera ainsi évident, que le théorème proposé se réduit à l'addition de trois fonctions elliptiques, et qu'on aura:

$$5.\quad \int_0^{z_1}\frac{dz}{\sqrt[3]{[(z)(4-z^3)]}}+\int_\rho^{z_2}\frac{dz}{\sqrt[3]{[(z)(4-z^3)]}}+\int_0^{z_3}\frac{dz}{\sqrt[3]{[(z)(4-z^3)]}} = 3\int_\rho^1\frac{dz}{\sqrt[3]{[z(4-z^3)]}},$$

en ayant entre les quantités z_1, z_2, z_3 une équation algébrique, qui corresponde à l'expression donnée par M. Minding:

$$6.\quad x_3 = \frac{x_2^2\Delta x_1-x_1^2\Delta x_2}{x_1\Delta x_1-x_2\Delta x_2}.$$

L'intégrale definie: $\int_0^1\frac{dz}{\sqrt[3]{[z(4-z^3)]}}$ devient, en posant $z=\frac{1}{y}$, $+\int_1^\infty\frac{dy}{\sqrt[3]{(4y^3-1)}}$ qui se réduit d'après l'article (41.) des exercices à l'intégrale:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}.\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{[1-(\sin 15^\circ)^2\sin\varphi^2]}} = \frac{4}{\sqrt[3]{4}.\sqrt[4]{3}}F^1(\sin 15^\circ).$$

Pour transformer l'intégrale: $\int_0^z\frac{dz}{\sqrt[3]{[(z)(4-z^3)]}}$, on peut faire indifféremment l'une des deux substitutions suivantes:

$$\cos\varphi = \frac{4^{\frac{1}{3}}-(1+3^{\frac{1}{2}})z}{4^{\frac{1}{3}}-(1-3^{\frac{1}{2}})z},\quad \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4\cos\psi^2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{4}\sin\psi^2\right) = \frac{4^{\frac{1}{3}}-z}{z\sqrt{3}}.$$

Le résultat de la première sera:

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt[3]{[(z)(4-z^3)]}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}.\sqrt[4]{3}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{[1-(\sin 15^\circ)^2\sin\varphi^2]}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}.\sqrt[4]{3}}F(\sin 15^\circ,\varphi).$$

D'où s'en suit, que l'équation (5.) devient:

$$F(\sin 15^\circ,\varphi_1)+F(\sin 15^\circ,\varphi_2)+F(\sin 15^\circ,\varphi_3) = 4F^1(\sin 15^\circ),$$

ou, en posant $\varphi=\mathrm{am}(u,\sin 15^\circ)$, $K=F^1\sin 15^\circ$:

$$u_1+u_2+u_3 = 4K,$$

pour la quelle nous avons l'équation suivante entre les quantités u_1, u_2, u_3, correspondante à la formule (6.):

$$-\sin\mathrm{am}\,u_3 = \frac{\sin\mathrm{am}\,u_1\cos\mathrm{am}\,u_2\,\Delta\mathrm{am}\,u_2+\sin\mathrm{am}\,u_2\cos\mathrm{am}\,u_1\,\Delta\mathrm{am}\,u_1}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u_1).\sin^2\mathrm{am}\,u_2}.$$

Koenigsberg, le 26. novembre 1832.

35.

Avis.

En insérant dans ce journal tome 8. cah. 4. page 411. le programme du prix de mathématiques proposé par l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg dans sa séance du 29. Décembre 1831, programme que cette illustre société avait dans ce but eu la bonté de transmettre au rédacteur, il a exprimé le désir que les académies des divers pays daignassent suivre l'exemple de celle de St. Petersbourg, en lui fesant parvenir les programmes des prix des mathématiques proposés par Elles et ensuite les listes des écrits qui auront été corronnés. Il voudrait contribuer par son journal à rendre encore plus généralement connus ces morceaux si importants pour la science; cette publication engagerait peut être à entrer en concours quelques-uns des savans qui sans cela n'auraient pas été instruits des problèmes proposés.

L'académie royale de Berlin vient de céder de son côté à l'invitation de l'éditeur, en daignant lui transmettre le programme du prix de mathématiques publié par Elle en 1832, avec la permission de l'insérer dans son journal. En fesant cela, il Lui présente respectueusement ses remercimens sincères de l'honneur qu'Elle a bien voulu accorder à lui et à son journal.

En même tems il réitère l'expression du désir de recevoir les programmes des prix des autres académies, et il adresse de nouveau à ces illustres sociétés la prière, de vouloir bien les lui faire parvenir, et d'y faire succéder en son tems les listes des écrits qui auront été courronnés.

Quaestio

quam academiae regiae scientiarum borussicae classis mathematica certamini litterario in a. MDCCCXXXVI proponit promulgata in coetu sollemni anniversario Leibnitianae memoriae dicato d. V. Jul. a. MDCCCXXXII.

Inter tres cometas, quorum revolutio circum solem repetitis observationibus determinata est, is praecipue, quem plerique ex viro clarissimo Biela denominamus, singulari cura persequendus est. Qui quum in singulis periodis, prae omnibus aliis corporibus caelestibus, orbitae Iovis et Terrae valde vicinus feratur, hi planetae et necesse est ut magnam in eius cursum vim exerceant, et fieri potest ut ab ipso perturbationes patiantur haud negligendas. Prius annis 1782, 1794 evenisse videtur, cum magna differentia elementorum orbitae cometae ex observationibus ann

1772 deductorum, atque eorum, quae anno 1805 reperta sunt, hac ratione sine difficultate explicari possit.

Postquam anno 1826 cometa ad solem reversus observationibus nostris se praebuit, solus Clar. Baro de Damoiseau, astronomus Parisiensis, perturbationes cometae per spatium annorum 1805 usque 1826 calculo subiecit, tanta approximatione, ut inde tempus, quo cometa rursum terrae conspicuus fieri possit, in mensem Novembrem anni 1832 determinatum sit. Desideratur tamen examen completum omnium quae exstant observationum.

Academia Berolinensis, ut ad disquisitionem hanc, inter astronomicas gravissimam, perficiendam excitaret,

„*Determinationem orbitae verae cometae huius, ex omnibus quae ex-*
„*stant observationibus, ne iis quidem quas hoc anno institutum iri*
„*speramus, exclusis,*"

certamini publico proponendam decrevit.

Desiderat Academia primum accurratam disquisitionem de fide et diligentia observationum hucusque institutarum, ita ut inde, quam illae exactae sint, constitui queat, atque errores quantum fieri potest minuantur. Praeterea singulae partes calculi perturbationum ita proponendae erunt, ut et analytica evolutio terminorum, quam auctor secutis sit, et quos terminos calculo numerali persequendos iudicaverit, inde eluceat, simulque quibus auxiliis usus sit ad errores calculi vel evitandos vel aperiendos. Post haec orbita cometae ita determinanda erit, ut ea omnibus observationibus, perturbationum respectu habito, quam maxime satisfaciat. Quodsi differentia inter theoriam et locos observatos tanta prodierit, ut eius causa erroribus observationum tribuenda esse non videatur, eae hypotheses in subsidium vocentur, quibus in aliis cometis usi sunt astronomi ad discrepantiam similem tollendam.

Terminus, quo tractatus hujus argumenti secretario Academiae transmittendi sunt, ob magnum, qui requiritur, laborem in diem 1. mensis Martii anni 1836 dilatus est. Fronti commentationis symbolum inscribendum est, addita schedula obsignata eodem symbolo instructa, quae intus contineat nomen auctoris.

Praemium quinquaginta ducatorum aureorum adiudicabitur eodem anno in conventu publico Academiae, in memoriam Leibnitii habendo.

36.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von dem Herrn Prof. *Plücker* zu Berlin.)

Lehrsätze.

Neue Sätze über das umschriebene und das eingeschriebene Sechseck.

I. Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein um denselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so werden irgend zwei Seiten dieses Sechsecks von den vier übrigen in 8 Puncten geschnitten. Diese acht Puncte lassen sich durch 12 neue gerade Linien mit einander verbinden. Diese 12 neue gerade Linien schneiden sich in 42 neuen Puncten. Von diesen 42 Puncten liegen 6 nach einem allbekannten Satze auf einer durch den Durchschnitt jener beiden Seiten gehenden geraden Linie; 12 liegen zu vier auf drei geraden Linien; 24 liegen, paarweise, auf solchen 12 geraden Linien, welche zu drei in den vier Berührungspuncten auf den vier übrigen Sechsecks-Seiten sich schneiden.

II. Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein in denselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so lassen sich irgend zwei Winkel-Puncte dieses Sechsecks mit den vier übrigen durch 8 neue gerade Linien verbinden. Diese acht gerade Linien schneiden sich in 12 neuen Puncten. Diese 12 neue Puncte lassen sich durch 42 neue gerade Linien mit einander verbinden. Von diesen 42 geraden Linien gehen 6 nach einem allbekannten Satze durch ein und denselben Punct derjenigen geraden Linie, welche jene beiden ersten Winkelpuncte des eingeschriebenen Sechsecks verbindet; 12 schneiden sich zu vier in drei Puncten; 24 schneiden sich paarweise in solchen 12 Puncten, welche zu drei auf den vier Tangenten in den vier übrigen Winkelpuncten des Sechsecks liegen.

Die vorstehenden beiden Sätze sind durch das Princip der Reciprocität mit einander verknüpft.

I. Wenn irgend ein Kegelschnitt gegeben ist, und man von irgend einem Puncte O aus nach beliebiger Richtung vier gerade Linien zieht, welche denselben in vier Puncten-Paaren A und A', B und B', C und C', D und D', schneiden, und dann endlich die vier Puncte A, B, C, und D mit den vier übrigen A', B', C', und D' durch gerade Linien verbindet, so erhält man dreimal vier solche Durchschnittspuncte dieser geraden Linien, welche mit dem Puncte O in gerader Linie liegen. Diese zwölf Puncte können wir auf folgende Weise bezeichnen und zusammenstellen:

